Я. И. ПЕРЕЛЬМАН

БОЛЬШАЯ КНИГА ЗАНИМАТЕЛЬНЫХ НАУК

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

АРИФМЕТИКА
ГЕОМЕТРИЯ • АЛГЕБРА

АРИФМЕТИКА – ЗАГАДКИ И ДИКОВИНКИ В МИРЕ ЧИСЕЛ
ГЕОМЕТРИЯ НА ВОЛЬНОМ ВОЗДУХЕ • МЕЖДУ ДЕЛОМ И ШУТКОЙ В ГЕОМЕТРИИ • МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РАССКАЗЫ И ГОЛОВОЛОМКИ
ЯЗЫК АЛГЕБРЫ В ПОМОЩЬ АРИФМЕТИКЕ И ГЕОМЕТРИИ

Я. И. ПЕРЕЛЬМАН • ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Я. И. ПЕРЕЛЬМАН

БОЛЬШАЯ КНИГА ЗАНИМАТЕЛЬНЫХ НАУК

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

СЗКЭО
Санкт-Петербург

Москва
ОНИКС-ЛИТ

УДК 51
ББК 22.1
П27

В оформлении обложки и титула использована работа М. Эшера
«Рептилии-крокодилы», 1943
Комментарии 2016 года

Выпускающий редактор
Шабловский В.

Компьютерная верстка
Судакова М.

Дизайн обложки
Шабловский В.

П27 **Перельман Я. И. Занимательная математика.** — Санкт-Петербург, СЗКЭО, 2018. — 208 с.: ил.

В настоящий сборник вошли книги «Занимательная арифметика», «Занимательная геометрия» и «Занимательная алгебра» замечательного популяризатора науки Якова Исидоровича Перельмана. Вашему вниманию предлагаются выдержки взятые из оригинальных авторских текстов:

«Занимательная геометрия на вольном воздухе и дома» 1933 г.,
«Занимательная арифметика» 1926 г.,
«Занимательная алгебра», 1937 г.
Наше издание не претендует на звание учебника, а только лишь пытается познакомить ребят с миром математики. Это увлекательная книга познакомит читателя с удивительным миром чисел, цифр и геометрических форм.

Для школьников средних классов, студентов и учащихся техникумов, для всех желающих восполнить пробелы в своем образовании.

ISBN 978-5-9603-0447-4

Примечание редактора

Настоящая книга на самом деле представляет собой сборник, в который вошли три самые лучшие книги Якова Перельмана, посвященные математике. Это «Занимательная арифметика», впервые увидевшая свет в Ленинграде в 1926 г., «Занимательная алгебра» 1937 г., и «Занимательная геометрия» 1933 г. издания. Все три книги пользовались и пользуются поныне заслуженным вниманием. Многие поколения людей в нашей стране с большим интересом встречаются с этими книгами, перечитывая их и давая читать своим детям и внукам.

Однако сегодня, в эпоху компьютеров и продвинутых технологий, многим может показаться, что такого рода книги безнадежно устарели. Ну, что может сообщить нового арифметика, ведь мы все умеем считать? Однако не спешите с ответом на вопрос. Загляните на страницы этой замечательной книги.

Мало того, что вы найдете там увлекательные рассказы о происхождения систем счета, приспособлений для его облегчения, когда подсчитываются большие величины, знаменитые задачи, вошедшие в мировую историю, вы также узнаете каким образом можно быстро и точно производить вычисления двух и трехзначных чисел в уме.

Не ожидали? Счет в уме? Так везде калькуляторы и компьютеры! Приборы, выдающие на свои продвинутые сенсорные дисплеи готовые результаты. Тогда, может быть, вы знаете ответ на вопрос, что делать, если сели батарейки или дисплей сломан, а провода порваны?

Таким образом становится ясно, что всецело полагаться, особенно при решении серьезных задач, на калькулятор или программу компьютера не стоит. По крайней мере, те, кто учился в технических вузах и производил довольно сложные и длинные вычисления, помнят, как преподаватель учил аудиторию, восклицая: «Вы всегда должны задавать себе вопрос: а может ли такое быть?»

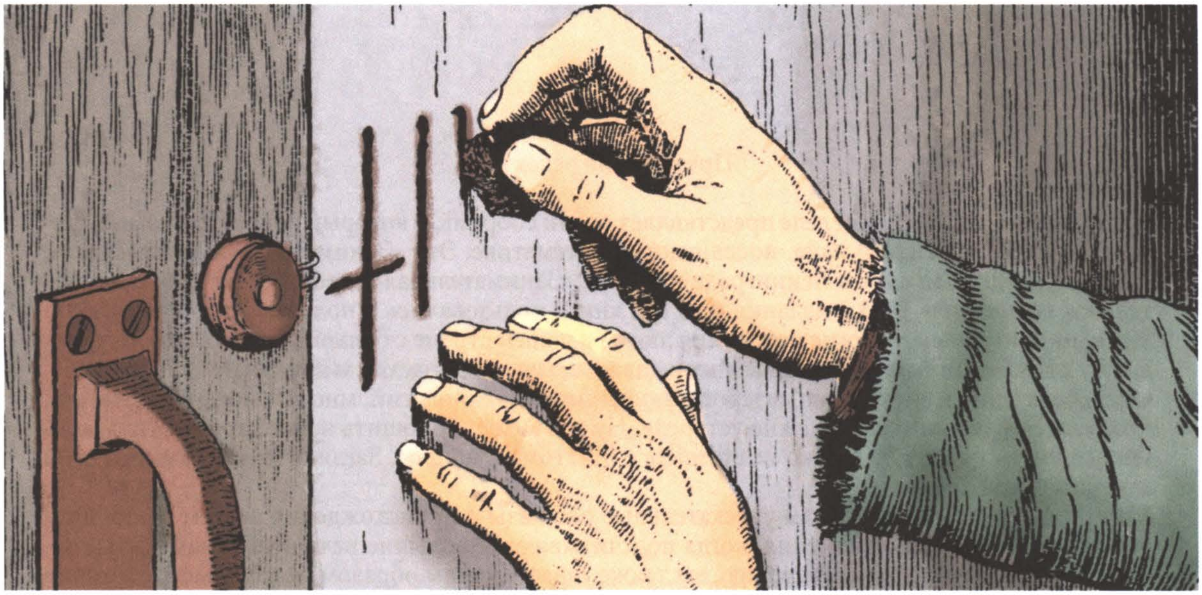
Как проверить результат? Только если вы можете быстро в уме с помощью арифметики проверить вычисления, определив хотя бы порядок результата: сотни это, тысячи или еще какое-то значение.

Что касается алгебры, то эта наука также актуальна сегодня, как и была актуальна в момент ее «изобретения» сотни лет назад. Буквально все технические решения находятся с помощью безупречной логики алгебры. Требуется ли определить, в какое время прибудет на место назначения ваш поезд или самолет. Выяснить, сколько необходимо бензина, чтобы преодолеть намеченный маршрут на машине. Спрогнозировать погоду на ближайшее время, запустить космический корабль, наконец! Все эти задачи решаются с помощью алгебры, путем составления остроумных и изящных уравнений, которые позволяют вершить чудеса, отыскивая величины, которые казалось бы совершенно невозможно определить в числовых значениях. В книге Я. Перельмана подробно показывается как это делать. И выясняется, что не так страшна эта, для некоторых, «ужасная» наука. А пользу, которую она приносит буквально на каждом шагу, трудно переоценить.

Заключает сборник «Занимательная геометрия». Принципиально, она напоминает алгебру, только оперирует не числовыми параметрами, а геометрическими величинами, такими как отрезок, угол, площадь и объем фигур. Знание геометрии позволит вам узнать множество полезных вещей. Таких, как фактическая площадь вашей квартиры или загородного участка. Рассчитать длины и расстояния, площади и объемы всего на свете. При этом вы столкнетесь с занимательными парадоксами и избавитесь от общераспространенных заблуждений в оценке тех или иных известных всем величин.

Прочитав эту книгу, вы не сможете не признать еще раз талант, с которым замечательный ученый Яков Исидорович Перельман смог легко и просто разъяснить суть весьма сложных вещей и понятий.

Итак, берите в руки карандаш, бумагу и отправляйтесь в увлекательное путешествие по страницам этой действительно занимательной и крайне полезной, особенно для молодых умов, книги.



1. ТАИНСТВЕННЫЕ ЗНАКИ

Задача № 1

В первые дни русской революции, в марте 1917 года, жители Ленинграда [1] (тогда — Петрограда) были немало озадачены и даже встревожены таинственными знаками, появившимися, неизвестно как, у дверей многих квартир. Молва приписывала этим знакам разнообразные начертания. Те знаки, которые мне пришлось видеть, имели форму восклицательных знаков, чередующихся с крестами, какие ставились раньше возле фамилий умерших. По общему убеждению, они ничего хорошего означать не могли и вселяли страх в растерянных граждан.

По городу пошли зловещие слухи. Заговорили о грабительских шайках, помечающих квартиры своих будущих жертв. «Комиссар города Петрограда», успокаивая население, утверждал, что «таинственные знаки, которые чьей-то невидимой рукой делаются на дверях мирных обывателей в виде крестов, букв, фигур, как выяснилось по произведенному дознанию, делаются провокаторами и германскими шпионами»; он приглашал жителей все эти знаки стирать и уничтожать, «а в случае обнаружения лиц, занимающихся этой работой, задерживать и направлять по назначению».

Таинственные восклицательные знаки и зловещие кресты появились также у дверей моей квартиры и квартир моих соседей. Некоторый опыт в распутывании замысловатых задач помог мне, однако, разгадать нехитрый и нисколько не страшный секрет этой тайнописи.

Решение

Своим «открытием» я поспешил поделиться с согражданами, поместив в газетах следующую заметку [2]:

«Таинственные знаки»

«В связи с таинственными знаками, появившимися на стенах многих петроградских домов, небесполезно разъяснить смысл одной категории подобных знаков, которые, несмотря на зловещее начертание, имеют самое невинное происхождение. Я говорю о знаках такого типа:

†!!   ††!!!!!   †††!!!

Подобные знаки замечены во многих домах на черных лестницах у дверей квартир. Обычно знаки этого типа имеются у всех дверей данного дома, причем в пределах одного дома двух одинаковых знаков не наблюдается. Их мрачное начертание естественно внушает тревогу жильцам. Между тем, смысл их, вполне невинный, легко раскрывается, если сопоставить их с номерами соответствующих квартир. Так, например, приведенные выше знаки найдены мною у дверей квартир № 12, № 25 и № 33:

†!!	††!!!!!	†††!!!
12	25	33

Нетрудно догадаться, что кресты означают десятки, а палочки — единицы; так оказалось во всех без исключения случаях, которые мне приходилось наблюдать. Своеобразная нумерация эта, очевидно, принадлежит дворникам-китайцам [3], не понимающим наших цифр. Появились эти знаки, надо думать, еще до революции, но только сейчас обратили на себя внимание встревоженных граждан».

Таинственные знаки такого же начертания, но только не с прямыми, а с косыми крестами, были обнаружены и в таких домах, где дворниками служили пришед-

[1] В 1991 г. Ленинграду возвращено историческое название Санкт-Петербург (Прим. ред.)

[2] Вечерний выпуск газеты «Биржевые Ведомости» от 16 марта 1917 г.

[3] Их было много тогда в Ленинграде. Позднее я узнал, что китайский иероглиф для 10 имеет как раз указанную форму креста (китайцы не употребляют наших «арабских» цифр).

шие из деревень русские крестьяне. Здесь уже нетрудно было выяснить истинных авторов тайнописи, вовсе и не подозревавших, что их безыскусственные обозначения номеров квартир только теперь были замечены и вызвали такой переполох.

2. СТАРИННАЯ НАРОДНАЯ НУМЕРАЦИЯ

Откуда взяли ленинградские дворники этот простой способ обозначения чисел: кресты — десятки, палочки — единицы? Конечно, не придумали этих знаков в городе, а привезли их из родных деревень. Нумерация эта давно уже в широком употреблении и понятна каждому, даже неграмотному крестьянину в самом глухом углу нашего Союза [1]. Восходит она, без сомнения, к глубокой древности и употребительна не только у нас. Не говоря уже о родстве с китайскими обозначениями, бросается в глаза и сходство этой упрощенной нумерации с римской: и в римских цифрах палочки означают единицы, косые кресты — десятки.

Любопытно, что эта народная нумерация некогда была даже у нас узаконена: по такой именно системе, только более развитой, должны были вестись сборщиками податей записи в податной тетради. «Сборщик, — читаем мы в старом Своде Законов, — принимая от кого-либо из домохозяев вносимые к нему деньги, должен сам, или через писаря, записать в податной тетради против имени того домохозяина, которого числа сколько получено денег, выставляя количество принятой суммы цифрами и знаками. Знаки сии для сведения всех и каждого ввести повсеместно одинаковые, а именно:

десять рублей означать знаком	□
рубль	○
десять копеек	×
копейка	|
четверть	—

Например, двадцать восемь рублей пятьдесят семь копеек три четверти:

(□□○○○○○○○○×××××|||||||≡)

В другом месте того же тома «Свода Законов» находим еще раз упоминание об обязательном употреблении народных числовых обозначений. Приводятся особые знаки для тысячи рублей — в виде шестиконечной звезды с крестом в ней, и для ста рублей — в виде колеса с 8 спицами. Но обозначения для рубля и десяти копеек здесь устанавливаются иные, чем в предыдущем законе.

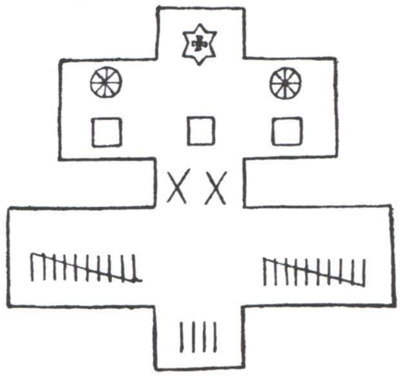
Вот текст закона об этих так называемых ясачных знаках [2]:

«Чтобы на каждой квитанции, выдаваемой Родовитому Старосте, от которого внесен будет ясак, кроме изложения словами было показываемо особыми знаками число внесенных рублей и копеек так, чтобы сдающие простым счетом сего числа могли быть уверены в справедливости показания [3]. Употребляемые в квитанции знаки означают:

(звезда) тысяча руб.
(колесо) сто рублей
□ десять рублей
× один рубль
|||||||||| десять коп.
| одну копейку.

Дабы не можно было сделать здесь никаких прибавлений, все таковые знаки очерчивать кругом прямыми линиями. Например:

1232 руб. 24 коп. изображаются так: (см рис.)».



Как видите, употребляемые нами арабские и римские цифры — не единственный способ обозначения чисел.

В старину у нас, да еще и теперь по деревням, применяются другие системы письменного счисления, отдаленно сходные с римскими и совсем не сходные с арабскими цифрами.

Но и это еще не все способы изображения чисел, употребляющиеся в наши дни: многие торговцы, например, имеют свои секретные знаки для числовых обозначений, — так называемые торговые меты. О них побеседуем сейчас подробнее.

3. СЕКРЕТНЫЕ ТОРГОВЫЕ МЕТЫ

На вещах, купленных у офеней или в частных магазинах, особенно провинциальных, — вы, вероятно, замечали иногда непонятные буквенные обозначения вроде

а ве > в уо

Это не что иное, как цена вещи без запроса, которую торговец для памяти обозначает на товаре, но так, однако, чтобы ее не мог разгадать покупатель. Бросив взгляд на эти буквы, торговец сразу проникает в их скрытый смысл и, сделав надбавку, называет покупателю цену с запросом.

Такая система обозначения весьма проста, если только знать «ключ» к ней. Торговец выбирал какое-нибудь слово, составленное из 10 различных букв; чаще всего останавливали выбор на словах: трудолюбие, правосудие, ярославец, миролюбец, Миралюбов.

Первая буква слова означает — 1, вторая — 2, третья — 3 и т. д.; десятою буквою обозначается нуль. С помощью этих условных букв-цифр торговец и обознача-

[1] Имеется в виду Советский Союз (СССР) (Прим. ред.).

[2] Знаки в ясачной грамоте, ясак — в России XV-начала XX в. натуральный налог с народов Сибири и Севера (Прим. ред.).

[3] Это показывает, что описываемые знаки были в широком употреблении среди населения.

ет на товарах их цену, храня в строгом секрете «ключ» к своей системе обозначения.

Если, например, выбрано слово:

п р а в о с у д и е
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

то цена 4 р. 75 к. будет обозначена так:

в уо

Знак «*пое*» означает 1 р. 50 к. (150),
пее — 1 рубль (100) и т. п.

Иногда цена на товаре бывает написана в виде дроби; например, на одной из купленных мною книг имеется обозначение

$$\frac{ое}{тро}$$

Это значит, при ключе «трудолюбие», что надо запросить 1 р. 25 коп., себе же книга стоила 50 коп.

Секрет своей меты торговцы строго берегут. Но если купить в одном и том же магазине несколько вещей, то, сопоставляя названную торговцем цену с соответствующими обозначениями, нетрудно догадаться о значении букв. Особенно легко разгадывать меты дешевых товаров, где запрашивают немного, так что первые цифры уплаченных сумм отвечают начальным буквам обозначения. Разгадав же несколько букв, легко доискаться значения остальных. При некоторой проницательности может быть разгадан «ключ» любой меты.

Допустим, например, что вы купили несколько вещей и заплатили за первую 25, за вторую — 22, за третью — 28 копеек. В уголках этих предметов вы находите такие обозначения

ро, рр, рд

Ясно, что буква р означает 2. Отгадав, по другим товарам, еще одну букву, — например, с – 6, вы уже догадаетесь, что ключ — правосудие. Число подходящих слов, надо заметить, ограничено, и выбор не бывает чересчур затруднительным.

4. АРИФМЕТИКА ЗА ЗАВТРАКОМ

После сказанного легко сообразить, что можно изображать числа не только с помощью цифр, но и с помощью любых иных знаков или даже предметов — карандашей, перьев, линеек, резинок и т. п.: надо только условиться приписывать каждому предмету значение какой-нибудь определенной цифры. Можно даже, ради курьеза, с помощью таких цифр-предметов изображать действия над числами — складывать, вычитать, умножать, делить. Вот, например, ряд действий над числами, обозначенными предметами сервировки стола (см. рис.). Вилка, ложка, нож, кувшинчик, чайник, тарелка — все это знаки, каждый из которых заменяет определенную цифру.

З а д а ч а № 2

Глядя на эту группу ножей, вилок, посуды и т. п., попробуйте угадать: какие именно числа здесь обозначены?

С первого взгляда такая задача кажется очень трудной: приходится разгадывать настоящие иероглифы, как сделал некогда француз Шамполион [1]. Но ваша задача гораздо легче: вы ведь знаете, что числа здесь, хотя обозначены вилками, ножами, ложками и т. п., написаны по десятичной системе счисления, т. е. вам известно, что тарелка, стоящая на втором месте (считая справа), есть цифра десятков, что предмет направо от нее — цифра единиц, а по левую сторону — цифра сотен.

Кроме того, вы знаете, что расположение всех этих предметов имеет определенный смысл, который вытекает из сущности арифметических действий, производимых над обозначенными ими числами.

Все это может значительно облегчить вам решение предложенной задачи.

Р е ш е н и е

Вот как можно доискаться значения расставленных здесь предметов. Рассматривая первые три ряда на нашем рисунке, вы видите, что «ложка», умноженная на «ложку», дает «нож». А из следующих рядов видно, что «нож» без «ложки» дает «ложку», или что «ложка» + «ложка» = «ножу». Какая же цифра дает одно и то же и при удвоении, и при умножении само на себя? Это может быть только 2, потому что 2 × 2 = 2 + 2. Таким образом узнаем, что «ложка» = 2, и следовательно, «нож» = 4.

Теперь идем дальше. Какая цифра обозначена вилкой? Попробуем разгадать это, присмотревшись к первым трем рядам, где вилка участвует в умножении, и к рядам III, IV и V, где та же вилка фигурирует в действии вычитания. Из группы вычитания вы видите, что, отнимая в разряде десятков, «вилку» от «ложки», получаем в результате «вилку», т. е. при вычитании два минус «вилка» получается «вилка». Это может быть в двух случаях: либо «вилка» = 1, и тогда 2 – 1 = 1; либо же «вилка» = 6, и тогда, вычитая 6 из 12 (единица высшего разряда занимается у «чашки»), получаем 6.

Что же выбрать: 1 или 6? Испытаем, годится ли 6 для вилки в других действиях. Обратите внимание на сложение V и VI рядов: «вилка» (т. е. 6) + «чашка» = «тарелке»; значит, «чашка» должна быть меньше 4 (потому что в рядах VII и VIII «тарелка» минус «вилка» = «чашке»). Но

[1] Жан-Франсуа Шампольон (1790–1832) — французский востоковед, основатель египтологии. Благодаря проведенной им расшифровке текста Розеттского камня в 1822 году стало возможным чтение египетских иероглифов. (*Прим. ред.*)

«чашка» не может равняться двойке, так как двойка обозначена уже «ложкой»; не может «чашка» быть и единицей — иначе вычитание IV ряда из III не могло бы дать трехзначного числа в V ряду. Не может, наконец, чашка обозначать и 3: если чашка = 3, то бокальчик (см. ряды IV и V) должен обозначать единицу; потому что 1 + 1 = 2 т. е. «бокальчик» + «бокальчик» = «чашке», убавленной на единицу, которая была занята у него при вычитании в разряде десятков; «бокальчик» же равняться единице не может, потому что тогда тарелка в VII ряду будет обозначать в одном случае цифру 5 («бокальчик» + «нож»), а в другом — цифру 6 («вилка» + «чашка»), чего быть не может. Значит, нельзя было допустить, что «вилка» = 6, а надо было принять ее равной единице.

Узнав путем таких — довольно, правда, долгих — поисков, что вилка обозначает цифру 1, мы дальше уже идем более уверенно и быстро. Из действия вычитания в III и IV рядах видим, что чашка обозначает либо 6, либо 8. Но 8 приходится отвергнуть, потому что тогда вышло бы, что «бокальчик» = 4, а мы знаем, что цифра 4 обозначена ножом. Итак, чашка обозначает цифру 6, а следовательно, бокальчик — цифру 3.

Какая же цифра обозначена кувшинчиком в I ряду? Это легко узнать, раз нам известно произведение (III ряд, 624) и один из множителей (II ряд, 12). Разделив 624 на 12, получаем 52. Следовательно, «кувшинчик» = 5.

Значение тарелки определяется просто: в VII ряду «тарелка» = «вилке» + «чашка» = «бокальчику» + «нож»; т. е. «тарелка» = 1 + 6 = 3 + 4 = 7.

Остается разгадать цифровое значение чайника и сахарницы в VII ряду. Так как для цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 предметы уже найдены, то остается выбирать только между 8, 9 и 0. Подставим в действие деления, изображенное в последних трех рядах [1], соответствующие цифры вместо предметов.

Получим такое расположение (буквами ч и с обозначены «чайник» и «сахарница»).

чс) 774 (ч

712

62

Число 712, мы видим, есть произведение двух неизвестных чисел чс и ч, которые, конечно, не могут быть ни нулем, ни оканчиваться нулем: значит, ни ч, ни с не есть нуль. Остаются два предположения: ч = 8 и с = 9, или же, ч = 9 и с = 8. Но, перемножив 98 на 8, мы не получаем 712; следовательно, чайник обозначает 8, а сахарница — 9 (действительно: 89 × 8 = 712).

Итак, мы разгадали иероглифическую надпись из предметов столовой сервировки:

кувшин = 5

ложка = 2

вилка = 1

чашка = 6

бокальчик = 3

чайник = 8

сахарница = 9

тарелка = 7

А весь ряд арифметических действий, изображенный этой оригинальной сервировкой, приобретает такой смысл:

```
52 × 12
12
———————
624 – 312
312
———————
312 – 462
462
———————
89) 774 (8
712
———————
62
```

5. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ РЕБУСЫ

То, что я предлагаю назвать арифметическими ребусами, — занимательная игра американских школьников, у нас пока еще совершенно неизвестная [2]. Она состоит в отгадывании задуманного слова посредством решения задачи вроде той, какую мы решили в предыдущей статье. Загадывающий задумывает слово, состоящее из 10 не повторяющихся букв, — например, «трудолюбие», «специально», «просвещать». Приняв буквы задуманного слова за цифры, загадывающий изображает посредством этих букв какой-нибудь случай деления. Если задумано слово «просвещать», то можно взять такой пример деления:

```
п р о с в е щ а т ь       123 564 | 1548      провес | пвса
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0       10 836   |  79       пьаое    щь
                          ——————               —————
                            15204                пвръс
делимое —                   13932                потор
провес …123564              —————               —————
делитель —                   1272                 прщр
овса …1548
```

Можно взять и другие слова:

```
делимое —                  восстать | свет
восстать … 53449890        свет
делитель —                 ————
свет … 4569                 щщвт
                            свет
                           ————
                             оттьа
                             рщспс
                             —————
                               сстст
                               слпрп
                               —————
                                 оараь
                                 оеввр
                                 —————
                                  пцра
```

Буквенное изображение определенного случая деления вручается отгадчику, который и должен по этому бессмысленному, казалось бы, набору букв угадать задуманное слово. Как следует в подобных случаях доискиваться числового значения букв, — читатель уже знает: мы объяснили это, когда решали задачу предыдущей статьи. При некотором терпении можно успеш-

[1] Расположение чисел здесь такое, какое принято теперь в Англии и Америке (а в прежнее время употреблялось и в русских учебных книгах): частное и делитель пишутся по обе стороны делимого.

[2] Английское название игры «div-al-et» — сокращение от «division by letters», т. е. деление буквами.

но разгадывать эти арифметические ребусы, если только пример достаточно длинен и дает необходимый материал для догадок и испытаний. Если же выбраны слова, дающие чересчур короткий случай деления, например:

т р у д о л ю б и е
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

делимое — *блюдо* ... 86745
делитель — *труд* ...1234

блюдо | *труд*
блуб | *уе*
уло

— то разгадывание очень трудно. В подобных случаях надо просить загадывающего продолжить деление до сотых или тысячных долей, т. е. получить в частном еще 2 или 3 десятичных знака. Вот пример деления до сотых долей:

с п е ц и а л ь н о
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

делимое — *палец* ... 26734
делитель — *пила* ... 2576

палец | *пила*
пила | *со,ел*
нлцо
ллпь
поспо
сьосп
понь

Если бы в этом случае мы остановились на целом частном (со), отгадка задуманного слова едва ли была бы возможна.

Задачи № 3–5

Для читателя, который пожелал бы испытать свои силы в разрешении подобных арифметических ребусов, привожу еще три примера:

I.

давние | *дни*
дояс | *ипи*
ввей
оеад
дове
дояс
вд

II.

постная | *репа*
репа | *кокн*
кктпо
ппеа
репа
ряаяя
китар
оараь
ркян

III.

уравнить | *ниву*
свет | *рее*
уурер
уъиаи
ниву
вллит
внуре
верль
ауир

По этим образцам читатель сможет составить самостоятельно множество других примеров.

(Решения этих задач — см. далее, с. 13, внизу).

6. ДЕСЯТИЧНАЯ СИСТЕМА В КНИЖНЫХ ШКАФАХ

Особенность десятичной системы счисления остроумно используется даже в такой области, где с первого взгляда этого и ожидать не приходится, — именно, при распределении книг в библиотеке.

Обычно, желая указать библиотекарю номер нужной вам книги, вы просите дать вам каталог и предварительно справляетесь в нем, потому что в каждом книгохранилище имеется обыкновенно своя нумерация книг. Существует, однако, и такая система распределения книг по номерам, при которой одна и та же книга должна иметь одинаковый номер во всякой библиотеке. Это так называемая десятичная система классификации книг.

Система эта (к сожалению, принятая пока еще далеко не всюду) [1] чрезвычайно удобна и весьма несложна. Сущность ее в том, что каждая отрасль знания обозначается определенным числом и притом так, что цифровой состав этого числа сам говорит о месте данного предмета в общей системе знаний.

Книги прежде всего разбиваются на десять обширных классов, обозначенных цифрами от 0 до 9.

0. Сочинения общего характера.
1. Философия.
2. Религия.
3. Общественные науки. Право.
4. Филология. Языки.
5. Физико-математические и естественные науки.
6. Прикладные науки (медицина, техника, сельское хозяйство и т. п.).
7. Изящные искусства.
8. Литература.
9. История, география, биографии.

В обозначении номера книги по этой системе первая цифра прямо указывает на ее принадлежность к тому или иному классу из перечисленных выше: каждая книга по философии имеет номер начинающийся с 1, по математике — с 5, по технике — с 6. И, наоборот, если номер книги начинается, например, с 4, то, еще не раскрывая книги, мы можем утверждать, что перед нами сочинение из области языкознания.

Далее, каждый из десяти перечисленных классов книг подразделяется на 10 главных отделов, тоже отмеченных цифрами; эти цифры ставят в обозначении номера на втором месте. Так, 5-й класс, включающий физико-математические и естественно-научные книги, разделяется на следующие отделы:

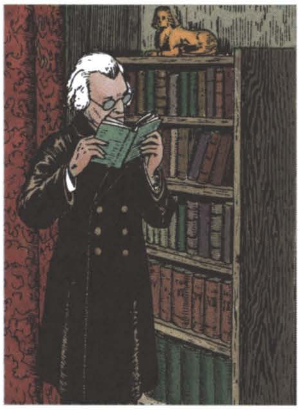
50. Общие сочинения по физ.-мат. и естественным наукам.
51. Математика.
52. Астрономия.
    Геодезия.
53. Физика.
    Механика теоретическая.
54. Химия.
    Минералогия.
55. Геология.
56. Палеонтология.
57. Биология.
    Антропология.
58. Ботаника.
59. Зоология.

Сходным образом разбиваются по отделам и остальные классы. Например, в классе прикладных наук (6) отдел медицины обозначается цифрой 1 после 6, т. е. числом 61; по сельскому хозяйству — 63, по домоводству — 64; торговле и путям сообщения — 65, химической промышленности и технологии — 66 и т. п. Точно так же в 9-м классе все книги по географии и путешествиям относятся к отделу 91 и т. п.

Присоединение к двум первым цифрам третьей характеризует ее содержание еще точнее, указывая, к какому именно подотделу данного отдела она относится. Например, в отделе математики (51) присоединение на третьем

[1] В настоящее время используется во всем мире для систематизации произведений науки, литературы и искусства, периодической печати, различных видов документов и организации картотек. (*Прим. ред.*).

месте цифры 1 указывает, что книга относится к арифметике (511), цифры 2 — к алгебре (512), цифры 3 — к геометрии (513) и т. д. Точно так же и отдел физики (53) разбивается на 10 подотделов: книги по электричеству обозначаются 534, по свету — 535, по теплоте — 536 и т. д.



Затем следует дальнейшее дробление подотдела на разряды, обозначаемые четвертой цифрой номера.

В библиотеке, устроенной по десятичной системе, нахождение нужной книги упрощается до крайности. Если, например, вы интересуетесь геометрией, вы прямо идете к шкафам, где номера начинаются с 5, отыскиваете тот шкаф, где хранятся книги № 51… и пересматриваете в нем только те полки, где стоят книги № 513…: здесь собраны все книги по геометрии, имеющиеся в данной библиотеке. Точно так же, ища книги по социализму и коммунизму, вы обратитесь к книгам № 333…, не заглядывая в каталог и никого не затрудняя расспросами.

Как бы обширна ни была библиотека, никогда не может случиться недостатка в числах для нумерации книг [1].

7. КРУГЛЫЕ ЧИСЛА

Вероятно все замечали на себе и на окружающих, что среди цифр есть излюбленные, к которым мы питаем особенное пристрастие. Мы, например, очень любим «круглые числа», т. е. оканчивающиеся на 0 или 5. Пристрастие к определенным числам, предпочтение их другим, заложено в человеческой натуре гораздо глубже, чем обыкновенно думают. В этом отношении сходятся вкусы не только всех европейцев и их предков, например, древних римлян, — но даже первобытных народов других частей света.

При каждой переписи населения обычно наблюдается чрезмерное обилие людей, возраст которых оканчивается на 5 или на 0; их гораздо больше, чем должно бы быть. Причина кроется, конечно, в том, что люди не помнят, твердо, сколько им лет и, показывая возраст, невольно «округляют» годы. Замечательно, что подобное же преобладание «круглых» возрастов наблюдается и на могильных памятниках древних римлян.

Эта одинаковость числовых пристрастий идет еще дальше. Один германский психолог (проф. К. Марбе) подсчитал, как часто встречается в обозначениях возраста на древнеримских могильных плитах та или иная цифра, и сравнил эти результаты с повторяемостью цифр в обозначениях возраста по переписи в американском штате Алабама, где живут преимущественно негры. Получилось удивительное согласие: древние римляне и современные нам негры до малейших подробностей сходятся в числовых пристрастиях!

Конечные цифры возраста, по частоте их повторяемости, располагались в обоих случаях в одинаковой последовательности, а именно:

0, 5, 8, 2, 3, 7, 6, 4, 9 и 1.

Но и это не все. Чтобы выяснить числовые пристрастия современных европейцев, упомянутый ученый производил такого рода опыты: он предлагал множеству лиц определить «на глаз», сколько миллиметров заключает в себе полоска бумаги, например, в палец длиною, и записывал ответы. Подсчитав затем частоту повторения одних и тех же конечных цифр, ученый получил снова тот же самый ряд:

0, 5, 8, 2, 3, 7, 6, 4, 9 и 1.

Нельзя считать случайностью, что народы — столь отдаленные друг от друга и антропологически, и географически, — обнаруживают полную одинаковость числовых симпатий, т. е. явное пристрастие к «круглым» числам, оканчивающимся на 0 или 5, и заметную неприязнь к числам не круглым.

Любовь к пятеркам и десяткам находится, без сомнения, в прямой связи с десятичным основанием нашей системы счисления, т. е. в конечном итоге — с числом пальцев на наших обеих руках. Остается неразгаданной лишь та правильность, с какой слабеет эта симпатия по мере удаления от 5 и 10.

Это пристрастие к округленным числам обходится нам, надо заметить, довольно дорого. Товарные цены в розничной продаже всегда тяготеют к этим круглым числам: некруглое число, получающееся при исчислении продажной стоимости товара, дополняется до большего круглого числа. Цена книги очень редко бывает 57 коп., 63 коп., 84 коп., а чаще 60 коп., 65 коп., 85 коп. Но округленность цены достигается обычно за счет покупателя, а не продавца. Общая сумма, которую потребители переплачивают за удовольствие приобретать товары по круглым ценам, накапливается весьма внушительная. Кто-то дал себе труд, задолго до последней войны [2], приблизительно подсчитать ее, и оказалось, что население России ежегодно переплачивало в виде разницы между круглыми и некруглыми товарными ценами не менее 30 миллионов рублей. Не слишком ли дорогая дань невинной слабости к округлениям?

Задача № 6

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ КУРЬЕЗЫ:

$$100 = \begin{cases} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \times 9 \\ 12 - 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9 \\ 123 + 4 - 5 + 67 - 89 \\ 123 - 45 - 67 + 89 \end{cases}$$

[1] Желающие применить эту систему на практике при устройстве библиотеки найдут все необходимые сведения в книге Международного библиографического института: «Десятичная классификация». Перевод под редакцией проф. А. М. Ловягина (Ленинград, 1923).

[2] Имеется в виду Первая мировая война 1914–1918 гг. (*Прим. ред.*).

8. ЧЕХОВСКАЯ ГОЛОВОЛОМКА

Припомним ту, в своем роде знаменитую арифметическую задачу, которая так смутила семиклассника Зиберова из чеховского рассказа «Репетитор»:

«Купец купил 138 аршин черного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 руб. за аршин, а черное — 3 руб.?»

С тонким юмором описывает Чехов, как беспомощно трудились над этой задачей и семиклассник-репетитор, и его ученик, двенадцатилетний Петя, пока не выручил их Петин отец Удодов:

«Петя повторяет задачу и тотчас же, ни слова не говоря, начинает делить 540 на 138.

— Для чего же вы делите? Постойте! Впрочем, так.. продолжайте. Остаток получается? Здесь не может быть остатка.

Дайте-ка я разделю!

Зиберов [репетитор] делит, получает 3 с остатком и быстро стирает.

— Странно… — думает он, ероша волосы и краснея. — Как же она решается? Гм!.. Это задача на неопределенные уравнения, а вовсе не арифметическая.

Учитель глядит в ответы и видит 75 и 63.

— Гм!., странно… Сложить 5 и 3, а потом делить 540 на 8? Так, что ли? Нет, не то!

— Решайте же! — говорит он Пете.

— Ну, чего думаешь? Задача-то ведь пустяковая, — говорит Удодов Пете. — Экий ты дурак, братец! Решите уж вы ему, Егор Алексеич.

Егор Алексеич [репетитор] берет в руки грифель и начинает решать. Он заикается, краснеет, бледнеет.

— Эта задача, собственно говоря, алгебраическая, — говорит он. — Ее с иксом и игреком решить можно. Впрочем, можно и так решить. Я вот разделил… Понимаете? Или, вот что. Решите мне эту задачу к завтрему… Подумайте…

Петя ехидно улыбается. Удодов тоже улыбается. Оба они понимают замешательство учителя. Ученик VII класса еще пуще конфузится, встает и начинает ходить из угла в угол.

— И без алгебры решить можно, — говорит Удодов, протягивая руку к счетам и вздыхая. — Вот, извольте видеть…

Он щелкает на счетах, и у него получается 75 и 63, что и нужно было.

— Вот-с… по-нашему, по-неученому».

Эта сценка с задачей, заставляющая нас смеяться над конфузом злосчастного репетитора, задает нам сама три новых задачи. А именно:

1. Как намеревался репетитор решить задачу алгебраически?
2. Как должен был решить ее Петя?
3. Как решил ее отец Пети на счетах «по-неученому»?

Решение

На первые два вопроса, вероятно, без труда ответят если не все, то, во всяком случае, многие читатели нашей книжки.

Третий вопрос не так прост. Но рассмотрим наши задачи по порядку.

1. Семиклассник-репетитор готов был решать задачу «с иксом и игреком», будучи уверен, что задача — «собственно говоря, алгебраическая». И он, надо думать, легко справился бы с ней, прибегнув к помощи системы уравнений (только не неопределенных, как ему казалось).

Составить два уравнения с двумя неизвестными для данной задачи очень нетрудно; вот они:

$$x + y = 138 \qquad 5x + 3y = 540,$$

где x — число аршин синего, а y — черного сукна.

2. Однако, задача легко решается и арифметически. Если бы вам пришлось решать ее, она, конечно, не затруднила бы вас. Вы начали бы с предположения, что все купленное сукно было синее, — тогда за всю партию

в 138 аршин синего сукна пришлось бы уплатить 5 × × 138 = 690 рублей; это на 690 – 540 = 150 рублей больше того, что было заплачено в действительности. Разница в 150 рублей указывает, что в партии имелось и более дешевое, черное сукно по 3 рубля аршин. Дешевого сукна было столько, что из двухрублевой разницы на каждом аршине составилось 150 рублей: очевидно, число аршин черного сукна определится, если разделить 150 на 2. Получаем ответ — 75; вычтя эти 75 аршин из общего числа 138 аршин, узнаем, сколько было синего сукна: 138 – 75 = 63. Так и должен был решать задачу Петя.

3. На очереди третий вопрос: как решил задачу Удодов-старший?

В рассказе говорится об этом очень кратко: «он щелкает на счетах, и у него получается 75 и 63, что и нужно было».

В чем же, однако, состояло это «щелканье на счетах»? Каков способ решения задачи с помощью счетов?

Разгадка такова: злополучная задача решается на счетах тем же приемом, что и на бумаге, — теми же арифметическими действиями. Но выполнение их значительно упрощается, благодаря преимуществам, которые наши русские счеты предоставляют всякому, умеющему с ними обращаться. Очевидно, «отставной губернский секретарь» Удодов хорошо умел считать на счетах, потому что их косточки быстро, без помощи алгебры, открыли ему то, чего репетитор-семиклассник добивался узнать «с иксом и игреком». Проследим же, какие действия должен был проделать на счетах Петин отец.

Прежде всего ему нужно было, как мы знаем, умножить 138 на 5. Для этого он, по правилам действий на счетах, умножил сначала 138 на 10, т. е. просто перенес 138 одной проволокой выше, — а затем разделил это число пополам опять-таки на счетах же. Деление начинают снизу: откидывают половину косточек, отложенных на каждой проволоке; если число косточек на данной проволоке нечетное, то выходят из затруднения, «раздробляя» одну косточку этой проволоки на 10 нижних.

В нашем, например, случае делят 1380 пополам так: на нижней проволоке, где отложено 8 косточек, откидывают 4 косточки (4 десятка), на средней проволоке из 3 косточек откидывают 1, а оставшуюся 1 косточку заменяют мысленно 10 нижними и делят пополам, добавляя 5 десятков к косточкам нижней; на верхней проволоке раздробляют одну косточку, прибавляя 5 сотен к косточкам средней проволоки. В результате на верхней проволоке совсем не остается косточек; на средней 1 + 5 = 6 сотен, на нижней 4 + 5 = 9 десятков. Итого 690 единиц. Выполняется все это быстро, автоматически.

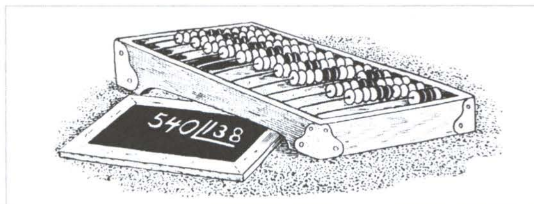
Далее Удодову-старшему нужно было из 690 вычесть 540. Как проделывается это на счетах — всем известно.

Наконец, полученную разность, 150, оставалось разделить пополам: Удодов откинул из 5 косточек (десятков) 2, отдав 5 единиц нижнему ряду косточек; потом из 1 косточки на проволоке сотен отдал 5 десятков нижнему ряду: получилось 7 десятков и 5 единиц, т. е. 75.

Все эти простые действия выполняются на счетах, конечно, гораздо скорее, чем тут описано.

9. РУССКИЕ СЧЕТЫ

Есть много полезных вещей, которых мы не умеем ценить только потому, что, постоянно находясь у нас под руками, они превратились в слишком обыкновенный предмет домашнего обихода. К числу таких недостаточно ценимых вещей принадлежат и наши конторские счеты — русская народная счетная машина, пред-



ставляющая собою лишь видоизменение знаменитого «абака», или «счетной доски» наших отдаленных предков. Древние народы — египтяне, греки, римляне — употребляли при вычислениях счетный прибор «абак», очень походивший на наши десятикосточковые счеты. Это была доска (стол), разграфленная на полосы, по которым передвигали особые шашки, игравшие роль косточек наших счетов. Такой вид имел греческий абак. Абак римский имел форму медной доски с желобами (прорезами), в которых передвигались кнопки. Родственен абаку перуанский «квипос» — ряд ремней или бечевок с завязанными на них узлами; этот счетный прибор получил особенное распространение среди первоначальных обитателей Ю. Америки, но, без со-

мнения, был в употреблении также и в Европе (см. далее, статью «Отголоски старины»). В средние века вплоть до XVI в. подобные приспособления были широко распространены в Европе. Но в наши дни видоизмененный абак — счеты — сохранился, кажется, только у нас да в Китае (семикосточковые счеты, «суан-пан» [1].

[1] Семикосточковые счеты в Китае чрезвычайно распространены; они имеются всевозможных размеров, до самых миниатюрных (у меня хранится привезенный мне из Китая экземпляр в 17 мм длины и 8 мм ширины). Я. И. Перельман.

Запад не знает десятикосточковых счетов — вы не найдете их ни в одном магазине Европы. Быть может, потому-то мы и не ценим этого счетного прибора так высоко, как он заслуживает, смотрим на него, как на какую-то наивную кустарную самодельщину в области счетных приборов.

Между тем, мы вправе были бы гордиться нашими конторскими счетами, так как при изумительной простоте устройства они, по достигаемым на них результатам, могут соперничать в некоторых отношениях даже со сложными, дорогостоящими счетными машинами западных стран. В умелых руках этот нехитрый прибор творит порою настоящие чудеса.

Иностранцы, впервые знакомящиеся с нашими счетами, охотно признают это и ценят их выше, нежели мы сами. Специалист, заведывавший одной из крупных русских фирм по продаже счетных машин, рассказывал мне, что ему не раз приходилось изумлять русскими счетами иностранцев, привозивших ему в контору образцы сложных счетных механизмов. Он устраивал состязания между двумя счетчиками, из которых один работал на дорогой заграничной «аддционной» машине (т. е. машине для сложения), другой же пользовался обыкновенными счетами. И случалось, что последний — правда, большой мастер своего дела — брал верх над обладателем заморской диковинки в быстроте и точности вычислений. Бывало и так, что иностранец, пораженный быстротой работы на счетах, сразу же сдавался и складывал свою машину обратно в чемодан, не надеясь продать в России ни одного экземпляра.

«К чему вам дорогие счетные машины, если вы так искусно считаете при помощи ваших дешевых счетов!» — говорили нередко представители иностранных фирм.

А ведь заграничные машины в сотни раз дороже наших конторских счетов!

Правда, на русских счетах нельзя производить всех тех действий, которые выполняются машинами. Но во многом — например, в сложении и вычитании — счеты могут соперничать со сложными механизмами. Впрочем, в искусных руках умножение и деление также значительно ускоряются на счетах, если знать приемы выполнения этих действий.

Познакомимся же с некоторыми из них.

10. УМНОЖЕНИЕ НА СЧЕТАХ

Вот несколько приемов, пользуясь которыми всякий, умеющий быстро складывать на счетах, сможет проворно выполнять встречающиеся на практике примеры умножения.

Умножение на 2 и на 3 заменяется двукратным и троекратным сложением.

При умножении на 4 умножают сначала на 2 и складывают этот результат с самим собою.

Умножение числа на 5 выполняется на счетах так: переносят все число одной проволокой выше, т. е. умножают его на 10, а затем делят это 10-кратное число пополам (как делить на 2 с помощью счетов — мы уже объяснили выше, на с. 11).

Вместо умножения на 6 — умножают на 5 и прибавляют умножаемое. Вместо умножения на 7 — множат на 10 и отнимают умножаемое 3 раза. Умножение на 8 заменяют умножением на 10 без 2. Точно так же множат на 9 — заменяют умножением на 10 без 1.

При умножении на 10 — переносят, как мы уже сказали, все число одной проволокой выше.

Читатель, вероятно, уже и сам сообразит, как надо поступать при умножении на числа больше 10, и какого рода замены тут окажутся наиболее удобными. Множитель 11 надо, конечно, заменить 10 + 1. Множитель 12 заменяют 10 + 2, или практически 2 + 10, т. е. сначала откладывают удвоенное число, а затем прибавляют удесятеренное. Множитель 13 заменяется 10+3 и т. д.

Рассмотрим несколько особых случаев для множителей первой сотни:

$20 = 10 \times 2$	$32 = 22 + 10$
$22 = 11 \times 2$	$42 = 22 + 20$
$25 = (100 : 2) : 2$	$43 = 33 + 10$
$26 = 25 + 1$	$45 = 50 - 5$
$27 = 30 - 3$	$63 = 33 + 30$ и т. д.

Легко увидеть, между прочим, что помощью счетов очень удобно умножать на такие числа, как на 22, 33, 44, 55 и т. п.; поэтому надо стремиться при разбивке множителей пользоваться подобными числами с одинаковыми цифрами.

К сходным приемам прибегают и при умножении на числа, большие 100. Если подобные искусственные приемы утомительны, мы всегда, конечно, можем умножить с помощью счетов по общему правилу, умножая каждую цифру множителя и записывая частные произведения, — это все же дает некоторое сокращение времени.

11. ДЕЛЕНИЕ НА СЧЕТАХ

Выполнять деление с помощью конторских счетов гораздо труднее, чем умножать; для этого нужно запомнить целый ряд особых приемов, подчас довольно замысловатых. Интересующимся ими придется обратиться к специальным руководствам. Здесь укажу лишь, ради примера, удобные приемы деления помощью счетов на числа первого десятка (кроме числа 7, способ деления на которое чересчур сложен).

Как делить на 2, мы уже знаем (с. 11) — способ этот очень прост.

Гораздо сложнее прием деления на 3: он состоит в замене деления умножением на бесконечную периодическую дробь 3,3333… (известно, что 0,333 = ⅓). Умножать с помощью счетов на 3 мы умеем; уменьшать в 10 раз тоже несложно: надо лишь переносить делимое одной проволокой ниже. После недолгого упражнения этот прием деления на 3, на первый взгляд длинноватый, оказывается довольно удобным на практике.

Деление на 4, конечно, заменяется двукратным делением на 2.

Еще проще деление на 5: его заменяют делением на

10 и удвоением результата.

На 6 делят с помощью счетов в два приема: сначала делят на 2, потом полученное делят на 3.

Деление на 7, как мы уже сказали, выполняется с помощью счетов чересчур сложно, и потому здесь излагать его не будем.

На 8 делят в три приема: сначала на 2, потом полученное вновь на 2 и затем еще раз на 2.

Очень интересен прием деления на 9. Он основан на том, что $\frac{1}{9} = 0{,}1111\ldots$ Отсюда ясно, что вместо деления на 9 можно последовательно складывать 0,1 делимого + 0,01 его + 0,001 его и т. д. [1] Всего проще, как видим, делить на 2, 10 и 5, — и, конечно, на такие кратные им числа, как 4, 8, 16, 20, 25, 40, 50, 75, 80, 100. Эти случаи деления не представляют трудности и для малоопытного счетчика.

12. УЛУЧШЕНИЕ СЧЕТОВ

Задача № 7

Какие косточки на наших конторских счетах являются совершенно излишними?

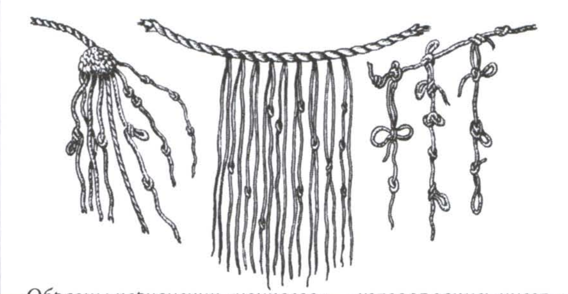
Решение

Совершенно излишни десятые косточки каждого ряда; можно вполне обойтись 9 косточками на проволоке. В самом деле: когда надо отложить 10 косточку, вы отодвигаете все 9 косточек назад, а на следующей проволоке откидываете одну косточку. Другими словами, 10-я косточка на счетах так же не нужна, как не нужна особая цифра для обозначения 10-и: 9 + 1 есть единица высшего разряда, и ее можно сразу же именно так, записать, не обозначая предварительно как принадлежащую к низшему разряду.

13. ОТГОЛОСКИ СТАРИНЫ

С отдаленными предками наших конторских счетов связаны некоторые пережитки старины в языке и обычаях.

Мало кто подозревает, например, что собственно мы делаем, завязывая «для памяти» узелок на носовом платке. Мы повторяем то, что некогда с большим смыслом делали наши предки, «записывая» таким образом итог счета на шнурках. Веревка с узлами представляла собой некогда счетный прибор, в принципе аналогичный нашим счетам и, без сомнения, связанный с ними общностью происхождения: это — «веревочный абак».



Образцы перуанских «квипосов» — узловая запись чисел

С абаком же связаны и такие распространенные теперь слова, как «банк» и «чек». «Банк» по-немецки означает скамья. Что же общего между финансовым учреждением — «банком» в современном смысле слова — и скамьей? Оказывается, что здесь далеко не простое совпадение названий. Абак в форме скамьи был широко распространен в торговых кругах Германии в XV–XVI вв.; каждая меняльная лавка или банкирская контора характеризовалась присутствием «счетной скамьи» — естественно, что скамья стала синонимом банка.

Более косвенное отношение к абаку имеет слово «чек». Оно английского происхождения и производится от глагола «чекер» (checker) — графить; «чекеред» (графленный) называли разграфленную в форме абака кожаную салфетку, которую в XVI–XVII в. английские коммерсанты носили с собою в свернутом виде и, в случае надобности произвести подсчет, развертывали на столе. Бланки для расчетов графились по образцу этих свертывающихся абаков, и неудивительно, что на них перенесено было, в сокращенном виде, самое название этих счетных приборов: от слова «чекеред» произошло слово «чек».

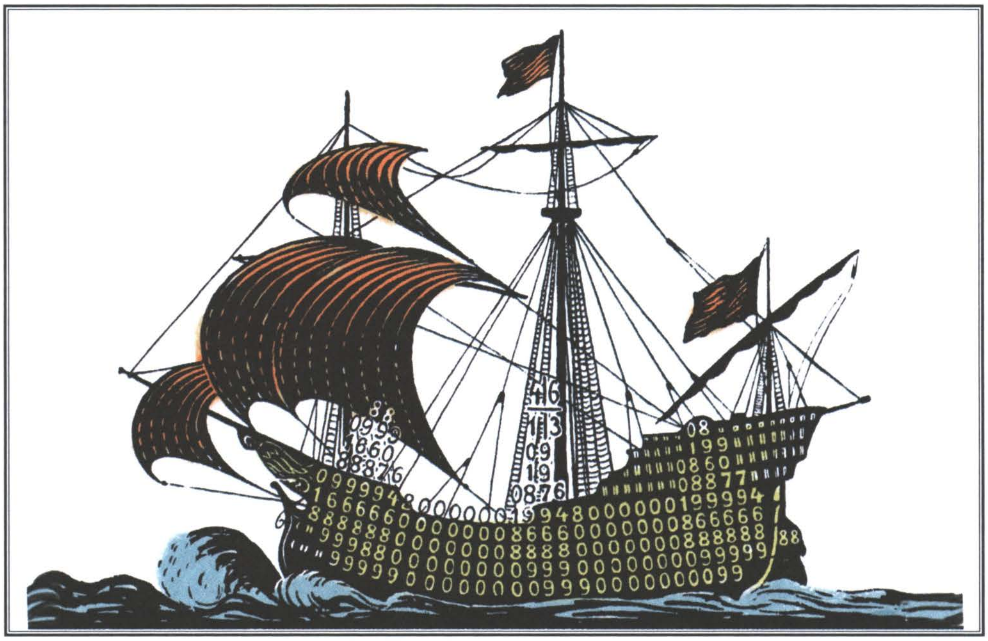
Любопытно, откуда произошло выражение «остаться на бобах», которое мы применяем теперь к человеку, проигравшему все свои деньги. Оно также древнего происхождения и относится к тому времени, когда все денежные расчеты — в том числе и расчеты между игроками — производились на абаке, на счетном столе или скамье, помощью бобов, заменявших косточки наших счетов. «Один считает на камешках, другой — на бобах», читаем у Кампанеллы в «Государстве Солнца» (1602). Человек, проигравший свои деньги, оставался с одними бобами, выражавшими сумму его проигрыша — отсюда и соответствующий оборот речи.

Решение числовых ребусов, предложенных на с. 8:

I — «совпадение»; II — «крепостная»; III — «уравнитель»

Интересно отметить, что десятикосточковые счеты были в повсеместном употреблении в нашей стране вплоть до появления карманных электронных калькуляторов. Произошло это на рубеже 80-х годов XX в. Первым конторским калькулятором, на котором можно было работать, вводя значения и математические действия как «на письме», стал Электроника Б3-02. Это был настольный аппарат, производивший четыре арифметических действия. Первым карманным калькулятором стал Электроника Б3-09М. Это был действительно компактный прибор, умещавшийся на ладони. Он комплектовался адаптером питания от бытовой сети и мог работать от четырех пальчиковых батареек, которые в то время были дефицитом. Стоил этот калькулятор 90 рублей, что составляло ¾ от месячной зарплаты обычного инженера. Студенты могли лишь мечтать о таком калькуляторе.

[1] Этот прием полезен и для устного деления на 9.



14. «ТРУДНОЕ ДЕЛО — ДЕЛЕНИЕ»

Зажигая привычным движением спичку, мы иной раз еще задумываемся над тем, каких трудов стоило добывание огня нашим предкам, даже не очень отдаленным. Но мало кто подозревает, что и нынешние способы выполнения арифметических действий тоже не всегда были так просты и удобны, так прямо и быстро приводили к результату. Предки наши пользовались гораздо более громоздкими и медленными приемами. И если бы школьник XX века мог перенестись за четыре, за три века назад, он поразил бы наших предков быстротой и безошибочностью своих арифметических выкладок. Молва о нем облетела бы окрестные школы и монастыри, затмив славу искуснейших счетчиков той эпохи. Со всех концов Европы приезжали бы учиться у нового великого мастера счетного дела.

Особенно сложны и трудны были в старину действия умножения и деления — последнее всего больше. Тогда не существовало еще, как теперь, одного выработанного практикой приема для каждого действия. Напротив, в ходу была одновременно дюжина различных способов умножения и деления — приемы один другого запутаннее, твердо запомнить которые не в силах был человек средних способностей. Каждый учитель счетного дела держался своего излюбленного приема, каждый «магистр деления» (были такие специалисты) изобретал собственный способ выполнения этого действия. И все эти приемы умножения — «шахматами или органчиком», «загибанием», «по частям или в разрыв», «крестиком», «решеткой», «задом наперед», «ромбом», «треугольником», «кубком или чашей», «алмазом» и прочие [1], а также все способы деления, носившие не менее затейливые наименования, соперничали друг с другом в громоздкости и сложности. Усваивались они с большим трудом и лишь после продолжительной практики. Признавалось даже, что для овладения искусством быстрого и безошибочного умножения и деления многозначных чисел нужно особое природное дарование, исключительные способности; рядовым людям премудрость эта недоступна. «Трудное дело — деление» гласила старинная латинская поговорка; оно и в самом деле было трудно, если принять во внимание утомительные методы, какими выполнялось тогда это действие. Нужды нет, что способы эти носили подчас довольно игривые названия: под веселым названием скрывался длиннейший ряд запутанных манипуляций. В XVI веке кратчайшим и удобнейшим способом считалось, например, деление «лодкой, или галерой». Знаменитый итальянский математик того времени Николай Тарталья (XVI век) в своем обширном учебнике арифметики писал о нем следующее.

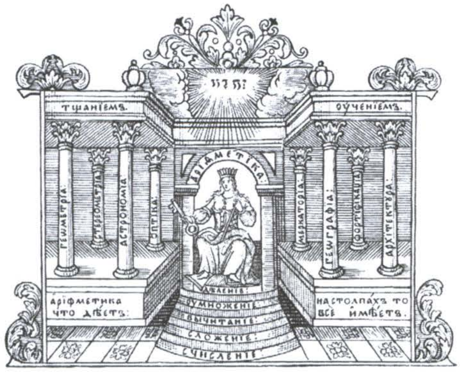
«Второй способ деления называется в Венеции [2] лодкой или галерой, вследствие некоторого сходства фигуры, получающейся при этом, потому что при делении некоторых родов чисел составляется фигура, похожая на лодку, а в других — на галеру, которая в самом деле красиво выглядит; галера получается иной раз, хорошо отделанная и снабженная всеми принадлежностями — выкладывается из чисел так, что она действительно представляется в виде галеры с кормою и носом, мачтою, парусами и веслами»…

Читается это очень весело: так и настраиваешься скользить по числовому морю на парусах арифметической галеры. Но хотя старинный математик и рекомендует этот способ как «самый изящный, самый легкий, самый верный, самый употребительный и самый общий из существующих, пригодный для деления всех

---

[1] Перечисленные приемы умножения указаны в старинной «Арифметике» Николая Тартальи. Наш современный способ умножения описывается там под названием «шахматного».

[2] Венеция и некоторые другие государства Италии в XIV–XVI столетиях вели обширную морскую торговлю, и потому в этих странах приемы счета были ради коммерческих надобностей разработаны раньше, чем в других. Лучшие труды по арифметике появились в Венеции. Многие итальянские термины коммерческой арифметики сохранились еще в настоящее время.



Заставка из «Арифметики» Магницкого (XVIII в.). По экземпляру, принадлежащему Я. И. Перельману.

возможных чисел», — я не решаюсь все же его изложить здесь из опасения, что даже терпеливый читатель закроет книгу в этом скучном месте и не станет читать дальше. Между тем, этот утомительный способ действительно был самым лучшим в ту эпоху, а у нас в России употреблялся до середины XVIII века: в «Арифметике» Леонтия Магницкого[1] он описан в числе шести предлагаемых там способов (из которых ни один не похож на современный) и особенно рекомендуется автором; на протяжении своей объемистой книги — 640 страниц огромного формата — Магницкий пользуется исключительно «способом галеры», не употребляя, впрочем, этого наименования.

В заключение покажем читателю эту числовую «галеру», воспользовавшись примером из упомянутой книги Тартальи:

```
                    4 | 6
      88            1 | 3           08
     0999            09            199
     1660            19           0860
    88876           0876         08877
    09999480000001994800000199994
    16666600000008666000000866666
Делимое –   88888800000008888000000888888  (88-частное
Делитель[2] –  99999000000000999000000099999
    99999000000000999000000000099
```

15. МУДРЫЙ ОБЫЧАЙ СТАРИНЫ

Добравшись после утомительных трудов до желанного конца арифметического действия, предки наши считали необходимым непременно проверить этот в поте лица добытый итог. Громоздкие приемы вызывали недоверие к их результатам. На длинном извилистом пути легче заблудиться, чем на прямой дороге современных приемов. Отсюда естественно возник старинный обычай проверять каждое выполняемое арифметическое действие — похвальное правило, следовать которому не мешало бы и нам.

Любимым приемом поверки был так называемый способ 9. Этот изящный прием, который полезно и теперь знать каждому, нередко описывается в современных арифметических учебниках, особенно иностранных. Правда, он почему-то мало теперь употребляется на практике, но это нисколько не умаляет его достоинств.

Поверка девяткой основана на «правиле остатков», гласящем: остаток от деления суммы на какое-либо число равен сумме остатков от деления каждого слагаемого на то же число. Точно так же остаток произведения равен произведению остатков множителей. С другой стороны, известно также[3], что при делении числа на 9 получается тот же остаток, что и при делении на 9 суммы цифр этого числа; например, 758 при делении на 9 дает 2, и то же получается в остатке от деления (7 + 5 + 8) на 9. Сопоставив оба указанных свойства, мы и приходим к приему поверки девяткой, т. е. делением на 9. Покажем на примере, в чем он состоит.

Пусть требуется проверить правильность сложения следующего столбца:

```
  38932 ....... 7
  1096 ........ 7
+4710043 ..... 1
  589106 ..... 2
 -------------------
  5339177 ..... 8
```

Составляем в уме сумму цифр каждого слагаемого, причем в получающихся попутно числах также складываем цифры (делается это в самом процессе сложения цифр), пока в конечном результате не получим однозначного числа. Результаты эти (остатки от деления на 9) записываем, как показано на примере, рядом с соответствующим слагаемым. Складываем все остатки (7 + 7 + 1 + 2 = 17; 1 + 7 = 8) — получаем 8. Такова же должна быть сумма цифр итога (5339177), если действие выполнено верно: 5 + 3 + 3 + 9 + 1 + 7 + 7 после всех упрощений равно 8.

Поверка вычитания выполняется точно так же, если принять уменьшаемое за сумму, а вычитаемое и разность — за слагаемые. Например:

```
   6913        × 1
 – 2587          4
  -----        ---
   4326          6

4 + 6 = 10;     1 + 0 = 1.
```

Не сложна и поверка умножения, как видно из следующего примера:

```
     8713          1
  ×   264        × 3
  -------        ---
    34 852         3
    52278
   17426
 ---------
 2 300 232         3
```

[1] Старинный русский учебник математики, охватывающий все ее отделы. Это — одна из тех двух книг, которые Ломоносов назвал «вратами своей учености». Подробное заглавие ее таково:

«Арифметика, сиречь наука числительная, повелением царя Петра Алексеевича в великом граде Москве типографским тиснением ради обучения мудролюбивых российских отроков и всякого чина и возраста людей на свет произведена в лето от рождества Бога слова 1703».

[2] Последние две девятки приписаны к делителю в процессе деления.

[3] Выясняется попутно при выводе признака делимости на 9 (читатель найдет вывод в моей «Хрестоматии-задачнике по начальной математике»).

Если при такой поверке умножения обнаружена будет ошибочность результата, то, чтобы определить, где именно ошибка кроется, можно поверить способом 9 каждое частное произведение отдельно; а если здесь ошибки не окажется, надо поверить еще и сложение частных произведений. Такая поверка сберегает время и труд только при умножении многозначных чисел; при малых числах проще, конечно, заново выполнить действие.

Как поверять по этому способу деление? Если у нас случай деления без остатка, то делимое рассматривается как произведение делителя на частное. В случае же деления с остатком пользуются тем, что делимое = делителю × частное + остаток. Например:

$$\text{сумма цифр:}\quad \underbrace{16\,201\,387}_{1} \;:\; \underbrace{4457}_{2} \;=\; \underbrace{3635}_{8};\quad \text{остаток } \underbrace{192}_{3}$$

$$2 \times 8 + 3 = 19;\quad 1 + 9 = 10;\quad 1 + 0 = 1.$$

Выписываю из «Арифметики» Магницкого предлагаемое там для поверки девяткой удобное расположение.

Для умножения:

$$\begin{array}{r} 365 \\ \times\ \ 24 \\ \hline 730 \\ 1460 \\ \hline 8760 \end{array} \qquad \text{«Сие}\quad \begin{array}{ccc} & 5 & \\ & | & \\ 3 & \text{—} & 3 \\ & | & \\ & 6 & \\ \hline & 30 & \end{array} \quad \text{сему согласно, убо добре есть»}$$

Для деления:

$$\begin{array}{rccc} & & \text{Частного} & \\ & & 8 & \\ & & | & \\ \text{Делимого} & 1 & \text{—} & 1 \\ & & | & \\ \text{Делителя} & & 2 & \\ \hline & & 16 & \\ \text{Остатка} & & 3 & \\ \hline \text{Всех} & & 1 & \end{array} \qquad \text{«Согласно добре делил»}$$

Подобная поверка, без сомнения, не оставляет желать лучшей в смысле быстроты и удобства. Нельзя сказать того же о ее надежности: ошибка может и ускользнуть от нее. Действительно, ведь одну и ту же сумму цифр могут иметь разные числа; не только перестановка цифр, но иной раз даже и замена одних другими остаются при такой поверке необнаруженными. Укрываются от контроля также лишние девятки и нули, потому что не влияют на сумму цифр. Всецело полагаться поэтому на такой прием поверки было бы неосмотрительно. Предки наши сознавали это и не ограничивались одною лишь поверкой помощью девятки, но производили еще дополнительную поверку — чаще всего с помощью 7. Этот прием основан на том же «правиле остатков» (стр. 15), но не так удобен, как способ 9, потому что деление на 7 приходится выполнять полностью, чтобы найти остатки (а при этом легко возможны ошибки в действиях самой поверки). Две поверки — 9 и 7 — уже являются гораздо более надежным контролем: что ускользнет от одной, будет уловлено другою. Ошибка не обнаружится лишь в том случае, если разность истинного и полученного результатов кратна числа 7 × 9 = 63. Так как подобная случайность все же возможна, то и двойная поверка не дает полной уверенности в правильности результата.

Впрочем, для обычных вычислений, где ошибаются чаще всего на 1 или на 2 единицы, можно ограничиться только поверкою 9. Дополнительная поверка 7 чересчур обременительна. Только тот контроль хорош, который не мешает работе.

16. ХОРОШО ЛИ МЫ МНОЖИМ?

Старинные способы умножения были неуклюжи и неудобны, но так ли хорош наш нынешний способ, чтобы в нем невозможны были уже никакие дальнейшие улучшения? Нет, наш способ, безусловно, не является совершенным; можно придумать еще более быстрые или еще более надежные. Из нескольких предложенных улучшений (ср. гл. 47-53) укажем пока одно, увеличивающее не быстроту выполнения действия, а его надежность. Оно состоит в том, что при многозначном множителе начинают с умножения не на последнюю, а на первую цифру множителя. Выполненное (выше на этой стр.) умножение 8713 × 264 примет при этом такой вид:

$$\begin{array}{l} \ 8713 \\ \times 264 \\ \hline 17426 \\ 52278 \\ 34852 \\ \hline 2300232 \end{array}$$

Преимущество подобного расположения в том, что цифры частных произведений, от которых зависят первые наиболее ответственные цифры результата, получаются в начале действия, когда внимание еще не утомлено и, следовательно, вероятность сделать ошибку наименьшая (Кроме того, способ этот упрощает применение так называемого сокращенного умножения, о котором мы здесь распространяться не можем.).

17. РУССКИЙ СПОСОБ УМНОЖЕНИЯ

Вы не можете выполнить умножения многозначных чисел, — хотя бы даже двузначных — если не помните наизусть всех результатов умножения однозначных чисел, т. е. того, что называется таблицей умножения. В старинной «Арифметике» Магницкого, о которой мы раньше упоминали, необходимость твердого знания таблицы умножения воспета в таких — надо сознаться, чуждых для современного слуха — стихах:

Аще кто не твердит	И во всей науки,
таблицы и гордит,	несвобод от муки,
Не может познати	Колико не учит
числом что множати	туне ся удручит

И в пользу не будет
аще ю забудет.

Автор этих стихов, очевидно, не знал или упустил из виду, что существует способ перемножать числа и без знания таблицы умножения. Способ этот, не похожий на наши школьные приемы, употребителен в обиходе великорусских крестьян и унаследован ими от глубокой древности. Сущность его в том, что умножение любых двух чисел сводится к ряду последовательных делений одного числа пополам при одновременном удвоении другого числа.

Вот пример:

$$32 \times 13$$
$$16 \times 26$$
$$8 \times 52$$
$$4 \times 104$$
$$2 \times 208$$
$$1 \times 416$$

Деление пополам продолжают до тех пор, пока в частном не получится 1, параллельно удваивая другое число. Последнее удвоенное число и дает искомый результат. Нетрудно понять, на чем этот способ основан: произведение не изменяется, если один множитель уменьшить вдвое, а другой вдвое же увеличить. Ясно поэтому, что в результате многократного повторения этой операции получается искомое произведение:

$$32 \times 13 = 1 \times 416.$$

Задача № 8

Однако, как поступать, если при этом приходится делить пополам число нечетное?

Народный способ легко выходит из этого затруднения. Надо — гласит правило — в случае нечетного числа откинуть единицу и делить остаток пополам; но зато к последнему числу правого столбца нужно будет прибавить все те числа этого столбца, которые стоят против нечетных чисел левого столбца: сумма и будет искомым произведением. Практически это делают так, что все строки с четными левыми числами зачеркивают; остаются только те, которые содержат налево нечетное число.

Приведем пример (звездочка указывает, что данную строку надо зачеркнуть):

$$19 \times 17$$
$$9 \times 34$$
$$4 \times 68^*$$
$$2 \times 136^*$$
$$1 \times 272$$

Сложив не зачеркнутые числа, получаем вполне правильный результат:

$$17 + 34 + 272 = 323.$$

На чем основан этот прием?

Решение

Обоснованность этого приема станет ясна, если принять во внимание, что

$$19 \times 17 = (18 + 1)\ 17 = 18 \times 17 + 17$$
$$9 \times 34 = (8 + 1)\ 34 = 8 \times 34 + 34, \text{ и т. п.}$$

Ясно, что числа 17, 34 и т. п., утрачиваемые при делении нечетного числа пополам, необходимо прибавить к результату последнего умножения, чтобы получить произведение.

Нельзя, как видите, отказать в практичности этому народному приему умножения, который один научный английский журнал («Knowledge» — Знание) окрестил незадолго до мировой войны «русским крестьянским» способом.

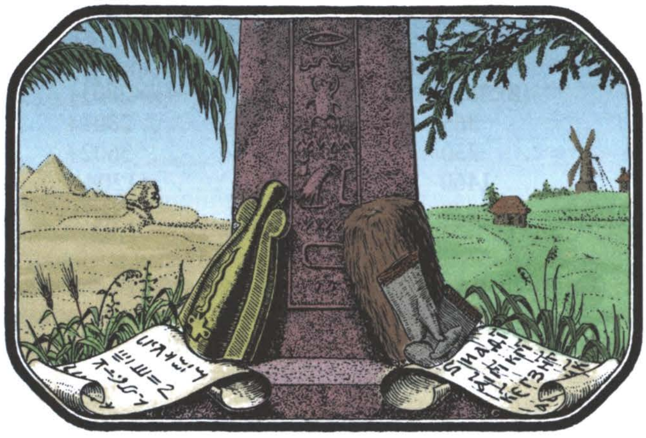
АРИФМЕТИЧЕСКИЕ КУРЬЕЗЫ

$$95 + 1 + \tfrac{6}{7} + \tfrac{4}{28} + 3 = 100$$

$$98 + 1 + \tfrac{3}{6} + \tfrac{27}{54} = 100$$

Подыщите еще и другие способы составления числа 100 помощью девяти значащих цифр, употребленных по одному разу.

(См. с. 18)



18. ИЗ СТРАНЫ ПИРАМИД

Весьма вероятно, что сейчас описанный способ дошел до нас из глубочайшей древности и из отдаленной страны — из Египта. Мы мало знаем, как производили действия обитатели древней страны пирамид. Но сохранился любопытный памятник — папирус, на котором записаны арифметические упражнения ученика одной из землемерных школ Древнего Египта; это так называемый папирус Ринда, относящийся ко времени между 2000 и 1700 гг. до нашей эры[1] и представляющий собою копию еще более древней рукописи, переписанную неким Аамесом. Писец[2] Аамес, найдя «ученическую тетрадку» этой отдаленнейшей эпохи, тщательно переписал все арифметические упражнения будущего землемера, — вместе с их ошибками и исправлениями учителя, — и дал своему списку торжественное заглавие, которое дошло до нас в следующем неполном виде:

«Наставление, как достигнуть знания всех темных вещей… всех тайн, сокрытых в вещах.

---

[1] Папирус был разыскан английским египтологом Генри Риндом. Он оказался заключенным в металлический футляр. В развернутом виде имеет 20 метров длины, при 30 сантиметрах ширины. Хранится в Британском музее, в Лондоне.

[2] Звание «писец» принадлежало третьему классу египетских жрецов; в заведывании их находилось «все относившееся к строительной части храма и к его земельной собственности». Математические, астрономические и географические знания составляли их главную специальность (В. Бобынин).

«Составлено при царе Верхнего и Нижнего Египта Ра-а-усе, дающем жизнь, по образцу древних сочинений времен царя Ра-ен-мата писцом Аамесом».

В этом интересном документе, насчитывающем за собою около 40 веков и свидетельствующем о еще более глубокой древности, мы находим четыре примера умножения, выполненные по способу, живо напоминающему наш русский народный способ. Вот эти примеры (точки впереди чисел обозначают число единиц множителя; знаком + мы отметили числа, подлежащие сложению):

(8×8)	(9×9)
. 8	. 9+
. . 16	. . 18
. . . . 32	 36
: : : : 64	: : : : 72+
	Итог 81
(8×365)	(7×2801)
. 365	. 2801+
. . 730	. . 5602+
. . . . 1460	. . . . 11204+
: : : : 2920	Итог . . . 19607

Вы видите из этих примеров, что еще за тысячелетия до нас египтяне пользовались приемом умножения, довольно сходным с нашим крестьянским, и что неведомыми путями он как бы перекочевал из древней страны пирамид в современную русскую деревню. Если бы обитателю земли фараонов предложили перемножить, например, 19 × 17, он произвел бы это действие следующим образом: написал бы ряд последовательных

1	17+
2	34+
4	68
8	136
16	272+

удвоений числа 17, и затем сложил бы те числа, которые отмечены здесь, знаком +, т. е. 17 + 34 + 272. Он получил бы, конечно, вполне правильный результат:

$$17 + (2 \times 17) + (16 \times 17) = 19 \times 17.$$

Легко увидеть, что подобный прием по существу весьма близок к нашему «крестьянскому» (замена умножения рядом последовательных удвоений). Трудно сказать, у одних ли русских крестьян сохранился в настоящее время такой древний способ умножения; английские авторы называют его именно «русским крестьянским способом»; в Германии простой народ кое-где хотя и пользуется им, но также называет его «русским».

Чрезвычайно интересно было бы получить от читателей сведения о том, применяется ли в их местности этот древний способ умножения, имеющий за собой такое долгое и оригинальное прошлое. Следовало бы вообще с большим вниманием относиться к народной математике: вникать в употребляемые народом приемы счета и измерений, собирать и записывать эти памятники народного математического творчества, дошедшие до нашего времени из глубин седой старины. На это уже давно указывал историк математики В. В. Бобынин, предложивший даже краткую программу собирания памятников народной математики. Нелишним будет привести здесь составленный им перечень того, что именно следует собирать и записывать.

1. Счисление и счет. 2. Приемы меры и веса. 3. Геометрические сведения и их выражение в постройках, нарядах и украшениях. 4. Способы межевания. 5. Народные задачи. 6. Пословицы, загадки и вообще произведения народной словесности, имеющие отношение к математическим знаниям. 7. Памятники древней народной математики, находящиеся в рукописях, музеях, коллекциях и т. д. или находимые при раскопках курганов, могил, городищ и пр.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ КУРЬЕЗЫ

(См. с. 17)

$$91 + \frac{5823}{647} = 100$$

$$94 + \frac{1578}{263} = 100$$

$$91 + \frac{1428}{357} = 100$$

Итальянский математик Никколо Тарталья родился в 1499 г. в городе Брешиа провинции Ломбардия в семье почтальона. Его настоящая фамилия Фонтана (Fontana), а прозвище Тарталья (Заика) Никколо получил потому, что с трудом мог разговаривать из-за полученного увечья во время войны Италии с Францией.

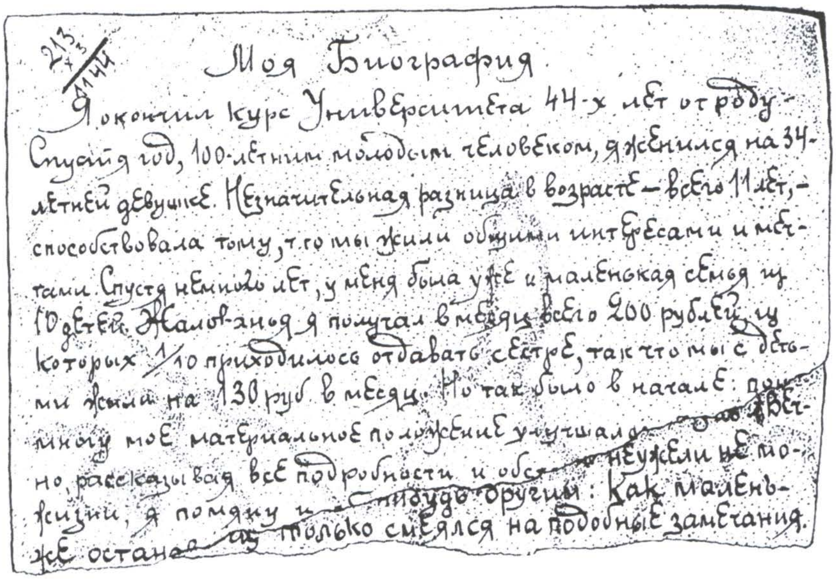
Его родители не могли платить за обучение и Никколо, будучи одаренным подростком, самостоятельно, сначала выучился грамоте, а затем пристрастился к математике. Это позволило ему со временем сдать квалификационный экзамен и стать преподавателем математики в университете. Так он стал довольно известным ученым своего времени.

Крупным событием в научной жизни Тартальи стал его вызов на математическое соревнование с учеником известного профессора математики из Болоньи Сципиона дель Ферро. Это состязание Никкола блестяще выиграл, что упрочило его позицию как ученого.

Кроме этого Тарталья нашел способ решения кубических уравнений. Однако этот факт регулярно подвергается сомнению, поскольку первенство открытия этого метода закрепилось за другим итальянским математиком Джероламо Кардано, который стал его первым публикатором.

Кроме математики Тарталья занимался вопросами практической механики, баллистики и топографии.

Умер ученый 13 декабря 1557 г. в Венеции, оставив после себя научные труды и плеяду учеников.


Моя Биография
Я окончил курс Университета 44-х лет от роду.
Спустя год, 100-летним молодым человеком, я женился на 34-
летней девушке. Незначительная разница в возрасте — всего 11 лет, —
способствовала тому, что мы жили общими интересами и меч-
тами. Спустя немного лет, у меня была уже и маленькая семья из
10 детей. Жалованья я получал в месяц всего 200 рублей, из
которых 1/10 приходилось отдавать сестре, так что мы с дет-
ми жили на 130 руб. в месяц. Но так было в начале.
мое материальное положение улучшалось
но, рассказывая все подробности и обст неужели не мо-
я помяну Как малень-
же остан только смеялся на подобные замечания.

19. ЗАГАДОЧНАЯ АВТОБИОГРАФИЯ

Эту главу позволю себе начать с задачи, которую я придумал когда-то для читателей одного распространенного тогда журнала[1] в качестве «задачи на премию».

Вот она.

Задача № 9

«Загадочная автобиография»

В бумагах одного чудака-математика найдена была его автобиография. Она начиналась следующими строками:

«*Я окончил курс университета 44 лет от роду. Спустя год, 100-летним молодым человеком, я женился на 34-летней девушке. Незначительная разница в возрасте — всего 11 лет — способствовала тому, что мы жили общими интересами и мечтами. Спустя немного лет, у меня была уже и маленькая семья из 10 детей. Жалованья я получал в месяц всего 200 рублей, из которых $\frac{1}{10}$ приходилось отдавать сестре, так что мы с детьми жили на 130 руб. в месяц*» и т. д.

Чем объяснить странные противоречия в числах этого отрывка?

Решение

Решение задачи подсказывается названием этой главы: недесятичная система счисления — вот единственная причина кажущейся противоречивости приведенных чисел. Напав на эту мысль, нетрудно догадаться, в какой именно системе счисления изображены числа чудаком-математиком. Секрет выдается фразой: «спустя год (после 44-летнего возраста), 100-летним молодым человеком…» Если от прибавления одной единицы число 44 преображается в 100, то, значит, цифра 4 — наибольшая в этой системе (как 9 — в десятичной), а следовательно, основанием системы является 5. Чудаку-математику пришла фантазия написать все числа своей биографии по пятеричной системе счисления, т. е. по такой, в которой единица высшего разряда не в 10, а в 5 раз больше единицы низшего; на первом справа месте стоят в ней простые единицы (не свыше четырех), на втором — не десятки, а пятерки; на третьем не сотни, а «двадцатипятерки» и т. д. Поэтому число, изображенное в тексте записки «44», означает не $4 \times 10 + 4$, как в десятичной системе, а $4 \times 5 + 4$, т. е. двадцать четыре. Точно так же число «100» в автобиографии означает одну единицу третьего разряда в пятеричной системе, т. е. 25. Остальные числа записки соответственно означают:

$$«\ 34\ » = 3 \times 5 + 4 = 19$$
$$«\ 11\ » = 5 + 1 = 6$$
$$«\ 200\ » = 2 \times 25 = 50$$
$$«\ 10\ » = 5$$
$$«\ \tfrac{1}{10}\ » = \tfrac{1}{5}$$
$$«\ 130\ » = 25 + 3 \times 5 = 40$$

Восстановив истинный смысл чисел записки, мы видим, что в ней никаких противоречий нет.

«*Я окончил курс 24 лет от роду. Спустя год, 25-летним молодым человеком, я женился на 19-летней девушке. Незначительная разница в возрасте — всего 6 лет — способствовала тому, что мы жили общими интересами и мечтами. Спустя немного лет, у меня была уже и маленькая семья из 5 детей. Жалованья я получал 50 рублей, из которых $\frac{1}{5}$ приходилось отдавать сестре, так что мы с детьми жили на 40 рублей*».

Трудно ли изображать числа в других системах счисления? Нисколько. Положим, вы желаете число 119 изобразить в пятеричной системе. Делите 119 на 5, чтобы узнать, сколько в нем единиц первого разряда:

$$119 : 5 = 23, \text{ остаток } 4.$$

Значит, число простых единиц будет 4. Далее, 23 пятерки не могут стоять все во втором разряде, так как высшая цифра в пятеричной системе — 4, и больше 4 единиц ни в одном разряде быть не должно. Делим поэтому 23 на 5:

$$23 : 5 = 4, \text{ остаток } 3.$$

Это показывает, что во втором разряде («пятерок») будет цифра 3, а в третьем («двадцати-пятерок») — 4.

[1] «Природа и Люди» (потом она была перепечатана в сборнике Е. И. Игнатьева «В царстве смекалки»).

Итак, 119 = 4 × 25 + 3 × 5 + 4, или в пятеричной системе «434».

Сделанные действия для удобства располагают так:

119 | 5
4 | 23 | 5
3 | *4*

Курсивные цифры (при письме можно их подчеркивать) выписывают справа налево, и сразу получают искомое изображение числа в иной системе.

Приведем еще примеры.

Задача № 10

Изобразить 47 в третичной системе.

Решение

47 | 3
2 | 15 | 3
0 | *5*

Ответ: «502». Поверка: 5 × 9 + 0 × 3 + 2 = 47.

Задача № 11

Число 200 изобразить в семеричной системе.

Решение

200 | 7
14 | 28 | 7
60 *0* | *4*
4

Ответ: «404». Поверка: 4 × 49 + 0 × 7 + 4 = 200.

Задача № 12

Число 163 изобразить в двенадцатиричной системе:

Решение

163 | 12
43 | 13 12
7 *1* | *1*

Ответ: «117». Поверка: 1 × 144 + 1 × 12 + 7 = 163.

Думаем, что теперь читатель не затруднится изобразить любое число в какой угодно системе счисления. Единственная помеха может возникнуть лишь вследствие того, что в некоторых случаях не будет доставать изображений для цифр. В самом деле: при изображении числа в системах с основанием более десяти (например, в двенадцатеричной) может явиться надобность в цифрах «десять» и «одиннадцать». Из этого затруднения нетрудно выйти, избрав для этих новых цифр какие-нибудь условные знаки или буквы, — хотя бы, например, буквы К и Л, стоящие в русском алфавите на 10-м и 11-м месте [1]. Так, число 1579 в двенадцатеричной системе изобразится следующим образом:

1579 | 12
12 131 | 12 «(10)(11)7», или КЛ 7
37 *11* | *10*
19
7

[1] В настоящее время двенадцатеричная система практически не используется, но огромное распространение в связи с появлением компьютеров получили двоичная, восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления. В качестве цифр шестнадцатеричной системы используются цифры от 0 до 9 и латинские буквы от A до F. (*Прим. ред.*)

Поверка: 10 × 144 + 11 × 12 + 7 = 1579.

Задача № 13

Выразить число 1926 в двенадцатеричной системе. (Ответ 1146).

Задача № 14

Выразить число 273 в двадцатеричной системе [1].

20. ПРОСТЕЙШАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Вообще нетрудно сообразить, что в каждой системе высшая цифра, какая может понадобиться, равна основанию этой системы без единицы. Например, в 10-ричной системе высшая цифра 9, в 6-ричной — 5, в троичной — 2, в 15-ричной — 14, и т. д.

Самая простая система счисления, конечно, та, для которой требуется меньше всего цифр. В десятичной системе нужны 10 цифр (считая и 0), в пятеричной — 5 цифр, в троичной — 3 цифры (1, 2 и 0), в двоичной — только 2 цифры (1 и 0). Существует ли «единичная» система? Конечно: это система, в которой единицы высшего разряда в один раз больше единицы низшего, т. е. равны ей; другими словами, «единичной» можно назвать такую систему, в которой единицы всех разрядов имеют одинаковое значение. Это самая примитивная «система»; ею пользуется первобытный человек, делая на дереве зарубки по числу сосчитываемых предметов. Но между нею и всеми другими системами счета есть громадная разница: в ней нет главной особенности нашей нумерации — так называемого поместного значения цифр. Действительно: в «единичной» системе знак, стоящий на 3-м или на 5-м месте, имеет то же значение, что и стоящий на первом месте. Между тем даже в двоичной системе единица на 3-м месте (справа) уже в 4 раза (2 × 2) больше, чем на 1-м, а на 5-м — в 16 раз больше (2 × 2 × 2 × 2). Поэтому система «единичная» дает нам очень мало выгоды, так как для изображения какого-нибудь числа по этой системе нужно ровно столько же знаков, сколько было сосчитано предметов: чтобы записать сто предметов, нужно сто знаков, в двоичной же — только семь («1100100»), а в пятеричной — всего три («400»).

Вот почему «единичную» систему едва ли можно назвать «системой»; по крайней мере, ее нельзя поставить рядом с остальными, так как она принципиально от них отличается, не давая никакой экономии в изображении чисел. Если же ее откинуть, то простейшей системой счисления нужно признать систему двоичную, в которой употребляются всего две цифры: 1 и 0. При помощи 1 и 0 можно изобразить все бесконечное множество чисел! На практике эта система мало удобна — получаются слишком длинные числа [2]; но теоретически она имеет все права считаться простейшей. Она обладает некоторыми любопытными особенностями, присущими только ей одной [3]; особенностями этими, между прочим, можно воспользоваться для выполнения целого ряда эффектных математических фокусов, о которых мы скоро побеседуем подробно в главе «Фокусы без обмана».

[1] Ответ НН, где буквою Н обозначена «цифра 13».

[2] Зато, как увидим далее, для такой системы до крайности упрощаются таблица сложения и таблица умножения.

[3] Благодаря реализации в цифровых электронных схемах, двоичная система используется во всех компьютерах и вычислительных электронных устройствах. (*Прим. ред.*).

21. НЕОБЫЧАЙНАЯ АРИФМЕТИКА

Задача № 15

К арифметическим действиям мы привыкли настолько, что выполняем их автоматически, почти не думая о том, что мы делаем. Но те же действия потребуют от нас немалого напряжения, если мы пожелаем применить их к числам, написанным не по десятичной системе. Попробуйте, например, выполнить сложение следующих двух чисел, написанных по пятеричной системе:

«4203»
+ «2132» (по пятеричной системе)

Решение

Складываем по разрядам, начиная с единиц, т. е. справа: 3 + 2 равно 5; но мы не можем записать 5, потому что такой цифры в пятеричной системе не существует: 5 есть уже единица высшего разряда. Значит, в сумме вовсе нет единиц; пишем 0, а 5, т. е 1 следующего разряда, удерживаем в уме. Далее, 0 + 3 = 3, да еще 1, удержанная в уме, — всего 4 единицы второго разряда. В третьем разряде получаем 2 + 1 = 3. В четвертом 4 + 2 = 6, т. е. 5 + 1; пишем 1, а 5, т. е. 1 высшего разряда, относим далее влево. Искомая сумма = 11 340.

«4203»
+ «2132» (в пятеричной системе)
«11 340»

Предоставляем читателю проверить это сложение, предварительно переведя изображенные в кавычках числа в 10-ричную систему и выполнив то же действие.

Точно так же выполняются и другие действия. Для упражнения приводим далее ряд примеров, число которых читатель, при желании, может увеличить самостоятельно:

По пятеричной системе.

Задача № 16: «2143» − «334»

Задача № 17: «213» × «3»

Задача № 18: «42» × «31»

По троичной системе.

Задача № 19: «143» + «334» + «334»

Задача № 20: «122» × «20»

Задача № 21 и № 22: «220»: 2 = «201»:12 =

Ответы:

№ 16 — «1304». № 17 — «1144». № 18 — «2402». № 19 — «2010». № 20 — «10210». № 21 — «110». № 22 — «10», остаток «11».

При выполнении этих действий мы сначала мысленно изображаем написанные числа в привычной нам десятичной системе, а получив результат, снова изображаем его в требуемой недесятичной системе. Но можно поступать и иначе: составить «таблицу сложения» и «таблицу умножения» в тех же системах, в которых даны нам числа, и пользоваться ими непосредственно. Например, таблица сложения в пятеричной системе такова:

0	1	2	3	4
1	2	3	4	10
2	3	4	10	11
3	4	10	11	12
4	10	11	12	13

С помощью этой таблички мы могли бы сложить числа «4203» и «2132», написанные в пятеричной системе, гораздо менее напрягая внимание, чем при способе, примененном раньше.

Упрощается, как легко понять, также выполнение вычитания.

Задача № 23

Составим и таблицу умножения («Пифагорову») для пятеричной системы

Решение

1	2	3	4
2	4	11	13
3	11	14	22
4	13	22	31

Имея эту табличку перед глазами, вы опять-таки можете облегчить себе труд умножения (и деления) чисел в пятеричной системе, — как легко убедиться, применив ее к приведенным выше примерам. Например,

По пятеричной системе.
× «213»
«3»
«1144»

при умножении рассуждаем так: трижды три «14» (из таблицы); 4 пишем, 1 — в уме. Один на 3 дает 3, да еще один — пишем 4. Дважды три = «11»; 1 — пишем, 1 — переносим влево. Получаем в результате «1144 ».

Чем меньше основание системы, тем меньше и соответствующие таблицы сложения и умножения. Например, для троичной системы обе таблицы таковы:

Таблица сложения для троичной системы.

0	1	2
1	2	10
2	10	11

Пифагорова таблица сложения для троичной системы.

1	2
2	11

Их можно было бы сразу же запомнить и пользоваться ими для выполнения действий. Самые маленькие таблицы сложения и вычитания получаются для двоичной системы:

Таблица сложения для двоичной системы.

0	1
1	10

Пифагорова таблица умножения для двоичной системы. $\boxed{1 \times 1 = 1}$

При помощи таких простых «таблиц» можно выполнять в двоичной системе все четыре действия! Умножения в этой системе, в сущности, как бы и вовсе нет: ведь умножить на единицу значит оставить число без изменения; умножение же на «10 », «100», «1000» и т. п. сводится к простому приписыванию справа соответствующего числа нулей. Что же касается сложения, то для выполнения его нужно помнить только одно — что в двоичной системе 1 + 1 = 10. Не правда ли, мы с полным основанием назвали раньше двоичную систему самой простой из всех возможных? Длина чисел этой своеобразной арифметики искупается простотой выполнения над ними всех арифметических действий.

Пусть требуется, например, умножить

В двоичной системе.

$$
\begin{array}{r}
\times \quad «1001011101» \\
«100101» \\
\hline
«1001011101» \\
+ \quad «1001011101» \quad\; \\
«1001011101» \quad\quad\quad\quad\quad \\
\hline
«101011101110001»
\end{array}
$$

Выполнение действия сводится только к переписыванию данных чисел в надлежащем расположении: это требует несравненно меньше умственных усилий, чем умножение тех же чисел в десятичной системе (605 × 37 = 22385). Если бы у нас была принята двоичная система, изучение письменного счисления требовало бы наименьшего напряжения мысли (зато — наибольшего количества бумаги и чернил). Однако в устном счете двоичная арифметика по удобству выполнения действий значительно уступает нашей десятичной.

22. ЧЕТ ИЛИ НЕЧЕТ?

Задача № 24

Не видя числа, трудно, конечно, угадать, какое оно — четное или нечетное. Но не думайте, что вы всегда сможете сказать это, едва увидите задаваемое число. Скажите, например: четное или нечетное число 16?

Если вам известно, что оно написано по десятичной системе, то, без сомнения, можно утверждать, что число это — четное. Но когда оно написано по какой-либо другой системе — можно ли быть уверенным, что оно изображает непременно четное число?

Решение

Оказывается, нет. Если основание, например, семь, то «16» означает 7 + 6 = 13, число нечетное. То же будет и для всякого нечетного основания (потому что всякое нечетное число + 6 = нечетному числу).

Отсюда вывод, что знакомый нам признак делимости на два (последняя цифра четная) безусловно пригоден только для 10-тичной системы счисления, для других же — не всегда. А именно, он верен только для систем счисления с четным основанием: 6-ричной, 8-ричной и т. п. Каков же признак делимости на 2 для систем с нечетным основанием? Достаточно краткого размышления, чтобы установить его: сумма цифр должна быть четной. Например, число «136» четное во всякой системе счисления, даже и с нечетным основанием; действительно, в последнем случае имеем: нечетные числа [1] + нечетное число + четное = четному числу.

С такою же осторожностью надо отнестись к задаче: всегда ли число 25 делится на 5? В 7-ричной или в 8-ричной системах изображенное так число на 5 не делится (потому что оно равно девятнадцати или двадцати одному). Точно так же общеизвестный признак делимости на 9 (сумма цифр…) правилен только для десятичной системы. Напротив, в пятеричной системе тот же признак применим для делимости на 4, а, например, — в семеричной — на 6. Так, число «323» в пятеричной системе делится на 4, потому что 3 + 2 + 3 = 8, а число, «51» в семеричной — на 6 (легко убедиться, переведя числа в десятичную систему: получим соответственно 88 и 36). Почему это так, читатель сам сможет сообразить, если вникнет хорошенько в вывод признака делимости на 9 и приложит те же рассуждения, соответственно измененные, например, к семеричной системе для вывода признака делимости на 6.

Труднее доказать чисто арифметическим путем справедливость следующих положений:

$$
\left.\begin{array}{l}
121 : 11 = 11 \\
144 : 12 = 12 \\
21 \times 21 = 441
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
\text{во всех системах счисления} \\
\text{(где имеются соответствующие} \\
\text{цифры)}
\end{array}
$$

Знакомые с основами алгебры легко найдут основание, объясняющее свойство этих равенств. Остальные читатели могут проверить их рядом проб для разных систем счисления.

23. ДРОБИ БЕЗ ЗНАМЕНАТЕЛЯ

Мы привыкли к тому, что без знаменателя пишутся только десятичные дроби. Поэтому на первый взгляд кажется, что написать прямо без знаменателя дробь $^2/_7$ или $^1/_3$ нельзя. Дело представится нам, однако, иначе, если вспомним, что дроби без знаменателя возможны и в других системах счисления. Что, например, означает дробь «0,4 » в пятеричной системе? Конечно, $^4/_5$. Дробь «1,2» в семеричной системе означает $^{12}/_7$. А что означает в той же семеричной системе дробь «0,33»? Здесь результат сложнее: $^3/_7 + ^3/_{49} = ^{24}/_{49}$.

Задача № 25

Рассмотрим еще несколько не десятичных дробей без знаменателя. Чему равны:

a) «2,121» в троичной системе?
b) «1,011» в двоичной системе?
c) «3,431» в пятеричной системе?
d) «2,(5)» в семеричной системе?

Ответы:

a) 2 + 1/3 + 2/9 + 1/27 = 2 16/27;
b) 1 + 1/4 + 1/8 = 1 3/8;
c) 3 + 1/5 + 3/25 + 1/125 = 3 116/125;
d) 2 + 5/7 + 4/49 + 5/343 + = 2 5/6.

[1] Нечетное число, умноженное на себя (т. е. на нечетное) всегда дает нечетное число (например, 7 × 7 = 49, 11 × 11 = 121 и т. п.)

В правильности последнего равенства читатель легко может убедиться, если попробует применить к данному случаю, с соответствующим видоизменением, рассуждения, относящиеся к превращению десятичных периодических дробей в простые.

В заключение рассмотрим еще две задачи особого рода:

Задача № 26

По какой системе счисления выполнено следующее сложение:

$$
\begin{array}{r}
756 \\
307 \\
+\ 2456 \\
\underline{24} \\
3767
\end{array}
$$

Задача № 27

По какой системе счисления выполнено деление:

$$
\begin{array}{l}
4415400 : 4532 = 543 \\
\underline{40344} \\
\ \ 34100 \\
\ \ \underline{31412} \\
\ \ \ \ 22440 \\
\ \ \ \ \underline{22440} \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 0
\end{array}
$$

Ответы: №26 — по восьмеричной;
№27 — по шестеричной.

Задача № 28

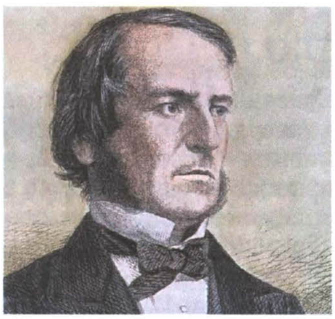
Напишите число сто тринадцать во всех системах счисления до девятеричной включительно.

(См. с. 32)

Задача № 29

Чему равно число «123», если считать его написанным во всех системах счисления до девятеричной включительно. Возможно ли, что оно написано по двоичной системе? А по троичной? Если оно написано по пятеричной системе, то можете ли вы узнать, не переписывая его по десятичной системе, делится ли оно без остатка на два? Если оно написано по семеричной системе, то делится ли оно без остатка на шесть? Если оно написано по девятеричной системе, то делится ли оно без остатка на четыре?

(См. с. 40)



Джордж Буль (1815—1864)

Различные системы счисления нашли свое применение в повседневной жизни человека. Казалось, что достаточно лишь десятичной, – остальные системы явно лишние. Однако это далеко не так. Основным «потребителем» систем счета с разными основаниями оказались математики, занятые программированием вычислительных машин, или как мы их сегодня называем, компьютеров.

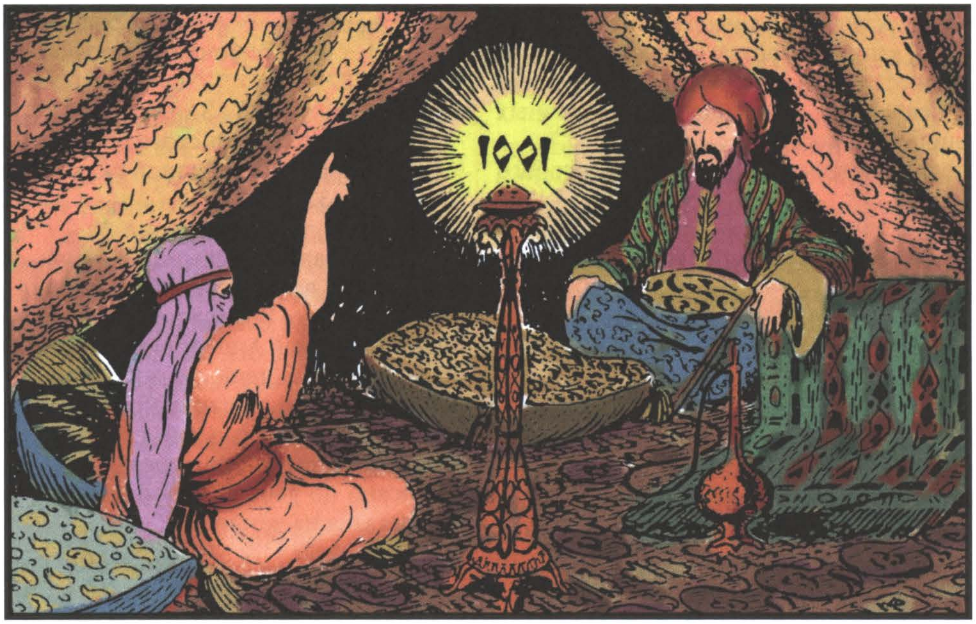
На самом деле, обоснование вычислений с помощью машины было сформулировано довольно давно. Это сделал английский математик Джордж Буль (1815—1864), соединивший своим математическим талантом математику и логику. Он создал так называемую булеву алгебру, заслуженно получившую его имя. В труде под названием «Исследование законов мышления, на которых основываются математические теории логики и вероятностей» (1854) Буль обосновал связь математики и логики. Он доказал, что логические высказывания также могут обрабатываться математическими методами, что позволяло делать логические «вычисления». То есть получить из некоторого числа высказываний логические выводы путем формальных манипуляций. В основе этой алгебры лежит всего два значения, которые называют «ложь» и «истина». Взаимные их комбинации всегда дают только два результата – те же «ложь» и «истина». Других состояний в булевой алгебре не существует.

Оказалось, что булева алгебра нашла многочисленные применения в устройствах, работающих на принципе логики, когда из сочетания каких-либо процессов, должны получаться вполне определенные результаты.

В частности такой подход применяется в анализе и синтезе релейных электрических схем. Поскольку релейные схемы характеризуются тем, что входные параметры, например тока или напряжения, приводят к скачкообразному изменению выходных параметров. То есть, различные манипуляции с управляющими выключателями таких схем приводят к включению или выключению реле, которые запускают или останавливают определенные процессы. Например, включаются или выключаются электродвигатели, которые могут приводить в движение насосы, выключатели, клапаны и еще неограниченное количество технических устройств всевозможного регулирования. Таким образом могут быть решены вопросы управления работой и защиты сложных технических схем управления большими и сложными производственными процессами. Так были заложены начала автоматики, которая создала современное высокотехнологичное и роботизированное производство.

Но не менее важную роль булева алгебра сыграла в развитии электронно-вычислительных машин. Те же самые принципы управления результатами с помощью набора всевозможных входных воздействий, лежат в основе работы современных компьютеров, которые «понимают» те же два значения булевой алгебры. В приложении к вычислениям, они названы «ноль» и «единица». То есть отсутствие электрического сигнала и его присутствие. Таким образом двоичная система счисления прочно завоевала себе место в программировании вычислительных машин.

Однако, она оказалась не слишком удобной для программистов, которые нашли ей замену в виде восьмиричной и шестнадцатиричной системах. Они позволяют проще читать и составлять программный код, а следовательно позволяют быстрее и с меньшими затратами достигать цели – создавать конкретные приложения, востребованные современными технологическими процессами.



24. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ КУНСТКАМЕРА

В мире чисел, как и в мире живых существ, встречаются подлинные диковинки, редкие экземпляры, обладающие исключительными свойствами. Из таких необыкновенных чисел можно было бы составить своего рода

музей числовых редкостей, настоящую «арифметическую кунсткамеру». В ее витринах нашли бы себе место не только числовые исполины, о которых мы побеседуем еще в особой главе, но и числа сравнительно небольшие, зато выделяющиеся из ряда других какими-либо необычайными свойствами. Некоторые из них уже по внешности привлекают к себе внимание; другие открывают свои диковинные особенности лишь при более близком знакомстве.

Приглашаю читателя пройтись со мною по галерее таких числовых диковинок и познакомиться с некоторыми из них.

Пройдем, не останавливаясь, мимо первых витрин, заключающих числа, свойства которых нам уже знакомы.

Мы знаем уже, почему попало в галерею диковинок число 2: не потому, что оно первое четное число, а потому, что оно — основание самой удобной системы счисления (см. с. 20).

Не удивимся мы, встретив тут 5 — одно из наших любимейших чисел, играющее важную роль при всяких «округлениях», в том числе и при округлении цен, которое обходится нам так дорого (см. с. 9). Не будет неожиданностью для нас найти здесь и число 9 — конечно, не как «символ постоянства» [1], а как число, облегчающее нам поверку арифметических действий (см. с. 15). Но вот витрина, за стеклом которой мы видим

25. ЧИСЛО 12

Чем оно замечательно? Конечно, это число месяцев в году и число единиц в дюжине. Но что, в сущности, особенного в дюжине? Не многим известно, что 12 — старинный и едва не победивший соперник числа 10 в борьбе за почетный пост основания системы счисления. Культурнейший народ Древнего Востока — вавилоняне и их предшественники, еще более древние первонасельники Двуречья — вели счет в 12-ричной системе счисления. И если бы не пересилившее влияние Индии, подарившей нам 10-тичную систему, мы, весьма вероятно, унаследовали бы от Вавилона 12-ричную систему. Кое в чем мы и до сих пор платим дань этой системе, несмотря на победу 10-тичной. Наше пристрастие

к дюжинам и гроссам, наше деление суток на две дюжины часов, деление часа — на 5 дюжин минут, деление минуты — на столько же секунд, деление круга на 30 дюжин градусов, наконец, деление фута на 12 дюймов и многие другие пережитки глубокой древности — разве не свидетельствует все это о том, как велико еще влияние этой древней системы?

Хорошо ли, что в борьбе между дюжиной и десяткой победила последняя? Конечно, сильными союзницами десятки были и остаются наши собственные руки с десятью пальцами — живые счетные машины. Но если бы не это, то следовало бы безусловно отдать предпочтение 12 перед 10. Гораздо удобнее производить рас-

[1] Древние (последователи Пифагора) считали 9 символом постоянства, так как все числа, кратные 9, сохраняют одну и ту же сумму цифр — 9.

четы по 12-ричной системе, нежели по 10-тичной. Причина та, что число 10 делится без остатка только на 2 и на 5, между тем как 12 делится и на 2, и на 3, и на 4, и на 6. У 10 всего два делителя, у 12 — четыре.

Преимущества 12-ричной системы станут вам яснее, если вы примете в соображение, что в 12-ричной системе число, оканчивающееся нулем, кратно и 2, и 3, и 4, и 6: подумайте, как удобно дробить число, когда и 1/2, и 1/3, и 1/4, и 1/6 его должны быть целыми числами! А если выраженное в 12-ричной системе число оканчивается двумя нулями, то оно должно делиться без остатка на 144, а следовательно, и на все множители 144, т. е. на следующий длинный ряд чисел:

2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144.

Четырнадцать делителей — вместо тех восьми, которые имеют числа, написанные в 10-тичной системе, если оканчиваются двумя нулями (2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 и 100). В нашей системе только дроби вида $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_{20}$ и т.д. превращаются в конечные десятичные; в 12-ричной же системе можно написать без знаменателя гораздо более разнообразные дроби, и прежде всего дроби:

$$^1/_2,\ ^1/_3,\ ^1/_4,\ ^1/_6,\ ^1/_8,\ ^1/_9,\ ^1/_{12},\ ^1/_{16},\ ^1/_{18},\ ^1/_{24},\ ^1/_{36},\ ^1/_{48},\ ^1/_{72},\ ^1/_{144},$$

которые соответственно изобразятся так:

0,6; 0,4; 0,3; 0,2; 0,16; 0,14; 0,1; 0,09; 0,08; 0,06; 0,04; 0,03; 0,02; 0,01.

Было бы, однако, большим заблуждением думать, что делимость числа может зависеть от того, в какой системе счисления оно изображено. Если орехи, заключающиеся в данном мешке, могут быть разложены в 5 одинаковых кучек, то это свойство их, конечно, не изменится от того, будет ли наше число орехов выражено в той или иной системе счисления, или отложено на счетах, или написано прописью, или, наконец, изображено каким-либо иным способом. Если число, написанное в 12-ричной системе, делится на 6 или на 72, то, будучи выражено в другой системе счисления, например, в 10-тичной, оно должно иметь те же делители. Разница лишь в том, что в 12-ричной системе делимость на 6 или на 72 легче обнаружить (число оканчивается одним или двумя нулями). Когда говорят о преимуществах 12-ричной системы в смысле делимости на большее число делителей, то имеют в виду, что благодаря склонности нашей «к круглым» числам, на практике будут чаще встречаться числа, оканчивающиеся в 12-ричной системе нулями.

При таких преимуществах 12-ричной системы неудивительно, что среди математиков раздавались голоса за полный переход на эту систему. Однако мы уже чересчур тесно сжились с 10-тичной системой, чтобы решаться на такую реформу.

Вы видите, следовательно, что дюжина имеет за собою длинную историю и что число 12 не без основания очутилось в галерее числовых диковинок. Зато его соседка — «чертова дюжина», 13 — фигурирует здесь не потому, что она чем-либо замечательна, а, скорее, именно потому, что ничем не замечательна, хотя и пользуется такой мрачной славой: разве не удивительно в самом деле, что ровно ничем не выделяющееся число могло стать столь «страшным» для суеверных людей? [1]

В следующей витрине арифметической кунсткамеры перед нами

26. ЧИСЛО 365

Оно замечательно не только тем, что определяет число дней в году. Прежде всего, оно при делении на 7 дает в остатке 1: эта несущественная, казалось бы, особенность числа 365 имеет большое значение для календаря. От нее зависит то, что каждый простой (не високосный) год кончается тем днем недели, каким он начался; если, например, день нового года был понедельник, то и последний день года будет понедельник, а следующий год начнется со вторника. По той же причине — благодаря остатку 1 от деления 365 на 7 — было бы нетрудно так изменить наш календарь, чтобы определенная календарная дата всегда приходилась на один и тот же день недели — например, чтобы 1-го мая каждый год было воскресенье. Для этого достаточно было бы лишь первый день года вовсе не вводить в счет числа дней, называть его не «1 января», а просто «новый год»; 1-м января будет следующий день. Тогда остальное число дней года, 364, будет заключать целое число недель; следовательно, весь ряд дальнейших лет будет начинаться тем же днем недели, и все даты из года в год будут повторяться в одни и те же дни. В годы високосные, заключающие 366 дней, надо будет уже первые два дня года оставить вне счета, как праздничные.

Любопытна и другая особенность числа 365, не связанная с календарем:

$$365 = 10 \times 10 + 11 \times 11 + 12 \times 12,$$

то-есть, 365 равно сумме квадратов трех последовательных чисел, начиная с 10:

102 + 112 + 122 = 100 + 121 + 144 = 365.

Но и это еще не все: тому же равна сумма квадратов двух следующих чисел — 13 и 14:

132 + 142 = 169 + 196 = 365.

Таких чисел не много наберется в нашей галерее арифметических диковинок.

[1] Как распространено это суеверие даже и в нашу эпоху, видно из того, что при устройстве электрического трамвая в Ленинграде (тогда Петербурге) первое время не решались вводить маршрута №13, а пропустив его, сразу перешли к №14: опасались, что публика побоится ездить в вагонах с таким «роковым» номером. Любопытно и то, что в Ленинграде есть немало домов, где 13-й номер квартиры пропущен… В гостиницах также нередко отсутствует комната №13. Для борьбы с этим ничем не обоснованным числовым суеверием на Западе (в Англии) учреждены даже особые «клубы числа 13»…

27. ТРИ ДЕВЯТКИ

В следующей витрине выставлено наибольшее из всех трехзначных чисел: 999. Оно без сомнения гораздо удивительнее, чем его перевернутое изображение 666 — знаменитое «звериное число» Апокалипсиса, вселявшее нелепый страх многим суеверным людям, но по арифметическим свойствам ничем не выделяющееся среди прочих чисел.

Любопытная особенность числа 999 проявляется при умножении на него всякого другого трехзначного числа. Тогда получается шестизначное произведение; первые три цифры его есть умножаемое число, только уменьшенное на 1, а остальные три цифры (кроме последней) — «дополнения» первых до 9. Например:

$$\begin{array}{r} 572 \\ 573 \times 999 = \underline{572427} \\ 999 \end{array}$$

Стоит лишь взглянуть на следующую строку, чтобы понять происхождение этой особенности:

$$573 \times 999 = 573 \times (1000-1) = \left\{ \begin{array}{r} 573000 \\ \underline{-573} \\ 572427 \end{array} \right.$$

Зная эту особенность, мы можем «мгновенно» умножать любое трехзначное число на 999.

$$947 \times 999 = 946053$$
$$509 \times 999 = 508491$$
$$981 \times 999 = 980019$$
и т. п.

А так как $999 = 9 \times 111 = 3 \times 3 \times 3 \times 37$, то вы можете, опять-таки с молниеносной быстротой, писать целые колонны шестизначных чисел, кратных 37; не знакомый со свойствами числа 999, конечно, сделать этого не в состоянии. Короче говоря, вы можете устраивать перед непосвященными маленькие сеансы «мгновенного умножения и деления» не хуже иного фокусника.

Сказанное, с соответствующими изменениями, относится не только к трем девяткам, но и к любому ряду их — к 9999, к 99999 и т. п.

28. ЧИСЛО ШЕХЕРАЗАДЫ

Следующим на очереди у нас число 1001 — прославленное число Шехеразады. Вы, вероятно, и не подозревали, что в самом названии сборника волшебных арабских сказок заключается также своего рода чудо, которое могло бы поразить воображение сказочного султана не менее многих других чудес Востока, если бы он способен был интересоваться арифметическими диковинками.

Чем же так замечательно число 1001? С виду оно кажется весьма обыкновенным. Оно даже не принадлежит к избранному разряду так называемых «простых» чисел. Через ячейки Эратосфенова решета оно свободно проскользнуло бы, так как делится без остатка и на 7, и на 11 и на 13 — на три последовательных простых числа, произведением которых оно и является. Но в том, что число $1001 = 7 \times 11 \times 13$, нет еще ничего волшебного. Замечательнее то, что при умножении на него трехзначного числа получается результат, состоящий из самого умноженного числа, только написанного дважды, например:

$$873 \times 1001 = 873873;$$

$$207 \times 1001 = 207207, \text{ и т. д.}$$

И хотя этого и следовало ожидать, так как
$873 \times 1001 = 873 \times 1000 + 873 = 873000 + 873$, — все же, пользуясь указанным свойством «числа Шехеразады», можно достичь результатов совсем неожиданных — по крайней мере, для человека неподготовленного.

Задача № 30

Целое общество гостей, непосвященных в арифметические тайны, вы можете поразить следующим фокусом. Пусть кто-нибудь напишет на бумажке, секретно от вас, трехзначное число, какое хочет, и затем пусть припишет к нему еще раз то же самое число. Получится шестизначное число, состоящее из трех повторяющихся цифр. Предложите тому же товарищу или его соседу разделить — секретно от вас — это число на 7; при этом вы заранее предсказываете, что остатка не получится. Результат деления передается соседу, который, по вашему предложению, делит его на 11; и хотя вы не знаете делимого, вы все же смело утверждаете, что и оно разделится без остатка. Полученный результат вы направляете следующему соседу, которого просите разделить это число на 13 — деление снова выполняется без остатка, о чем вы заранее предупреждаете. Результат третьего деления вы, не глядя на полученное число, вручаете первому товарищу со словами:

— Вот число, которое вы задумали!
Так и есть: вы угадали.
Какова разгадка этого фокуса?

Решение

Этот красивый арифметический фокус, производящий на непосвященных впечатление волшебства, объясняется очень просто: вспомните, что приписать к трехзначному числу его — самое — значит умножить его на 1001, т. е. на произведение $7 \times 11 \times 13$. Шестизначное число, которое ваш товарищ получит после того, как припишет к задуманному числу его самое, должно будет поэтому делиться без остатка и на 7, и на 11, и на 13; а после деления последовательно на эти три числа (т. е. на их произведение — 1001) оно должно, конечно, снова дать задуманное число.

29. ЧИСЛО 10 101

После сказанного о числе 1001 для вас уже не будет неожиданностью увидеть в витринах нашей галереи число 10101. Вы догадаетесь, какому именно свойству число это обязано такою честью. Оно, как и число 1001, дает удивительный результат при умножении, но не трехзнач-

ных чисел, а двузначных; каждое двузначное число, умноженное на 10101, дает в результате самое себя, написанное трижды. Например:

$$73 \times 10101 = 737373;$$

$$21 \times 10101 = 212121.$$

Причина уясняется из следующей строки:

$$73 \times 10101 = 73 \times (10000 + 100 + 1) = \left\{ \begin{array}{r} 730000 \\ 7300 \\ \underline{73} \\ 737373 \end{array} \right.$$

Задача № 31

Можно ли проделывать с помощью этого числа фокусы необычайного отгадывания, как с помощью числа 1001?

Решение

Да, можно. Здесь даже возможно обставить фокус эффектнее, разнообразнее, если иметь в виду, что 10101 есть произведение четырех простых чисел:

$$10101 = 3 \times 7 \times 13 \times 37.$$

Предложив первому гостю задумать какое-нибудь двузначное число, вы предлагаете второму приписать к нему то же число, а третьему приписать то же число еще раз. Четвертого гостя вы просите разделить получившееся шестизначное число, например, на 7; пятый гость должен разделить полученное частное на 3; шестой гость делит то, что получилось, на 37 и, наконец, седьмой делит этот результат на 13 — при чем все 4 деления выполняются без остатка. Результат последнего деления вы просите передать первому гостю: это — задуманное им число.

При повторении фокуса вы можете внести в него некоторое разнообразие, обращаясь каждый раз к новым делителям. А именно, вместо четырех множителей $3 \times 7 \times 13 \times 37$, можете взять следующие группы трех множителей:

$$21 \times 13 \times 37;\ 7 \times 39 \times 37;\ 3 \times 91 \times 37;\ 7 \times 13 \times 111.$$

Число это — 10 101 — пожалуй, даже удивительнее волшебного числа Шехеразады, хотя и менее известно своими поразительными свойствами, нежели 1001. А между тем о нем писалось еще двести лет тому назад в «Арифметике» Магницкого, в той главе, где приводятся примеры умножения «с некоим удивлением». Тем с большим основанием должны мы включить его в наше собрание арифметических диковинок.

30. ЧИСЛО 10 001

Задача № 32

С этим числом вы также можете проделать фокусы вроде предыдущих, хотя, пожалуй, и не столь эффектные.

Дело в том, что оно представляет собою произведение двух простых чисел: $10001 = 73 \times \times 137$.

Как воспользоваться этим для выполнения арифметических фокусов, читатель, надеюсь, после всего сказанного выше догадывается сам.

31. ШЕСТЬ ЕДИНИЦ

В соседней витрине мы видим такую диковинку арифметической кунсткамеры — число, состоящее из шести единиц.

Благодаря знакомству с волшебными свойствами числа 1001, мы сразу соображаем, что

$$111111 = 111 \times 1001$$

Но $111 = 3 \times 37$, а $1001 = 7 \times 11 \times 13$.

Отсюда следует, что наш новый числовой феномен, состоящий из одних лишь единиц, представляет собою произведение пяти простых множителей. Соединяя же эти 5 множителей в две группы на всевозможные лады, мы получаем 15 пар множителей, дающих в произведении одно и то же число 111111:

$$\begin{array}{rcll}
3 \times & (7 \times 11 \times 13 \times 37) & = & 3 \times 37037 = 111111 \\
7 \times & (3 \times 11 \times 13 \times 37) & = & 7 \times 15873 = 111111 \\
11 \times & (3 \times 7 \times 13 \times 37) & = & 11 \times 10101 = 111111 \\
13 \times & (3 \times 7 \times 11 \times 37) & = & 13 \times 8547 = 111111 \\
37 \times & (3 \times 7 \times 11 \times 13) & = & 37 \times 3003 = 111111 \\
(3 \times 7) \times & (11 \times 13 \times 37) & = & 21 \times 5291 = 111111 \\
(3 \times 11) \times & (7 \times 13 \times 37) & = & 33 \times 3367 = 111111
\end{array}$$

и т. д.

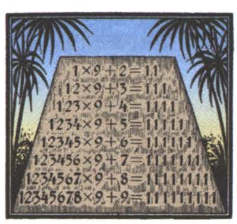
Вы можете, значит, засадить общество из 15 человек за работу умножения, и хотя каждый будет перемножать другую пару чисел, все получат один и тот же оригинальный результат: 111111.

Задача № 33

То же число 111 111 пригодно и для отгадывания задуманных чисел — наподобие того, как выполняется это с помощью чисел 1001 и 10 101. В данном случае нужно предлагать задумывать число однозначное, т. е. цифру, и повторять 6 раз. Делителями здесь могут служить пять простых чисел: 3, 7, 11, 13, 37 и получающиеся из них составные: 21, 33, 39 и т. д. Это дает возможность до крайности разнообразить выполнение фокуса. Как надо поступать в этих случаях, — предоставляю придумать читателю.

32. ЧИСЛОВЫЕ ПИРАМИДЫ

В следующих витринах галереи нас поражают числовые достопримечательности совсем особого рода — некоторое подобие пирамид, составленных из чисел.



Рассмотрим поближе первую из таких пирамид.

Задача № 34

Как объяснить эти своеобразные результаты умножения, эту странную закономерность?

Решение

Возьмем для примера какой-нибудь из средних рядов нашей числовой пирамиды: $123456 \times 9+7$. Вместо умножения на 9, можно умножить на (10–1), т. е. приписать 0 и вычесть умножаемое:

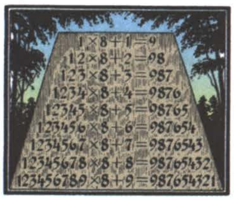
$$123456 \times 9 + 7 = 1234560 + 7 - 123456 = \left\{ \begin{array}{r} -1234567 \\ \underline{123456} \\ 1111111 \end{array} \right.$$

Достаточно взглянуть на последнее вычитание, чтобы понять, почему тут получается результат, состоящий только из одних единиц.

Мы можем понять это, исходя и из других рассуждений. Чтобы число вида 12345… превратилось в число вида 11111…, нужно из второй его цифры вычесть 1, из третьей — 2, из четвертой — 3, из пятой — 4 и т. д. — иначе говоря, вычесть из него то же число вида 12345…, лишенное своей последней цифры, — т. е. вдесятеро уменьшенное и предварительно сокращенное на последнюю цифру. Теперь понятно, что для получения искомого результата нужно наше число умножить на 10, прибавить к нему следующую за последней цифру и вычесть из результата первоначальное число (а умножить на 10 и отнять множимое — значит умножить на 9).

Задача № 35

Сходным образом объясняется образование и следующей числовой пирамиды, получающейся при умножении определенного ряда цифр на 8 и прибавлении последовательно возрастающих цифр. Особенно интересна в этой пирамиде последняя строка, где в результате умножения на 8 и прибавления 9 происходит превращение полного натурального ряда цифр в такой же ряд, но с обратным расположением.



Попытайтесь объяснить эту особенность.

Решение

Необходимость получения таких странных результатов уясняется из следующей строки:

$$12345 \times 8 + 5 \;=\left\{\begin{array}{c} -\,12345 \times 9 + 6 \\ 12345 \times 1 + 1 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} -111111\,^{1} \\ 12346, \end{array}\right.$$

т. е. $12345 \times 8 + 5 = 111111 - 12346$. Но вычитая из числа 111111 число 12346, составленное из ряда возрастающих цифр, мы, как легко понять, должны получить ряд убывающих цифр 98765.

Задача № 36

Вот, наконец, третья числовая пирамида, также требующая объяснения:

Решение

Обоснованность этой пирамиды есть прямое следствие существования первых двух. Связь эта устанавливается очень легко. Из первой пирамиды мы знаем уже, что, например:

$$12345 \times 9 + 6 = 111111.$$

Умножив обе части на 8, имеем:

$$(12345 \times 8 \times 9) + (6 \times 8) = 888888.$$

Но из второй пирамиды мы знаем, что

$$12345 \times 8 + 5 = 98765, \text{ или } 12345 \times 8 = 98760.$$

Значит:

$$888888 = (12345 \times 8 \times 9) + (6 \times 8) = (98760 \times 9) + 48 =$$
$$= (98760 \times 9) + (5 \times 9) + 3 = (98760 + 5) \times 9 + 3 =$$
$$= 98765 \times 9 + 3.$$

[1] Почему $12\,345 \times 9 + 6$ дает именно 111 111, было показано при рассмотрении предыдущей числовой пирамиды.

Вы убеждаетесь, что оригинальные числовые пирамиды не так уже загадочны, как кажутся на первый взгляда. Курьезно, что мне случилось как-то видеть их напечатанными в одной немецкой газете с припиской: «Причина такой поразительной закономерности никем еще до сих пор не была объяснена»…

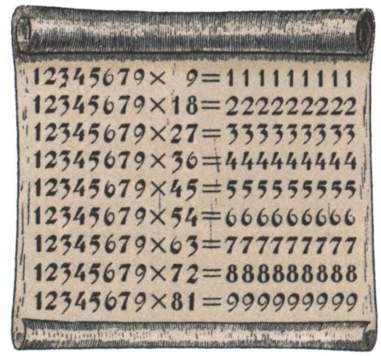
33. ДЕВЯТЬ ОДИНАКОВЫХ ЦИФР

Задача № 37

Конечная строка первой из сейчас (с. 27) рассмотренных «пирамид»:

$$12345678 \times 9 + 9 = 111111111$$

представляет образчик целой группы интересных арифметических курьезов, собранной в нашем музее в следующую таблицу:


12345679 × 9 = 111111111
12345679 × 18 = 222222222
12345679 × 27 = 333333333
12345679 × 36 = 444444444
12345679 × 45 = 555555555
12345679 × 54 = 666666666
12345679 × 63 = 777777777
12345679 × 72 = 888888888
12345679 × 81 = 999999999

Откуда такая закономерность в результатах?

Решение

Примем во внимание, что

$$1234567 \times 9 + 9 = (12345678 + 1) \times 9 = 12345679 \times 9.$$

Поэтому

$$12345679 \times 9 = 111111111.$$

А отсюда прямо следует, что

$$12345679 \times 9 \times 2 = 222222222$$
$$12345679 \times 9 \times 3 = 333333333$$
$$12345679 \times 9 \times 4 = 444444444 \text{ и т. д.}$$

34. ЦИФРОВАЯ ЛЕСТНИЦА

Задача № 38

Что получится, если число 111111111, с которым мы сейчас имели дело, умножить самое на себя? Заранее можно предвидеть, что результат должен быть диковинный, — но какой именно?

Решение

Если вы обладаете способностью отчетливо рисовать в воображении ряды цифр, вам удастся найти интересующий нас результат, даже не прибегая к выкладкам на бумаге. В сущности здесь дело сводится только к надлежащему расположению частных произведений, потому что умножать приходится все время лишь единицу на единицу — действие, могущее затруднить разве лишь фонвизинского Митрофанушку, размышляющего о результате умножения «единожды один». Сложение же частных произведений сводится к простому счету единиц [1]. Вот результат этого единственного в своем роде умножения (при выполнении которого, впрочем, не приходится ни разу прибегать к действию умножения):

```
        111111111
        111111111
        ---------
        111111111
       111111111
      111111111
     111111111
    111111111
   111111111
  111111111
 111111111
111111111
-----------------
12345678987654321
```

Все девять цифр выстроены в стройном порядке, симметрично убывая от середины в обе стороны.

Те из читателей, которых утомило обозрение числовых диковинок, могут покинуть здесь эту галерею и перейти в следующие отделения, где показываются фокусы и выставлены числовые великаны и карлики; я хочу сказать, — они могут прекратить чтение этой главы и обратиться к дальнейшим. Но кто желает познакомиться еще с несколькими интересными достопримечательностями мира чисел, тех приглашаю осмотреть со мною небольшой ряд ближайших витрин.

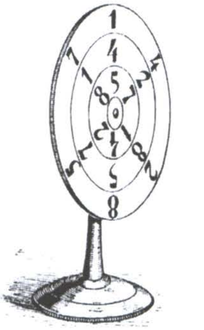
АРИФМЕТИЧЕСКИЕ КУРЬЕЗЫ

Умножение =	сложению:
2 × 2 = 2 + 2	11 × 1,1 = 11 + 1,1
3 × 1 1/2 = 3 + 1 1/2	21 × 1 1/20 = 21 + 1 1/20

Умножение =	вычитанию:
1 × 1/2 = 1 – 1/2	1/2 × 1/3 = 1/2 – 1/3
6 × 6/7 = 6 – 6/7	1/3 × 1/4 = 1/3 – 1/4

35. МАГИЧЕСКИЕ КОЛЬЦА

Задача № 39



Что за странные кольца выставлены в следующей витрине нашей галереи?

Перед нами (см. рис. слева) три плоских кольца, вращающихся одно в другом. На каждом кольце написаны шесть цифр в одном и том же порядке, иначе говоря — написано одно и то же число: 142857. Эти кольца обладают следующим удивительным свойством: как бы ни были они повернуты, мы при сложении двух написанных на них чисел — считая от любой цифры в направлении начерченной стрелки — во всех случаях получим то же самое шестизначное число (если только результат вообще будет 6-значный), лишь немного подвинутое! В положении, например, какое изображено на прилагаемом чертеже, мы получаем при сложении двух наружных колец:

$$\begin{array}{r} +\ 142857 \\ 428571 \\ \hline 571428 \end{array}$$

т. е. опять-таки тот же ряд цифр: 142857, только цифры 5 и 7 перенеслись из конца в начало.

При другом расположении колец относительно друг друга мы имеем такие случаи:

$$\begin{array}{r} +\ 285714 \\ 571428 \\ \hline 857142 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\ 714285 \\ 142857 \\ \hline 857142 \end{array}$$

и т. п.

Исключение составляет единственный случай, когда в результате получается 999999:

Мало того. Тот же ряд цифр в той же последовательности мы получим и при вычитании чисел, написанных на кольцах. Например:

$$\begin{array}{r} -\ 428571 \\ 142857 \\ \hline 285714 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\ 571428 \\ 285714 \\ \hline 285714 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\ 714285 \\ 142857 \\ \hline 571428 \end{array}$$

Исключение составляет случай, когда приведены к совпадению одинаковые цифры — тогда, разумеется, разность равна нулю.

Но и это еще не все. Умножьте число 142857 на 2, на 3, на 4, на 5 или на 6 — и вы получите снова то же число, лишь передвинутое, в круговом порядке, на одну или несколько цифр:

142857 x 2 = 285714

142857 x 3 = 428571

142857 x 4 = 571428

142857 x 5 = 714285

142857 x 6 = 857142

Чем же обусловлены все загадочные особенности этого числа?

Решение

Мы нападем на путь к разгадке, если продлим немного последнюю табличку и попробуем умножить наше число на 7: в результате получится 999999. Значит, число наше — не что иное, как седьмая часть 999999, т. е. дробь.

И действительно, если вы станете превращать $^1/_7$ в десятичную дробь, вы получите:

---

[1] В двоичной системе счисления, как мы уже объясняли (см. гл. 19-23), все умножения именно такого рода. На этом примере мы наглядно убеждаемся в преимуществах двоичной системы.

$1 : 7 = 0{,}142857\ldots$ т. е. $^1\!/_7 = 0{,}(142\,857)$

```
10
 30
  20
   60
    40
     50
      1
```

Наше загадочное число есть, следовательно, период бесконечной периодической дроби, которая получается при превращении $^1\!/_7$ в десятичную. Становится понятным теперь, почему при удвоении, утроении и т. д. этого числа происходит лишь перестановка одной группы цифр на другое место. Ведь умножение этого числа на 2 делает его равным $^2\!/_7$, и следовательно, равносильно превращению в десятичную дробь уже не $^1\!/_7$, а $^2\!/_7$ Начав же превращать дробь $^2\!/_7$ в десятичную, вы сразу заметите, что цифра 2 — один из тех остатков, которые у нас получались уже при превращении $^1\!/_7$: ясно, что должен повториться и прежний ряд цифр частного, но он начнется с другой цифры; иными словами, должен получиться тот же период, но только несколько начальных цифр его очутятся на конце. То же самое должно произойти и при умножении на 3, на 4, на 5 и на 6, т. е. на все числа, получающиеся в остатках. При умножении же на 7 мы должны получить целую 1, или — что то же самое — 0,9999…

Любопытные результаты сложения и вычитания чисел на кольцах находят себе объяснение в том же факте, что 142857 есть период дроби, равной $^1\!/_7$. В самом деле: что мы делаем, поворачивая кольцо на несколько цифр? Переставляем группу цифр спереди на конец, т. е., согласно только что сказанному, мы умножаем число 142857 на 2, на 3, на 4 и т. д. Следовательно, все действия сложения или вычитания чисел, написанных на кольцах, сводятся к сложению или вычитанию дробей $^1\!/_7$, $^2\!/_7$, $^3\!/_7$ и т. д. В результате мы должны получить, конечно, несколько седьмых долей, — т. е. опять-таки наш ряд цифр 142 857 в той или иной круговой перестановке. Отсюда надо исключить лишь случаи, когда складываются такие числа седьмых долей, которые в сумме дают 1 или больше 1.

Но и последние случаи исключаются не вполне: они дают результат, правда, не тождественный с рассмотренными, но все же сходный с ними. Рассмотрим внимательнее, что должно получиться от умножения нашего загадочного числа на множитель больше 7, т. е. на 8 на 9 и т. д. Умножить 142 857, например, на 8, мы можем так: умножить сначала на 7 и к произведению (т. е. к 999999) прибавить наше число:

$$142\,857 \times 8 = 142\,857 \times 7 + 142\,857 =$$
$$= 999\,999 + 142857 = 1000\,000 - 1 + 142\,857 =$$
$$= 1000\,000 + (142857 - 1).$$

Окончательный результат — 1142856 — отличается от умножаемого 142857 только тем, что впереди стоит еще одна 1, а последняя цифра на 1 же уменьшена. По сходному правилу составляются произведения 142857 на всякое другое число, большее 7, — как легко усмотреть из следующих строк:

$$142\,857 \times 8 = (142\,857 \times 7) + 142\,857 = 1142\,856$$
$$142\,857 \times 9 = (142\,857 \times 7) + (142\,857 \times 2) = 1285\,713$$
$$142\,857 \times 10 = (142\,857 \times 7) + (142\,857 \times 3) = 1428\,570$$
$$142\,857 \times 16 = (142\,857 \times 7 \times 2) + (142\,857 \times 2) = 2285\,712$$
$$142\,857 \times 39 = (142\,857 \times 7 \times 5) + (142\,857 \times 4) = 5571\,423$$

Общее правило здесь такое: при умножении 142857 на любой множитель нужно умножить лишь на остаток от деления множителя на 7; впереди этого произведения ставится число, показывающее, сколько семерок в множителе, и то же число вычитается из результата [1]. Пусть мы желаем умножить 142 857 на 86. Множитель 86 при делении на 7 дает в частном 12 и в остатке 4. Следовательно, результат умножения таков:

$$12\,571\,428 - 12 = 12\,571\,416.$$

От умножения 142857 × 365 мы получим (так как 365 при делении на 7 дает в частном 52, а в остатке 1): 52 142 857 – 52 = 52 142 805.

Усвоив это простое правило и запомнив результаты умножения нашего диковинного числа на множители от 2 до 6 (что весьма нетрудно — нужно помнить лишь, с какой цифры они начинаются), вы можете изумлять непосвященных молниеносно-быстрым умножением шестизначного числа. А чтобы не забыть этого удивительного числа, запомним, что оно произошло от $^1\!/_7$ или

$$\begin{array}{r} +\ 285\,714 \\ 714\,285 \\ \hline 999\,999 \end{array}$$

— что то же самое — от $^1\!/_{14}$; вот вам первые три цифры нашего числа: 142. Остальные три получаются вычитанием первых трех из 9:

$$\begin{array}{r} -\ 999 \\ 142\,857 \\ \hline 857 \end{array}$$

Мы уже имели дело с такими числами — именно, когда знакомились со свойствами числа 999. Вспомнив сказанное там, мы сразу сообразим, что число 142857 есть, очевидно, результат умножения 143 на 999:

$$142\,857 = 143 \times 999.$$

Но 143 = 13 × 11. Припомнив замеченное раньше о числе 1001, равном 7 × 11 × 13, мы будем в состоянии, не выполняя действия, предсказать, что должно получиться от умножения 142857 × 7:

$$142\,857 \times 7 = 143 \times 999 \times 7 = 999 \times 11 \times 13 \times 7 =$$
$$= 999 \times 1001 = 999\,999$$

(все эти преобразования мы, конечно, можем проделать в уме).

36. ФЕНОМЕНАЛЬНАЯ СЕМЬЯ

Задача № 40

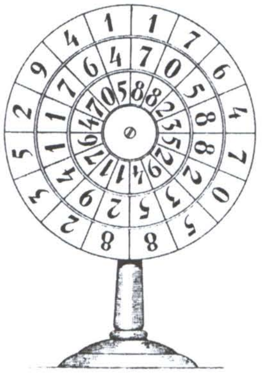
Только что рассмотренное нами число 142857 является одним из членов целой семьи чисел, обладающих теми же свойствами. Вот еще одно такое число:

$$\frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}.$$

[1] Если множитель кратен 7, то результат равен числу 999999, умноженному на число семерок в множителе; такое умножение легко выполнить в уме. Например, 142 857 × 28 = = 999 999 × 4 = 4000 000 – 4 = 3999 996.

058 823 594 117 647 (0 впереди необходим). Если умножить это число, например, на 4, мы получим тот же ряд цифр, только первые 4 цифры будут переставлены в конец:

$$0588235294117647 \times 4 = 2\ 352\ 941\ 176\ 470\ 588.$$



Расположив цифры этого числа на ряде подвижных колец, как в предыдущем случае, мы при сложении чисел двух колец будем получать то же число, лишь смещенное в круговом порядке:

$$\begin{array}{r} +\ 0\ 588\ 235\ 294\ 117\ 647 \\ 2\ 352\ 941\ 176\ 470\ 588 \\ \hline 2\ 941\ 176\ 470\ 588\ 235 \end{array}$$

При кольцевом расположении все три ряда, конечно, тождественны.

От вычитания чисел двух колец опять-таки получается тот же круг цифр:

$$\begin{array}{r} -\ 2\ 352\ 941\ 176\ 470\ 588 \\ 0\ 588\ 235\ 294\ 117\ 647 \\ \hline 1\ 764\ 705\ 882\ 352\ 941 \end{array}$$

Наконец, это число, как и рассмотренное ранее, состоит из двух половин: цифры второй половины являются дополнением цифр первой половины до 9.

Попробуйте найти разгадку всех этих особенностей.

Решение

Нетрудно догадаться, каким образом приведенный числовой ряд оказался столь близким родственником числа 142857; последнее число представляет собою период бесконечной дроби, равной $^1/_7$, наше же число является, вероятно, периодом какой-нибудь другой дроби. Так и есть: наш длинный ряд цифр — не что иное, как период бесконечной дроби, получающейся от превращения в десятичную простой дроби $^1/_{17}$:

$$^1/_{17} = 0,(0\ 588\ 235\ 294\ 117\ 647)$$

Вот почему при умножении этого числа на множители от 1 до 16 получается тот же ряд цифр, в котором лишь одна или несколько начальных цифр перенесены в конец числа. И наоборот — перенося одну или несколько цифр ряда из начала в конец, мы тем самым увеличиваем это число в несколько раз (от 1 до 16). Складывая два кольца, повернутых одно относительно другого, мы производим сложение двух умноженных чисел, например утроенного и удесятеренного, — и, конечно, должны получить то же кольцо цифр, потому что умножение на 3 + 10, т. е. на 13, вызывает лишь перестановку группы цифр, не заметную при круговом расположении. При некотором положении колец получаются, однако, суммы, немного отличающиеся от первоначального ряда. Если, например, повернем кольца так, чтобы складывать пришлось шестикратное число с пятнадцатикратным, то в сумме должно получиться число, умноженное на 6 + 15 = 21. А такое произведение, как легко догадаться, составляется уже несколько иначе, чем произведение на множитель меньший 16. В самом деле: так как наше число есть период дроби, равной $^1/_{17}$, то, будучи умножено на 17, оно должно дать 16 девяток (т. е. столько, сколько их в подразумеваемом знаменателе периодической дроби) или 1 с 17 нулями минус 1. Поэтому при умножении на 21, т. е. на 4 + 17, мы должны получить четырехкратное число, впереди которого стоит 1, а от разряда единиц отнято 1. Четырехкратное же число начнется с цифр, получающихся при превращении в десятичную дробь простой дроби $^4/_7$.

$$\begin{array}{l} 4\ :17 = 0,23\ \ldots. \\ \underline{\ \ \ }\ \\ \ 40 \\ \ \underline{\ \ \ \ } \\ \ \ \ 60 \\ \ \ \underline{\ \ \ \ } \\ \ \ \ \ 9 \end{array}$$

Порядок остальных цифр нам известен: 5294 . . . Значит, 21-кратное наше число будет

$$2\ 352\ 941\ 176\ 470\ 588.$$

Столько именно и получается от сложения кругов цифр при соответственном их расположении. При вычитании числовых колец такого случая, разумеется, быть не может. Чисел, подобных тем двум, с которыми мы познакомились, существует множество. Все они составляют словно одно семейство, так как объединены общим происхождением — от превращения простых дробей в бесконечные десятичные. Но не всякий период десятичной дроби обладает рассмотренным выше любопытным свойством давать при умножении круговую перестановку цифр. Не вдаваясь в тонкости теории, отметим, что это имеет место только для тех дробей, число цифр периода которых на единицу меньше знаменателя соответствующей простой дроби. Так, например:

$^1/_7$ дает в периоде 6 цифр.
$^1/_{17}$ „ „ „ 16 „
$^1/_{19}$ „ „ „ 18 „
$^1/_{23}$ „ „ „ 22 „
$^1/_{29}$ „ „ „ 28 „

Вы можете убедиться испытанием, что периоды дробей, получающихся от превращения $^1/_{19}$, $^1/_{23}$ и $^1/_{29}$ в десятичные, обладают теми же особенностями, как и рассмотренные нами периоды дробей $^1/_7$ и $^1/_{17}$.

Например, от $^1/_{29}$ получаем число

$$0\ 344\ 827\ 586\ 206\ 896\ 551\ 724\ 137\ 931.$$

Если указанное сейчас условие (относительно числа цифр периода) не соблюдено, то соответствующий период дает число, не принадлежащее к занимающей нас семье интересных чисел. Например, $^1/_{13}$ дает десятичную дробь с шестью (а не с 12) цифрами в периоде:

$$^1/_{13} = 0,076\ 923.$$

Помножив на 2, получаем совершенно иное число:

$$^2/_{13} = 0,153\ 846.$$

Почему? Потому что среди остатков от деления 1:13 не было числа 2. Различных остатков было столько, сколько цифр в периоде, т. е. 6; различных же множителей для дроби $^1/_{13}$ у нас 12; следовательно, не все множители будут среди остатков, а только 6. Легко убедиться, что эти множители следующие: 1, 3, 4, 9, 10, 12.

Умножение на эти 6 чисел дает круговую перестановку (076 923 × 3 = 230 769), на остальные — нет. Вот почему от $^1/_{13}$ получается число, лишь отчасти пригодное для «магического кольца». То же надо сказать и о целом ряде других периодов.

После этого, думаем, нельзя не согласиться, что длиннейшие периоды бесконечных дробей представляют собою настоящую «Калифорнию» [1] интереснейших арифметических достопримечательностей.

Решение задачи № 28
(с. 23)

Число 130 в различных системах счисления выражается следующим образом:

в двоичной	10 000 010
в троичной	11 211
в 4-ной	2002
в 5-ной	1010
в 6-ной	334
в 7-ной	244
в 8-ной	202
в 9-ной	154

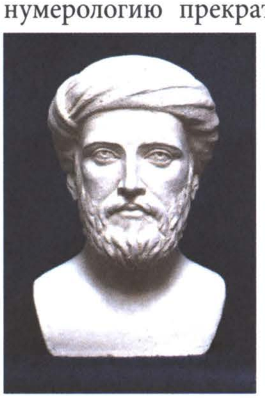
«ВСЕ РАСПОЛАГАЕТСЯ СОГЛАСНО ЧИСЛАМ.»
ПИФАГОР

Кроме затронутой Я. Перельманом в этой главе математической магии чисел, с древних пор существует и другая сторона. Это изотерическая магия чисел, ставшая системой взглядов, которая утверждает, что между числами и событиями, происходящими в жизни людей существует некая связь.

Очень заманчиво было бы получить ответы на вечные человеческие вопросы с помощью математики, основанной на строгой логике доказательств. Однако, наука нумерология, которая описывает эти связи, в современном мире уже отделена от математики так же, как алхимия от химии и астрология от астрономии.

Но ведь нумерологию «изобрел» сам Пифагор! Этот факт не дает покоя многим и по сей день. Человек пытается предугадать свое будущее, понять свое место в окружающем мире. И на этом естественном любопытстве нумерология покоится до сих пор.

Так что же такое, в самом деле, магия чисел, отраженная в нумерологии? Сейчас этот вопрос получил дополнительную актуальность, поскольку гонения на нумерологию прекратились и информация об этом предмете стала доступной всем желающим.



Начать разбираться в этом вопросе, пожалуй, следует с личности ее основателя.

Пифагор или Пифагор Самосский (570–490 гг. до н. э.) - древнегреческий философ, математик и мистик. Он создал свою собственную религиозно-философскую школу, которой следовали его многочисленные ученики-пифагорейцы.

Древний мыслитель родился на острове Самос, греческом острове архипелага Восточные Спорады. Его отцом был камнерез. Мать – Партенида, происходила из знатного рода Анкея, царя Самосского, отцом которого был Посейдон. Тот самый морской бог из мифов и легенд древней Греции.

Вообще в истории Пифагора жизнь и легенды переплетаются настолько тесно, что их практически не отделить. Более того, ученый не оставил после себя ни одной письменной работы, а все что мы о нем и о его научных трудах знаем, все это известно со слов его последователей, записи которых об учении и деятельности Пифагора появились лишь через 200 лет после его смерти.

Тем не менее, Пифагору приписывают заслугу в доказательстве теоремы о прямоугольном треугольнике, всем нам известной со школьной скамьи как «пифагоровы штаны...». Так же Пифагору ставится в заслугу работа «Метафизика», в которой развиваются представления об устройстве Вселенной, открытие сферичности Земли, прочие математические открытия.

Однако, до сих пор нет четких доказательств авторства именно Пифагора. Ученые-исследователи считают эти работы заслугой его учеников.

Что известно достоверно, так это то, что с юных лет Пифагор увлекся науками, а по достижении 18 лет отправился в путешествие по древнему миру. На протяжении своих странствий он познакомился и пообщался едва ли не со всеми крупными учеными и мудрецами Греции, Персии, Египта, Месопотамии. За Пифагором последовали многие его ученики и люди, которые разделяли его философские взгляды.

Но вернемся к нумерологии. Пифагор объявил на весь мир, что «Все располагается согласно числам». Вот это положение и стало отправной точкой, которая положила начало нумерологии, соединив вместе опыт и математические достижения арабов, друидов, финикийцев и египтян с наукой о природе человека.

Затем появилась не менее яркая наука о сокровенных тайнах мироздания – Каббала, которая также затрагивала волнующие человека вопросы о его связи с высшими силами и о предвидении будущего.

Современная нумерология уже не имеет того яркого ореола средневековой науки, однако не менее уверенно оперирует датами рождения, номерами телефонов и кредиток, давая современному человеку утешение в его сложных жизненных ситуациях. Несмотря на критику, число нумерологов не уменьшается.

[1] Выражение начала XX века настоящая «Калифорния» соответствует современному настоящий «Клондайк». Оба выражения происходят от золотых россыпей сначала Калифорнии, а затем Клондайка и являются в данном случае образной заменой выражения «настоящая сокровищница».

37. ИСКУССТВО ИНДУССКОГО ЦАРЯ

Арифметические фокусы — честные, добросовестные фокусы. Здесь не стремятся обмануть, не стараются усыпить внимание зрителя. Чтобы выполнить арифметический фокус, не нужны ни чудодейственная ловкость рук, ни изумительное проворство движений, ни какие-либо другие артистические способности, требующие иногда многолетних упражнений. Весь секрет арифметического фокуса состоит в использовании любопытных свойств чисел, в близком знакомстве с их особенностями. Кто знает разгадку такого фокуса, тому все представляется простым и ясным; а для незнающего арифметики — самое прозаическое действие, например, умножение, кажется уже чем-то вроде фокуса.

Было время, когда выполнение даже обыкновенных арифметических действий над большими числами, знакомое теперь каждому школьнику, составляло искусство лишь немногих и казалось остальным какою-то сверхъестественною способностью. В древнеиндусской повести «Наль и Дамаянти» [1] находим отголосок такого взгляда на арифметические действия. Наль, умевший превосходно править лошадьми, возил однажды своего хозяина, царя Ритуперна, мимо развесистого дерева — Вибитаки.

Вдруг он увидел вдали Вибитаку — ветвисто густою
Сенью покрытое дерево. «Слушай, сказал он:
— Здесь на земле никто не имеет всезнанья; в искусстве
— Править конями ты первый; зато мне далося искусство
«Счета»...

И в доказательство своего искусства царь мгновенно сосчитал число листьев на ветвистой Вибитаке. Изумленный Наль просит Ритуперна открыть ему тайну его искусства, и царь соглашается.

....Лишь только
Вымолвил слово свое Ритуперн, как у Наля открылись
Очи, и он все ветки, плоды и листья Вибитаки
Разом мог перечесть...

Секрет искусства состоял, как можно догадаться, в том, что непосредственный счет листьев, требующий много времени и терпения, заменялся счетом листьев одной лишь ветки и умножением этого числа на число веток каждого сука и далее — на число сучьев дерева (предполагая, что сучья одинаково обросли ветками, а ветки — листьями).

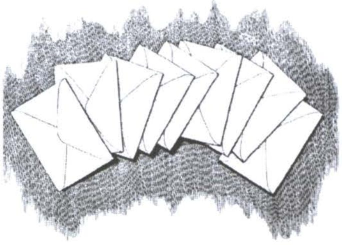
Разгадка большинства арифметических фокусов столь же проста, как и секрет «фокуса» царя Ритуперна. Стоит лишь узнать, в чем разгадка фокуса, и вы сразу овладеваете искусством его выполнять, как овладел легендарный Наль изумительным искусством быстрого счета. В основе каждого арифметического фокуса лежит какая-нибудь интересная особенность чисел, и потому знакомство с подобными фокусами не менее поучительно, чем занимательно.

[1] Русский перевод (вольный) Жуковского. Эпизод, о котором далее идет речь, описан в главе VIII этой повести.

38. НЕ ВСКРЫВАЯ КОНВЕРТОВ

Задача № 41

Фокусник вынимает стопку из 300 кредитных билетов по 1 рублю каждый, и предлагает вам разложить деньги в 9 конвертах так, чтобы вы могли уплатить ими любую сумму до 300 рублей, не вскрывая ни одного конверта.



Задача представляется вам совершенно невыполнимой. Вы готовы уже думать, что тут дело кроется в какой–нибудь коварной игре слов или неожиданном толковании их смысла. Но вот фокусник, видя вашу беспомощность, сам раскладывает деньги по конвертам, заклеивает их и предлагает вам назвать любую сумму в пределах трехсот рублей. Вы называете наугад первое попавшееся число — например 269. Без малейшего промедления фокусник подает вам 4 заклеенных конверта. Вы вскрываете их и находите:

в 1-м — 64 руб.
„ 2-м — 45 „
„ 3-м — 128 „
„ 4-м — 32 „
Итого.... 269 руб.

Теперь вы склонны заподозрить фокусника в искусной подмене конвертов и требуете повторения опыта. Он спокойно кладет деньги обратно в конверты, заклеивает и оставляет их на этот раз в ваших руках. Вы называете новое число, например 100, или 7, или 293, — и фокусник моментально указывает, какие из лежащих у вас под руками конвертов вы должны взять, чтобы составить требуемую сумму (в первом случае, для 100 рублей — 4 конверта, во втором, для 7 рублей. — 3 конверта, в третьем, для 293 рублей — 6 конвертов).

В чем же дело?

Решение

Секрет этот кроется в том, чтобы разложить деньги в следующие стопки: 1 руб., 2 руб., 4 руб., 8 руб., 16 руб., 32 руб., 64 руб., 128 руб. и, наконец, в последней — остальные рубли, т. е.

$$300 - (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128) =$$
$$= 300 - 255 = 45.$$

Из первых 8 конвертов возможно, как нетрудно убедиться, составить любую сумму от 1 до 255; если же задается число большее, то пускают в дело последний конверт, с 45 рублями, а разницу составляют из первых 8 конвертов.

Вы можете проверить пригодность такой группировки чисел многочисленными пробами и убедиться, что из них можно действительно составить всякое число, не превышающее 300. Но вас, вероятно, интересует и то, почему собственно ряд чисел 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 и т. д. обладает столь замечательным свойством.

Это нетрудно понять, если вспомнить, что числа нашего ряда представляют степени 2: 21, 22, 23, 24 и т. д.), — и, следовательно, их можно рассматривать как разряды двоичной системы счисления. А так как всякое число можно написать по двоичной системе, то значит и всякое число возможно составить из суммы степеней 2, т. е. из чисел ряда 1, 2, 4, 8, 16 и т. д.

И когда вы подбираете конверты, чтобы составить из их содержимого заданное число, вы в сущности выражаете заданное число в двоичной системе счисления.

Например, число 100 мы легко сможем составить, если изобразим его в двоичной системе:

```
100 | 2
  0 | 50 | 2
       0 | 25 | 2
            1 | 12 | 2
                 0 |  6 | 2
                      0 | 3 | 2
                          1 | 1
```

100 = 1 1 0 0 1 0 0
64 32 (16) (8) 4 (2) (1)

100 = 64 + 32 + 4

Напомним, что в двоичной системе на первом месте справа стоят единицы, на втором — двойки, на третьем — четверки, на четвертом — восьмерки и т. д.

39. УГАДАТЬ ЧИСЛО СПИЧЕК

Задача № 42

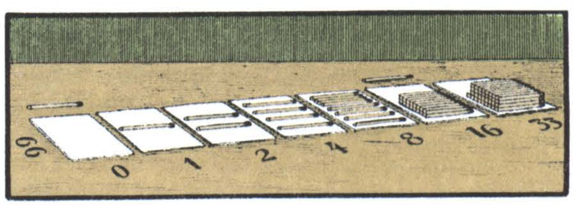
Свойством двоичной системы можно воспользоваться и для следующего фокуса. Вы предлагаете кому-нибудь взять неполный коробок со спичками, положить его на стол, а рядом положить 8 бумажных квадратиков. Затем просите во время вашего отсутствия проделать следующее: оставив половину спичек в коробке, перенести другую половину на ближайшую бумажку; если число спичек нечетное, то излишнюю спичку положить рядом с бумажкой, налево от нее. Спички, очутившиеся на бумажке, надо (не трогая лежащей рядом) разделить на две равные части: одну половину положить в коробку, другую — переложить на следующую бумажку; в случае нечетного числа, остающуюся спичку положить рядом со второй бумажкой. Далее поступать таким же образом, возвращая всякий раз половину спичек обратно в коробку, а другую половину — перекладывая на следующую бумажку, не забывая, при нечетном числе спичек, класть одну спичку рядом. В конце концов все спички, кроме одиночных, лежащих рядом с бумажками, возвратятся в коробку.

Когда это сделано, вы являетесь в комнату и, бросив взгляд на пустые бумажки, называете число спичек во взятой коробке.

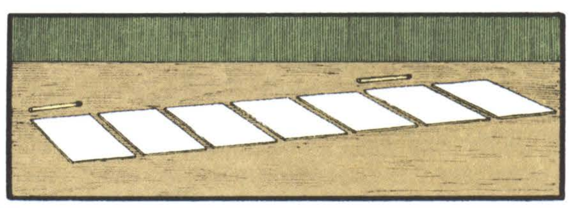
Как можно по пустым бумажкам и случайным единичным спичкам догадаться о первоначальном числе спичек в коробке?

Решение

Эти «пустые» бумажки в данном случае очень красноречивы: по ним и по одиночным спичкам можно буквально прочесть искомое число, потому что оно написано на столе — в двоичной системе счисления. Поясним это на примере. Пусть число спичек было 66. Последовательные операции с ними и окончательный вид бумажек показаны на следующих схемах:



Последовательные операции.



Окончательный вид.

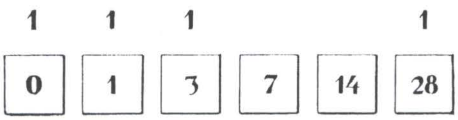
Не нужно большой проницательности, чтобы сообразить, что проделанные со спичками операции в сущности те же самые, какие мы выполнили бы, если бы хотели выразить число спичек в коробке по двоичной системе счисления; окончательная же схема — прямо изображает это число в двоичной системе, если пустые бумажки принять за нули, а бумажки, отмеченные сбоку спичкой, — за единицы. Читая схему слева направо получаем

1 0 0 0 0 1 0

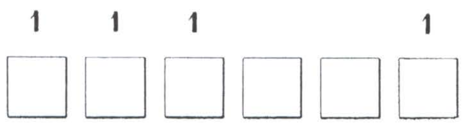
64 (32) (16) (8) (4) 2 (1)

т. е. в десятичной системе: 64 + 2 = 66.

Если бы было 57 спичек, мы имели бы иные схемы:



Последовательные операции.



Окончательный вид.

Искомое число, написанное по двоичной системе:

1 1 1 0 0 1

32 16 8 (4) (2) 1

А в десятичной: 33 + 16 + 8 + 1 = 57.

40. ЧТЕНИЕ МЫСЛЕЙ ПО СПИЧКАМ

Задача № 43

Третье видоизменение того же фокуса представляет собою своеобразный способ отгадывания задуманного числа по спичкам. Загадавший должен мысленно делить задуманное число пополам, полученную половину опять пополам и т. д. (от нечетного числа, отбрасывая единицу) — и при каждом делении класть перед собою спичку, направленную вдоль стола, если делится число четное, и поперек, если приходится делить нечетное.

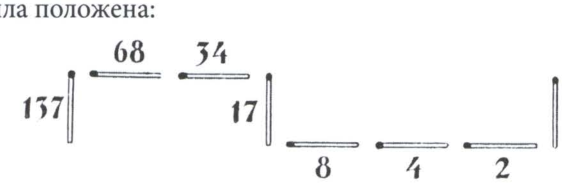
К концу операции получается фигура вроде следующей:

Вы всматриваетесь в эту фигуру и безошибочно называете задуманное число: 137.

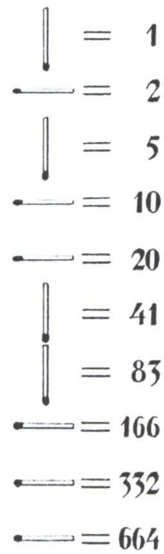
Как вы узнаете его?

Решение

Способ станет ясен сам собою, если в выбранном примере (137) мы последовательно обозначим возле каждой спички то число, при делении которого она была положена:



Теперь понятно, что так как последняя спичка во всех случаях обозначает число 1, то не составляет труда, восходя от нее к предшествующим делениям, добраться до первоначально задуманного числа. Например, по фигуре вы можете вычислить, что задумано было число 664. В самом деле, выполняя последовательно удвоения (начиная с конца) и не забывая прибавлять, где надо единицу, получаем (см. рис.).



Таким образом, пользуясь спичками, вы прослеживаете ход чужих мыслей, восстанавливая всю цепь умозаключений.

Тот же результат мы можем получить иначе, сообразив, что лежащая спичка должна соответствовать в двоичной системе нулю (деление на 2 без остатка), а стоящая — единице. Таким образом, в первом примере мы имеем (читая справа налево) число

1 0 0 0 1 0 0 1

128 (64) (32) (16) 8 (4) (2) 1

или в десятичной системе:

128 + 8 + 1 = 137.

А во втором примере задуманное число изображается по двоичной системе:

1 0 0 0 1 1 0 0 0 0

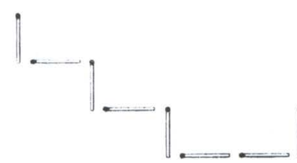
512 (256) 128 (64) (32) 16 8 (4) (2) 1

или по десятичной системе:

512 + 128 + 16 + 8 = 664.

Задача № 44

Какое число задумано, если получилась такая фигура (см. рис.).



Решение

Число «10010101» в двоичной системе соответствует в десятичной:

128 + 16 + 4 + 1 = 149.

(Необходимо заметить, что получаемая при последнем делении единица также должна быть отмечаема стоящей спичкой).

41. ИДЕАЛЬНЫЙ РАЗНОВЕС

Задача № 45

У некоторых читателей, вероятно, возник уже вопрос: почему для выполнения описанных раньше опытов мы пользуемся именно двоичной системой? Ведь всякое число можно изобразить в любой системе, между прочим и в десятичной. Чем же объясняется предпочтение здесь двоичной?

Решение

Объясняется оно тем, что в этой системе, кроме нуля, употребляется всего одна цифра — единица, а следовательно, число составляется из различных степеней 2, взятых только по одному разу. Если бы в фокусе с конвертами мы распределили деньги, например, по 5-ричной системе, то могли бы составить, не вскрывая конвертов, любую сумму лишь в том случае, когда каждый пакет повторяется у нас не менее 4 раз (в 5-ричной системе употребляются ведь кроме нуля 4 цифры).

Впрочем, бывают случаи, когда для подобных надобностей удобнее пользоваться не двоичной, а троичной системой, несколько видоизмененной. Сюда относится знаменитая старинная «задача о наборе гирь», которая может послужить сюжетом и для арифметического фокуса.

Задача № 46а

Представьте, что вам предложили придумать набор из 4 гирь, с помощью которых возможно было бы отвесить любое целое число килограммов, от 1 до 40.

Двоичная система подсказывает вам набор:

1 кг, 2 кг, 4 кг, 8 кг, 16 кг,

которым можно отвешивать все грузы от 1 до 31 кг.

Но это, очевидно, не удовлетворяет требуемым условиям ни по числу гирь, ни по предельному грузу (31 кг вместо 40).

Кроме того, вы не использовали здесь возможности класть гири не только на одну чашку весов, но и на две, т. е. обходиться не только суммою гирь, но и их разностью. Это дает так много разнообразных комбинаций, что вы совершенно теряетесь в поисках, не умея уложить их в какую-либо систему. Если вам не посчастливится напасть на правильный путь, вы готовы будете даже сомневаться вообще в разрешимости подобной задачи столь малым числом гирь, как четыре.

Решение

Посвященный выходит из этого затруднения с волшебной простотой, намечая следующие 4 гири:

1 кг, 3 кг, 9 кг, 27 кг.

Любое целое число килограммов, до 40 кг, вы можете отвесить такими гирями, кладя их то на одну, то на обе чашки весов. Не приводим примеров, потому что каждый легко может сам убедиться в полной пригодности такого набора гирь для нашей цели.

Остановимся лучше на том, почему именно указанный ряд обладает этим свойством.

Вероятно, читатели уже заметили, что числа эти — ряд степеней числа 3 [1].

$$3^0, 3^1, 3^2, 3^3.$$

Это значит, что мы обращаемся здесь к услугам троичной системы счисления. Гири — цифры этой системы. Но как воспользоваться ею в тех случаях, когда требуемый вес получается в виде разности двух гирь? И как избегнуть необходимости обращаться к удвоению гирь (в троичной системе ведь кроме нуля употребляются две цифры 1 и 2)?

То и другое достигается введением «отрицательных» цифр. Дело сводится попросту к тому, что вместо цифры 2 употребляют 3 – 1, т. е. цифру единицы высшего разряда, от которого отнимается одна единица низшего. Например, число 2 в нашей видоизмененной троичной системе обозначится не 2, а 11, где знак минус над цифрой единиц означает, что эта единица не прибавляется, а отнимается. Точно так же число 5 изобразится не 12, а

$1\bar{1}\bar{1}$ (т. е. 9 – 3 – 1 = 5).

Теперь ясно, что если любое число можно изобразить в троичной системе с помощью нуля (т. е. знака отсутствия числа) и одной только цифры, именно прибавляемой или отнимаемой единицы, — то из чисел 1, 3, 9, 27 можно, складывая или вычитая их, составить все числа от 1 до 40. Мы как бы пишем все эти числа, употребляя вместо цифр — гири. Случай сложения отвечает при взвешивании тому случаю, когда гири помещаются все на одну чашку, а случай вычитания, когда часть гирь кладется на чашку с товаром, и, следовательно, вес ее отнимается от веса остальных гирь. Нуль соответствует отсутствию гири.

Задача № 46б

Как известно, эта система на практике не применяется. Всюду в мире, где введена метрическая система мер, применяется набор в 1, 2, 2, 5 единиц, а не 1, 3, 9, 27, — хотя первым можно отвешивать грузы только до 10 единиц, а вторым — до 40. Не применялся набор 1, 3, 9, 27 и тогда, когда метрическая система еще не была введена. В чем же причина отказа на практике от этого совершеннейшего разновеса?

Решение

Причина кроется в том, что идеальный разновес удобен только на бумаге, на деле же пользоваться им весьма хлопотливо. Если бы приходилось только отвешивать заданное число весовых единиц — напр., отвесить 400 грамм масла или 2500 грамм сахара, — то системой гирь в 100, 300, 900, 2700 можно было бы еще на практике пользоваться (хотя и тут приходилось бы каждый раз долго подыскивать соответствующую комбинацию). Но когда приходится определять, сколько весит данный товар, то подобный разновес оказывается страшно неудобным: здесь нередко, ради прибавления к поставленным гирям одной единицы, приходится производить полную замену прежней комбинации другой, новой. Отвешивание становится при таких условиях крайне медленным и притом утомительным делом. Не всякий быстро сообразит, что, например, вес 19 кг получится, если на одну чашку поставить гири в 27 кг и 1 кг, а на другую 9; вес 20 кг — если на одну чашку поставить гири в 27 кг и 3 кг, а на другую — 9 кг и 1 кг. При каждом отвешивании приходилось бы решать подобные головоломки. Разновес 1, 2, 2, 5 таких затруднений не доставляет.

42. ПРЕДСКАЗАТЬ СУММУ НЕНАПИСАННЫХ ЧИСЕЛ

Задача № 47

Одним из наиболее поражающих «номеров», выполняемых феноменальным русским вычислителем

---

[1] Единицу можно рассматривать, как нулевую степень 3 (вообще — как нулевую степень каждого числа).

Р. С. Арраго [1], является молниеносное — с одного взгляда — складывание целого столбца многозначных чисел.

Но что сказать о человеке, который может написать сумму еще раньше, чем ему названы все слагаемые?

Это, конечно, фокус, и выполняется он в таком виде. Отгадчик предлагает вам написать какое-нибудь многозначное число по вашему выбору. Бросив взгляд на это первое слагаемое, отгадчик пишет на бумажке сумму всей будущей колонны слагаемых и передает вам на хранение. После этого он просит вас (или кого-нибудь из присутствующих) написать еще одно слагаемое — опять-таки какое угодно. А затем быстро пишет сам третье слагаемое. Вы складываете все три написанных числа — и получаете как раз тот результат, который заранее был написан отгадчиком на спрятанной у вас бумажке.

Если, например, вы написали в первый раз 83 267, то отгадчик пишет будущую сумму 183 266. Затем вы пишете, допустим, 27 935, а отгадчик приписывает третье слагаемое — 72 064:

I	Вы:	83 267
III	Вы:	27 935
IV	Отгадчик:	72 064
II	Сумма	183 266

Получается в точности предсказанная сумма, хотя отгадчик не мог знать, каково будет второе слагаемое. Отгадчик может предсказать также сумму 5 или 7 слагаемых, — но тогда он сам пишет два или три из них. Никакой подмены бумажки с результатом здесь заподозрить вы не можете, так как она до последнего момента хранится в вашем собственном кармане. Очевидно, отгадчик пользуется здесь каким-то неизвестным вам свойством чисел. Каким?

Решение

Отгадчик пользуется тем, что от прибавления, скажем, к 5-значному числу числа из 5 девяток (99 999), это число увеличивается на 1 000 000 – 1, т. е. впереди него появляется единица, а последняя цифра уменьшается на единицу. Например:

$$\begin{array}{r} +\,83\,267 \\ 99\,999 \\ \hline 183\,266 \end{array}$$

Эту сумму — т. е. сумму написанного вами числа и 99 999 — отгадчик и пишет на бумажке, как будущий результат сложения. А чтобы результат оправдался, он, увидев ваше второе слагаемое, выбирает свое, третье слагаемое так, чтобы вместе со вторым оно составило 99999, т. е. вычитает каждую цифру второго слагаемого из 9. Эти операции вы легко можете теперь проследить на предыдущем примере, а также и на следующих примерах.

I	Вы:	379 264	I	Вы:	9935
III	Вы:	4873	III	Вы:	5669
IV	Отгадчик:	995 126	IV	Отгадчик:	4330
II	Сумма	1 379 263	II	Сумма	19 934

Легко усмотреть, что вы сильно затрудните отгадчика, если ваше второе слагаемое будет заключать больше цифр, чем первое: отгадчик не сможет написать слагаемого, которое уменьшит ваше второе число для оправдания предсказанного им слишком малого результата. Поэтому опытный отгадчик предупредительно ограничивает свободу вашего выбора этим условием. Фокус выходит внушительнее, когда в придумывании слагаемых участвует несколько лиц. После первого же слагаемого — например, 437 692 — отгадчик уже предсказывает сумму всех пяти чисел, именно записывает 2 437 690 (здесь будет добавлено дважды 999 999, т. е. 2 000 000 – 2). Дальнейшее ясно из схемы:

I	Вы написали:	437 692
III	Другой написал:	822 541
V	Третий написал:	263 009
IV	Отгадчик добавил:	177 468
VI	" "	736 990
II.	" предсказал:	2 437 690

42. ПРЕДУГАДАТЬ РЕЗУЛЬТАТ

Большое впечатление производят те арифметические фокусы, в которых отгадчик угадывает результат действий над совершенно неизвестными ему числами. Подобных фокусов существует много, и все они основаны на возможности придумать такой ряд арифметических действий, результат которых не зависит от чисел, над которыми они производятся. Рассмотрим фокусы этого рода. Признак делимости на 9 всем известен: число кратно 9, если сумма его цифр кратна 9. Припомнив, как выводится это правило, мы запасаемся еще и другим интересным правилом: если от числа отнять сумму его цифр, то получается остаток, кратный 9 (это доказывается попутно при выводе признака делимости на 9). Точно так же мы получим число, кратное 9, если отнимем от данного числа другое, которое составлено из тех же цифр, но размещенных в другом порядке. Например: 457 – (4 + 5 + 7) = 441, т. е. числу, кратному 9; или: 7843 – – 4738 = 3105, числу, кратному 9 [1]. Всем этим можно воспользоваться для выполнения несложного фокуса.

Задача № 48

Предложите товарищу задумать любое число и затем, переставив его цифры, в ином, каком угодно, поряд-

[1] Роман Семенович Арраго (настоящая фамилия Левитин) (1883–1949) — артист оригинального жанра, один из известнейших российских счетчиков. В 1908–1912 годах гастролировал по Европе, Южной Америке и Австралии. Выполнял сложные вычисления и номера мнемоники, решал задачи по возведению в степень и извлечению корня из десятизначных чисел, отвечал на вопросы зрителей о точных датах рождения знаменитых людей. В 1912 году окончательно вернулся в Россию. Большую часть жизни работал в СССР. В годы Великой Отечественной войны много выступал на заводах, в воинских частях, госпиталях, а после войны — в театрах и цирках. (Прим. ред.).

[1] Это свойство разности вытекает из «закона остатков», о котором мы упоминали раньше.

ке, вычесть меньшее число из большего. В полученном результате ваш товарищ зачеркивает одну цифру — безразлично какую — и читает вслух оставшиеся цифры, а вы сразу же называете скрытую от вас, зачеркнутую сумму. Как вы отгадываете ее?

Решение

Очень просто: вы знаете, что результат должен быть кратен 9, т. е. сумма его цифр должна без остатка делиться на 9. Быстро сложив в уме прочитанные вам цифры, вы легко можете сообразить, какой цифры не хватает, чтобы сумма была кратна 9. Например: задумано число 57 924; после перестановки получено 92 457. Вычитание дает результат 3?533, в котором знак вопроса стоит на месте зачеркнутой цифры. Сложив цифры

$$\begin{array}{r} -\,92\,457 \\ 57\,924 \\ \hline 3?\,533 \end{array}$$

3 + 5 + 3 + 3, получаем 14. Нетрудно сообразить, что зачеркнута была цифра 4, потому что ближайшее большее число кратное 9, есть 18, а 18 – 4 = 14.

Задача № 49

Тот же фокус можно обставить гораздо более эффектно, именно так, чтобы отгадать число, ничего не спрашивая у загадчика. Для этого проще всего предложить задумать трехзначное число с неодинаковыми крайними числами; затем, переставив цифры в обратном порядке, вычесть меньшее число из большего; в полученном результате переставить цифры и сложить оба числа. Окончательный результат всего этого ряда перестановок, вычитания и сложения вы называете изумленному загадчику без малейшего промедления или даже вручаете ему заранее в заклеенном конверте. Как это делается?

Решение

Секрет фокуса прост: какое бы число ни было задумано, в результате перечисленных действий всегда получается одно и то же: 1089. Вот несколько примеров:

$$\begin{array}{r} -\,763 \\ 267 \\ \hline +\,495 \\ 594 \\ \hline 1089 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\,431 \\ 134 \\ \hline +\,297 \\ 792 \\ \hline 1089 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\,982 \\ 289 \\ \hline +\,693 \\ 396 \\ \hline 1089 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\,291 \\ 192 \\ \hline +\,099 \\ 990 \\ \hline 1089 \end{array}$$

(Последний пример показывает, как должен поступать загадчик, когда разность получается двузначная).

Всматриваясь внимательно в ход выкладок, вы, без сомнения, поймете причину такого однообразия результатов. При вычитании неизбежно должна получаться в разряде десятков цифра 9, а по сторонам ее — цифры, сумма которых = 9. При последующем сложении должна поэтому получиться на первом справа месте цифра 9, далее, от 9 + 9, цифра 8 и единица в уме, которая при сложении с 9 сотнями дает 10. Отсюда — 1089.

Если вы станете повторять этот фокус несколько раз кряду, не внося в него никаких изменений, то секрет ваш, разумеется, будет раскрыт: загадчик сообразит, что постоянно получается одно и то же число 1089, хотя, быть может, и не отдаст себе отчета в причине такого постоянства. Вам необходимо поэтому видоизменять фокус. Сделать это нетрудно, так как 1089 = 33 × × 33 = 11 × 11 × 3 × 3 = 121 × 9 = 99 × 11. Достаточно поэтому просить загадчика, когда вы доведете его до числа 1089, разделить этот результат на 33, или на 11, или на 121, или на 99, или на 9 — и тогда лишь назвать получающееся число. У вас, следовательно, в запасе имеется 5 изменений фокуса, не говоря уже о том, что вы можете просить загадчика также умножить сумму на любое число, мысленно выполняя то же самое действие.

43. МГНОВЕННОЕ ДЕЛЕНИЕ

Из многочисленных разновидностей фокусов этого рода опишем один, основанный на знакомом уже нам свойстве множителя, состоящего из ряда одних девяток; когда умножают на него число с столькими же цифрами, получается результат, состоящий из двух половин: первая — это умножаемое число, уменьшенное на единицу; вторая — результат вычитания первой половины из множителя. Например: 247 × 999 = 246 753; 1372 × 9999 = 13 718 628 и т. п. Причину легко усмотреть из следующей строки:

$$247 \times 999 = 247 \times (1000 - 1) = 247\,000 - 247 =$$
$$= 246\,999 - 246.$$

Пользуясь этим, вы предлагаете целой группе товарищей произвести деление многозначных чисел — одному 68 933 106 : 6894; другому 876 432 348 : 9999; третьему 543456 : 544, четвертому 12948705 : 1295 и т. д., а сами беретесь обогнать их всех, выполняя те же задачи. И прежде, чем они успеют приняться за дело, вы уже вручаете каждому бумажку с полученным вами безошибочным результатом деления: первому — 9999, второму 87652, третьему — 999, четвертому — 9999.

Вы можете сами придумать по указанному образцу ряд других способов поражать непосвященных мгновенным выполнением деления: для этого воспользуйтесь некоторыми свойствами тех чисел, которые помещены в «Галерее числовых диковинок» (см. г. 23-36).

44. ЛЮБИМАЯ ЦИФРА

Задача № 50

Попросите кого-нибудь назвать его любимую цифру. Допустим, вам назвали цифру 6.

— Вот удивительно! — восклицаете вы. — Да ведь это как раз самая замечательная из всех значащих цифр.

— Чем же она замечательна? — осведомляется ваш озадаченный собеседник.

— А вот посмотрите: умножьте вашу любимую цифру на число значащих цифр, т. е. на 9, и полученное число (54) подпишите множителем под числом 12345679:

$$\begin{array}{r} \times\,12345679 \\ 54 \\ \hline \end{array}$$

Что получится в произведении?

Ваш собеседник выполняет умножение — и с изумлением получает результат, состоящий сплошь из его любимых цифр: 6 666 666 666.

— Вот видите, какой у вас тонкий арифметический вкус, — заканчиваете вы. — Вы сумели избрать из всех цифр как раз ту, которая обладает столь удивительным свойством!

Однако в чем тут дело?

Решение

Точно такой же изысканный вкус оказался бы у вашего собеседника, если бы он избрал какую-нибудь другую из 9 значащих цифр, потому что каждая из них обладает тем же свойством:

$$\begin{array}{r} 12345679 \\ \times 4 \times 9 \\ \hline 444\,444\,444 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12345679 \\ \times 7 \times 9 \\ \hline 777\,777\,777 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12345679 \\ \times 9 \times 9 \\ \hline 999\,999\,999 \end{array}$$

Почему это так, вы сообразите, если припомните то, что говорилось о числе 12345679 в «Галерее числовых диковинок».

45. УГАДАТЬ ДЕНЬ РОЖДЕНИЯ

Фокусы, относящиеся к этой категории, могут быть изменяемы на разные лады. Опишу один из видов этого фокуса, довольно сложный, но именно потому и производящий эффектное впечатление.

Задача № 51

Допустим, что вы родились 18 мая 1903 г. и что вам теперь 23 полных года. Но я не знаю ни даты вашего рождения, ни вашего возраста. Тем не менее я берусь отгадать то и другое, заставив вас проделать лишь некоторый ряд вычислений.

А именно: порядковый номер месяца (май, 5-й месяц), я прошу вас умножить на 100, прибавить к произведению число месяца (18), сумму удвоить, к результату прибавить 8, полученное число умножить на 5, к произведению прибавить 4, помножить результат на 10, прибавить 4 и к полученному числу прибавить ваш возраст (23).

Когда вы все это проделаете, вы сообщаете мне окончательный результат вычислений. Я вычитаю из него 444, а разность разбиваю на грани, справа налево, по 2 цифры в каждой: получаю сразу как день и месяц вашего рождения, так и ваш возраст.

Действительно. Проделаем последовательно все указанные вычисления:

$$\begin{array}{rcrcr} 5 & \times & 100 & = & 500 \\ 500 & + & 18 & = & 518 \\ 518 & \times & 2 & = & 1036 \\ 1036 & + & 8 & = & 1044 \\ 1044 & \times & 5 & = & 5220 \\ 5220 & + & 4 & = & 5224 \\ 5224 & \times & 10 & = & 52\,240 \\ 52\,240 & + & 4 & = & 52\,244 \\ 52\,244 & + & 23 & = & 52\,267 \end{array}$$

Произведя вычитание 52 267 – 444, получаем число 51 823.

Теперь разобьем это число на грани, справа налево, по две цифры в каждой. Имеем:

5 – 18 – 23,

т. е. 5-го месяца (мая), числа 18; возраст 23 года.

Почему же так получилось?

Решение

Секрет нашего фокуса легко понять из рассмотрения следующего равенства:

$$\Big\{\Big[(100m + t) \times 2 + 8\Big] \times 5 + 4\Big\} \times 10 + 4 + n - 444 =$$
$$= 10000m + 100t + n.$$

Здесь буква m обозначает порядковый номер месяца, t число месяца, n — возраст. Левая часть равенства выражает все последовательно произведенные вами действия, а правая — то, что должно получиться, если раскрыть скобки и проделать возможные упрощения.

В выражении 10000m + 100t + n ни m, ни t, ни n не могут быть более, чем двухзначными числами; поэтому число, получающееся в результате, всегда должно при делении на грани, по две цифры в каждой, распасться на три части, выраженные искомыми числами m, t и n.

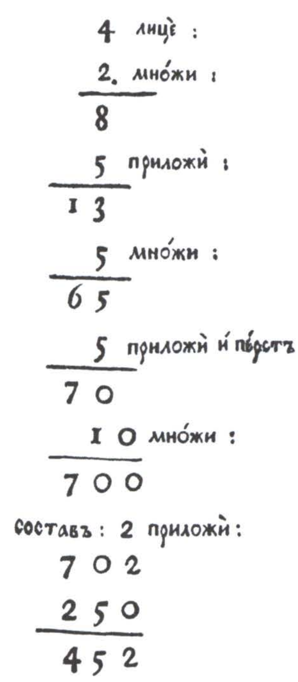
Предоставляем изобретательности читателя придумать видоизменения этого фокуса, т. е. другие комбинации действий, дающие подобный же результат.

46. ОДНО ИЗ «УТЕШНЫХ ДЕЙСТВИЙ» МАГНИЦКОГО

Задача № 52

Читателю же предлагаю раскрыть также секрет следующего незамысловатого фокуса, который описан еще в «Арифметике» Магницкого, в главе: «Об утешных некиих действиях, через арифметику употребляемых».

Пусть кто-либо задумает какое-нибудь число, относящееся к деньгам, к дням, к часам или к «каковой-либо иной числимой вещи». Остановимся на примере перстня, надетого на 2-й сустав мизинца (т. е. 5-го пальца) 4-го из 8 человек. Когда в это общество является отгадчик, его спрашивают: у кого из восьми человек (обозначенных номерами от 1 до 8), на каком пальце и на котором суставе находится перстень?



«Он же рече: кто-либо от вас умножи оного, который взял через 2, и к тому приложи 5, потом паки (снова) умнож чрез 5, также приложи перст на нем же есть перстень (т. е. к полученному прибавь номер пальца с перстнем). А потом умножи чрез 10 и приложи сустав на нем же перстень вложен, и от сих произведенное число скажи ми, по немуже искомое получиши».

«Они же твориша (поступили) якоже повеле им, умножаху четвертого человека который взял перстень, и прочая вся, яже велеше им; якоже явлено есть (см. выкладки); из всего собрания пришло ему число 702, из него же он вычитал 250, осталось 452, т. е. 4-й человек, 5-й палец, 2-й сустав».

Не надо удивляться, что этот арифметический фокус был известен еще 200 лет назад: задачи совершенно подобного же рода я нашел в одном из первых сборников математических развлечений, именно у Баше де Мезирьяка [1], в его книге «Занимательные и приятные числовые задачи», вышедшей в 1612 году; а туда она попала из сочинения Леонардо Пизано [2] (1202 г.). Нужно вообще заметить, что большая часть математических игр, головоломок и развлечений, которые в ходу в настоящее время, очень древнего происхождения.

Решение задачи № 29 (с. 23).

По 4-ной системе — 27; по 5-ной — 38; по 6-ной — 51; по 7-ной — 66; по 8-ной — 83; по 9-ной — 102. Число это не может быть написано ни по двоичной, ни по троичной системе, так как содержит цифру 3, которой в этих системах нет. Число это по 5-ной системе делится на 2, так как сумма его цифр делится на 2. По 7-ной системе оно делится на 6, а по 9-ной не делится на 4.

Очень часто случается, что известные или даже выдающиеся люди, вскользь упоминаемые в текстах многих книг, выпадают в дальнейшем из поля нашего зрения. Хотя про них впору писать отдельные книги, не менее насыщенные и интересные чем оригинал. Чтобы в какой-то степени исправить это положение дел, познакомимся с двумя выдающимися математиками древности Баше де Мезириаком (написание Мезирьяк считается неверным). и Леонардо Пизанским, известным под прозвищем Фибоначчи.

Итак. Клод Гаспар Баше де Мезириак родился на востоке Франции в маленьком городке Бурк-ан-Брес в 1581 г. Ему повезло, он был отпрыском состоятельной дворянской семьи, что позволило без проблем получить прекрасное образование. Но и сам он соответствовал своим родителям, Клод был разносторонне одаренным юношей, что позволило ему изучить несколько языков, писать стихи на них, а также проявить себя незаурядным математиком.

Баше де Мезириак всесторонне исследовал наследие древнегреческого математика Диофанта и выпустил в свет его книгу «Арифметика» в собственном переводе на латынь, снабдив ее всеобъемлющими комментариями. Книга получилась настолько удачной, что широко распространилась среди ученых того времени. Пьер Ферма, для которого «Арифметика» Диофанта являлась настольной книгой, именно на ее полях сделал знаменитую запись с формулировкой своей Великой теоремы. Кроме этого ученый занимался специальными математическими задачами, решение которых стало фундаментом для математиков XVII в., в частности Этьена Безу и Жозефа Лагранжа.

Кроме «серьезных» работ, Баше выпустил знаменитую книгу, которая и привлекла внимание Я. Перельмана, — сборник занимательных арифметических задач «Problèmes plaisants» (буквально — Приятные проблемы).

Другим не менее интересным математиком, кратко упомянутым выше, является Леонардо Пизанский по прозвищу Фибоначчи. Сразу заметим, что оно просто значило сын Боначчи; по другой версии — «удачливый».

Тут надо заметить, что удача с самого рождения преследовала будущего математика. Его отцом был крупный купец того времени, работавший в Северной Африке, где он возглавлял пизанскую торговую колонию. По современным представлением, это был пост не ниже зама министра торговли в крупном регионе.

Подросший Леонардо поехал вместе с отцом в Алжир, где получил качественное математическое образование, ориентированное на торговлю и методы торговых расчетов пропорций, процентных долей и т. д. Странствуя вместе с отцом по делам его службы, Фибоначчи получил возможность набираться умаразума и математических знаний у мудрецов Египта, Сирии, Византии, Сицилии.

По возвращению в Европу Фибоначчи обобщает накопленные знания и выпускает в свет свою первую книгу «Книгу Абака». В ней он предложил революционные методы позиционной системы счисления, когда значение числа зависит от того, на каких позициях стоят цифры, его составляющие. По сравнению с римской системой счисления это было совершенно новое и прогрессивное счисление, которое значительно упрощало вычисления, которыми занимались многочисленные купцы, строители и все те, кому приходилось делать подсчеты. И конечно, это была десятичная система, самая удобная и естественная в повседневной жизни.

Кроме этого математик исследовал и другие многочисленные вопросы математики того времени. Среди них заслуживают отдельного упоминания числа Фибоначчи, особый числовой ряд, который лежит в основе многих процессов на Земле. В частности, для современного человека, этот ряд интересен тем, что позволяет предсказывать результаты торгов на валютных биржах мира.

[1] Клод Гаспар Баше, сьер де Мезирьяк (1581–1638) — французский математик, поэт, лингвист, переводчик. Один из первых членов Французской академии.

[2] Леонардо Пизанский (1170–1250) — первый крупный математик средневековой Европы. Наиболее известен под прозвищем Фибоначчи.

47. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ И МНИМЫЕ ФЕНОМЕНЫ

Кому приходилось присутствовать на сеансах нашего русского вычислителя Арраго, тот, без сомнения, не мог не поразиться его изумительными счетными способностями. Тут уж перед нами не фокус, а редкое природное дарование. Не существует «трюков» для выполнения в уме таких выкладок, как возвышение в куб любого четырехзначного числа или умножение любого шестизначного числа на шестизначное. Куб числа 4729, например, Арраго вычислил при мне в уме менее чем в одну минуту (результат 105 756 712 489), а на умножение 679 321 × 887 064, также в уме, употребил всего 1 ½ минуты (результат 602 601 203 544).

Я имел возможность наблюдать вычислительную работу этого феноменального счетчика не только на эстраде, но и в домашней обстановке, с глазу на глаз, и мог убедиться, что никакими особыми вычислительными приемами он не пользуется, а вычисляет в уме в общем так же, как мы на бумаге. Но его необычайная память на числа помогает ему обходиться без записи промежуточных результатов, а быстрая сообразительность позволяет оперировать с двузначными числами с такою же легкостью, с какою мы производим действия над числами однозначными. Благодаря этому умножение шестизначного числа на шестизначное является для него задачей не большей, примерно, трудности, чем для нас — умножение трехзначного на трехзначное.

Такие феномены, как Арраго или — на Западе — Иноди, Диаманди, Рюкле [1], встречаются единицами. Но наряду с ними подвизаются и эстрадные математики иного рода, основывающие свое искусство на тех или иных арифметических трюках. Вам, быть может, приходилось слышать или даже присутствовать самим на сеансах «гениальных математиков», вычислявших в уме с поразительной быстротой, сколько вам недель, дней, минут, секунд, в какой день недели вы родились, какой день будет такого-то числа такого-то года и т. п. Чтобы выполнить большую часть этих вычислений, вовсе не нужно, однако, обладать необычайными математическими способностями. То же самое может после недолгого упражнения проделать и каждый из нас. Нужно только знать кое-какие секреты этих фокусов, разоблачением которых мы сейчас и займемся.

[1] Жак Иноди, Урания Диамонди, доктор Рюкле знаменитые «люди-счетчики» начала XX века.

48. «СКОЛЬКО МНЕ НЕДЕЛЬ?»

Чтобы научиться по числу лет быстро определять число заключающихся в них недель, нужно только уметь ускоренно множить на 52, т. е. на число недель в году.

Задача № 53

Пусть дано перемножить 36 × 52. «Счетчик» сразу же, без заминки, говорит вам результат: 1872. Как он его получил?

Решение

Довольно просто: 52 состоит из 50 и 2; 36 умножается на 5 через деление пополам; получается 18 — это две первые цифры результата: далее умножение 36 на 2 делается как обыкновенно; получают 72, которые и приписываются к прежним 18: 1872.

Легко увидеть, почему это так. Умножить на 52 — значит умножить на 50 и на 2; но вместо того, чтобы умножить на 50, можно половину умножить на 100 — отсюда понятно деление пополам; умножение же на 100 достигается припиской 72 (36 × 2), отчего каждая цифра увеличивается в 100 раз (передвигается на два разряда влево).

Теперь понятно, почему «гениальный» счетчик так быстро отвечает на вопрос «мне столько-то лет; сколько мне недель?». Умножив число лет на 52, ему остается только прибавить еще к произведению седьмую часть числа лет, потому что в году 365 дней, т. е. 52 недели и 1 день: каждые 7 лет из этих избыточных дней накапливается лишняя неделя [1].

49. «СКОЛЬКО МНЕ ДНЕЙ?»

Если спрашивают не о числе недель, а о числе дней, то прибегают к такому приему: половину числа лет множат на 73 и приписывают нуль — результат и будет искомым числом. Эта формула станет понятна, если заметить, что 730 = 365 × 2. Если мне 24 года, то число дней получим, умножив 12 × 73 = 876 и приписав нуль — 8760. Само умножение на 73 также производится сокращенным образом, о чем речь впереди (см. 51. ПРИЕМЫ УСКОРЕННОГО УМНОЖЕНИЯ).

Поправка в несколько дней, происходящая от високосных лет, обыкновенно в расчет не принимается, хотя ее легко ввести, прибавив к результату четверть числа лет, — в нашем примере 24 : 4 = 6; общий результат, следовательно, 8766 .[2]

Прием для вычисления числа минут читатель, после сказанного в следующей статье, не затруднится найти самостоятельно.

50. «СКОЛЬКО МНЕ СЕКУНД?»

Задача № 54

На этот вопрос также можно довольно быстро ответить, пользуясь следующим приемом: половину числа лет умножают на 63; затем ту же половину множат на 72, результат ставят рядом с первым и приписывают три нуля. Если, например, число лет 24, то для определения числа секунд поступают так:

$$63 \times 12 = 756;\ 72 \times 12 = 864;\ \text{результат } 756\,864\,000$$

Как и в предыдущем примере, здесь не приняты в расчет високосные годы — ошибка, которой никто не поставит вычислителю в упрек, когда приходится иметь дело с сотнями миллионов.

На чем же основан указанный здесь прием?

Решение

Правильность нашей формулы выясняется очень просто. Чтобы определить число секунд, заключающихся в данном числе лет, нужно лета (в нашем примере 24) умножить на число секунд в году, т. е. на 365 × 24 × 60 × 60 = 31 536 000. Мы делаем то же самое, но только большой множитель 31 536 разбиваем на две части (приписка нулей сама собой понятна). Вместо того, чтобы умножать 24 × 31 536, умножают 24 на 31 500 и на 36, но и эти действия мы для удобства вычислений заменяем другими, как видно из следующей схемы:

$$24 \times 31\,536 = \begin{cases} 24 \times 31\,500 = 12 \times 63\,000 = 756\,000 \\ 24 \times \quad 36 = 12 \times \quad 72 = \underline{\qquad 864} \end{cases}$$
$$756\,864$$

Остается лишь приписать три нуля — и мы имеем искомый результат: 756 864 000.

51. ПРИЕМЫ УСКОРЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

Мы упоминали раньше, что для выполнения тех отдельных действий умножения, на которые распадается каждый из указанных выше приемов, существуют также удобные способы. Некоторые из них весьма не сложны и удобоприменимы; они настолько облегчают вычисления, что мы советуем читателю вообще запомнить их, чтобы пользоваться при обычных расчетах. Таков, например, прием перекрестного умножения, весьма удобный при действии с двузначными числами. Способ этот не нов; он восходит к грекам и индусам и в старину назывался «способом молнии», или «умножением крестиком». Теперь он хорошо забыт, и о нем не мешает напомнить [3].

Пусть дано перемножить 24 × 32. Мысленно располагаем числа по следующей схеме, одно под другим:

$$\begin{array}{ccc} 2 & & 4 \\ | & \times & | \\ 3 & & 2 \end{array}$$

Теперь последовательно производим следующие действия:

1) 4 × 2 = 8 — это последняя цифра результата;

2) 2 × 2 = 4; 4 × 3 = 12; 4 + 12 = 16;
6 — предпоследняя цифра результата;
1 запоминаем.

3) 2 × 3 = 6, да еще удержанная в уме единица, имеем 7 — это первая цифра результата.

Получаем все цифры произведения: 7, 6, 8 — 768.

После непродолжительного упражнения прием этот усваивается очень легко.

Другой способ, состоящий в употреблении так называемых дополнений, удобно применяется в тех случаях, когда перемножаемые числа близки к 100.

Пусть требуется перемножить 92 × 96. «Дополнение» для 92 до 100 будет 8; для 96 — 4. Действие производят по следующей схеме:

множители: 92 и 96

дополнения: 8 и 4

Первые две цифры результата получаются простым вычитанием из множителя «дополнения» множимого или наоборот; т. е. из 92 вычитают 4, или из 96 — 8. В том и другом случае имеем 88; к этому числу приписывают произведение «дополнений»: 8 × 4 = 32. Получаем результат 8832.

---

[1] Нетрудно ввести поправку и на високосные годы.

[2] Указанными далее приемами ускоренного умножения эти операции облегчаются до чрезвычайности, и миллионный результат получается очень быстро. Советую читателю попробовать произвести то же вычисление и обыкновенным путем, чтобы на деле убедиться, какая экономия во времени получается при пользовании указанной формулой и нижеприведенными приемами.

[3] Впрочем, в последние годы способ этот снова стал входить в употребление — главным образом, благодаря деятельной пропаганде замечательного германского счетчика, инженера Ф. Ферроля. В Америке выдающиеся педагоги высказывались за введение его в школе взамен нынешнего, довольно медленного способа.

Что полученный результат должен быть верен, наглядно видно из следующих преобразований:

$$92 \times 96 = \left\{ \begin{array}{l} 88 \times 96 = 88\,(100 - 4) = 88 \times 100 - 88 \times 4 \\ \;\,4 \times 96 = \;\;4\,(\;88 + 8) = \underline{\;4 \times \quad 8 + 88 \times 4} \end{array} \right.$$

$$92 \times 96 = \qquad\qquad\qquad\qquad 8832 + 0$$

51. КАКОЙ ДЕНЬ НЕДЕЛИ?

Умение быстро определять день недели, на какой приходится та или иная дата (напр., 17 января 1893 г., 4 сентября 1943 г. и т. п.) основано на знании особенностей нашего календаря, которые мы сейчас и изложим.

1 января 1-го года нашей эры приходилось (это установлено расчетом) на субботу. Так как в каждом простом году 365 дней, или 52 полных недели и 1 день, то год должен кончаться тем же днем недели, каким начался; поэтому последующий год начинается одним днем недели позже, чем предыдущий. Если 1 января 1-го года была суббота, то 1 января 2-го года было днем позже, т. е. воскресенье, 3-го года — на 2 дня позже; а 1 января например, 1923-го года было бы на 1922 дня (1923 – 1) после субботы, — если бы не было ни одного високосного года. Число високосных лет мы найдем, разделив 1923 на 4 = 480; но отсюда, для нового стиля, надо исключить календарную разницу в 13 дней [1]: 480 – 13 = 467. К полученному числу надо прибавить число дней, протекших после 1 января 1923-го года до определяемой даты — скажем для примера, до 14 декабря: это составит 347 дней. Сложив 1922, 467 и 347, мы

$$\begin{array}{r} 1922 \\ +\;467 \\ \underline{347} \\ 2736 \end{array}$$

делим сумму на 7, и по полученному остатку 6 определяем, что 14 декабря 1923-го года приходилось на 6 дней после субботы, а именно в пятницу. Такова сущность вычислений недельного дня любой даты. На практике дело значительно упрощается. Прежде всего заметим, что в течение каждого 28-летнего периода бывает, вообще говоря, 7 високосных лет (неделя), — так что каждые 28 лет день недели любой даты должен повторяться. Кроме того, вспомним, что в предыдущем примере мы вычли из 1923 сначала 1, а затем календарную разницу обоих стилей, т. е. 13, всего 1+13 = 14 дней, или две полных недели. Но полное число недель, понятно, не влияет на результат. Поэтому для дат XX века надо принимать во внимание только:

1) число дней, протекших с 1 января данного года — в нашем примере 347; затем

2) прибавить число дней, соответствующее остатку лет 347 от деления 1923 на 28, и наконец,

$$\begin{array}{r} 347 \\ +\;19 \\ \underline{4} \\ 370 \end{array}$$

[1] Разница между юлианским и григорианским календарями. В России григорианский календарь (новый стиль) вместо юлианского (старый стиль) был введен в 1918 году.

3) число високосных лет в этом остатке, т. е. 4. Сумма 4 этих трех чисел (347 + 19 + 4), т. е. 370, дает при делении на 7 тот же остаток 6 (пятница), который был получен нами раньше.

Таким же образом мы найдем, что 15 января 1923 г. приходилось на понедельник (14 + 19 + 4 = 37; 37 : 7 — в остатке 2). Для 9 февраля нового стиля 1917 г. мы нашли бы 39 + 13 + 3 = 55; при делении 55 на 7 получаем в остатке 6 — пятница. Для 29 февраля нов. ст. 1904 г.: 59 + 0 – 1 [2] = 58; остаток от деления на 7 здесь 2 — понедельник.

Дальнейшее упрощение состоит в том, что вместо полного числа дней месяца (при исчислении числа дней, протекших после 1 января заданного года), принимают в расчет только его остаток от деления на 7. Далее, разделив 1900 на 28, получаем в остатке 24 года, в которых содержится 5 високосных лет; прибавив их к 24 и найдя, что сумма 24 + 5, т. е. 29, дает при делении на 7 остаток 1, определяем, что 1 января 1900 года было в 1-й день недели. Отсюда для первых чисел каждого месяца получаем следующие цифры, определяющие соответствующие им дни недели (мы будем их называть «остаточными числами»).

Остаточные числа для:

января			1
февраля	1 + 31 = 32,	или	4
марта	4 + 28 = 32,	или	4
апреля	4 + 31 = 35,	или	0
мая	0 + 30 = 30,	или	2
июня	2 + 31 = 33,	или	5
июля	5 + 30 = 35,	или	0
августа	0 + 31 = 31,	или	3
сентября	3 + 31 = 34,	или	6
октября	6 + 30 = 36,	или	1
ноября	1 + 31 = 32,	или	4
декабря	4 + 30 = 34,	или	6

Запомнить эти числа нетрудно; кроме того, их можно нанести на циферблат карманных часов, поставив возле каждой цифры циферблата соответствующее число точек [3].

Сделаем теперь расчет дня недели, например, для 31 марта 1923 г.

Число месяца 31
Остаточное число для марта 4
С начала столетия прошло лет 23
В том числе високосных 5
Сумма 63

Остаток от деления на 7 . . . 0 — суббота.

Задача № 55

Найти день недели 16 апреля 1948 года.

[2] Деля 1904 на 28, мы уже учли, что 1904-й год — високосный; беря же в феврале 29 дней, мы учитываем это обстоятельство второй раз. Поэтому надо лишний день откинуть.

[3] На стр. 44 приложен чертеж такого циферблата.

Число дней месяца 16
Остаточное число для апреля 0
С начала столетия прошло лет........48
В том числе високосных 12
............................Сумма 76

Остаток отделения на 7 . . . 6 — пятница.

Задача № 56

Найти день недели 29 февраля 1912 г. (нов. ст.).

Решение

Число дней месяца 29
Остаточное число для февраля 4
Сначала столетия прошло лет 12
В том числе високосных [1] 2
.... Сумма 47

Остаток от деления на 7 . . . 5, — четверг.

Для дат предшествующих столетий (XIX, XVIII и т. д.) можно пользоваться теми же числами; но надо помнить, что в XIX веке разница между новым и старым стилем была не 13, а 12 дней; кроме того, при делении 1800 на 28 получается в остатке 8, что вместе с 2 високосными годами в этом остатке составляет 10 (или 10 – 7 = 3), т. е. соответствующее характерное число для дат XIX века должно быть увеличено на 3 – 1 = 2. Так что, например, день недели 31 декабря нов. ст. 1864 года мы определим сначала по предыдущему, а затем внесем соответствующую поправку — прибавим 2 дня:

Число дней месяца 31
Остаточное число для декабря 6
С начала столетия прошло лет......... 64
В том числе високосных 16
Поправка для XIX в. 2
.... Сумма 119

Остаток от деления на 7 . . . 0 — суббота.

Задача № 57

Найти день недели 25 апреля нов. ст. 1886 года

Решение

Число дней месяца 25
Остаточное число для апреля 0
С начала столетия прошло лет........86
В том числе високосных 21
Поправка для XIX в....................2
............................Сумма 134

Остаток от деления на 7 . . . 1 — воскресенье.

После недолгого упражнения можно и еще более упростить вычисления, а именно — писать вместо приведенных здесь чисел прямо их остатки от деления на 7. Например, день недели 24 марта 1934 года мы определим в результате следующих простых выкладок:

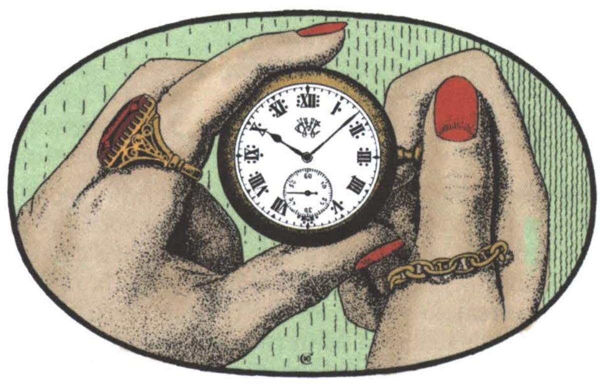
Вместо числа месяца (24) 3
Остаточное число для марта 4
Вместо числа лет, прошедших от 1900 г. . . . 6
В том числе високосных 1
.... Сумма 0 (вместо 14)

Искомый день — суббота.

Подобного рода упрощенными приемами пользуются обычно те мнимые «гениальные математики», которые показывают публике свое искусство быстрого счета. Как видите, все это очень просто и может быть выполнено каждым после непродолжительного упражнения [2].

52. КАЛЕНДАРЬ НА ЧАСАХ

Знание этих маленьких секретов может не только пригодиться нам для выполнения фокусов, но и сослужить службу в повседневной жизни. Мы легко можем превратить свои карманные часы в «вечный календарь», с помощью которого сможем определить дни недели любых дат какого угодно года. Для этого понадобится только, осторожно сняв стеклышко с часов, нанести на циферблате тушью точки возле цифр, в числе соответствующем таблице (с. 45). Как пользоваться



этими точками, мы уже знаем. Особенно просто это для дат XX столетия: к числу точек прибавляют число месяца, последние две цифры года и частное от деления их на 4, а еще лучше — остатки от деления этих чисел на 7. Остаток от деления суммы этих 4 слагаемых на 7 показывает день недели, а именно:

0 — суббота

1 — воскресенье.

2 — понедельник.

3 — вторник и т. д.

Еще проще пользование часами-календарем для дат

[1] Принято во внимание, что один високосный год уже был учтен, когда мы взяли дату 29 февраля. Поэтому пишем не 3 високосных года, а 2.

[2] Способов сокращенного вычисления календарных дат существует множество. Я изложил здесь самый простой из известных мне приемов, употребляемый упомянутым выше германским математиком, Ф. Ферролем, прославившимся своими поразительно быстрыми устными вычислениями.

I	1
II	4
III	4
IV	0
V	2
VI	5
VII	0
VIII	3
IX	6
X	1
XI	4
XII	6

текущего года. Для каждого года нужно лишь держать в памяти остаток от деления на 7 суммы числа прошедших от начала века лет и четверти этого числа; этот остаток постоянно должен прибавляться к числу месяца определяемой даты вместе с числом точек возле соответствующей цифры. Остаток этот можно было бы прибавить к числу точек и наносить ежегодно на циферблат, чтобы не было надобности вводить его в вычисление особо. Но едва ли это практично.

Само собою разумеется, что «вечный календарь» указанного типа возможно устроить не только на карманных часах. Вы можете просто приклеить к карандашу, линейке, к краю записной книжки, вообще к любому предмету, часто бывающему у вас под руками, узенькую полоску бумаги с соответствующей табличкой чисел характерных для каждого месяца, и маленький вездесущий вечный календарь готов.

53. КАЛЕНДАРНЫЕ ЗАДАЧИ

Читателям, желающим испытать свои силы в решении разнообразных календарных задач, предлагаю ответить на следующие вопросы.

Почему ежегодно все числа апреля бывают в те же дни недели, что и в июле? Все числа марта бывают в те же дни недели, что и в ноябре? Сентябрьские даты — в те же дни недели, что и декабрьские? Майские — в те же дни, что и январские следующего года?

Почему в високосные годы 1 января бывает тот же день недели, что и 1 октября? 1 февраля, 1 марта и 1 ноября бывает один и тот же день недели?

Объясните, почему в пределах одного столетия календарь повторяется каждые 28 лет? Почему в течение этого 28-летнего периода одни и те же числа месяцев приходятся на одинаковые дни недели через следующие промежутки: 11 лет, 6 лет, 5 лет, 6 лет?

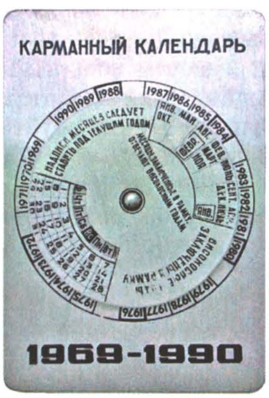
Объясните, почему даты какого-либо года XX в. повторяются в те же дни недели, в какие приходились они в XIX в. 40 и 96 лет назад?

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КУРЬЕЗ

$2^5 9^2 = 2592$

Предложенный Я. Перельманом вариант вечного календаря на карманных часах слишком сложен для современного человека. И, к сожалению, не потому, что карманные часы вышли из моды и практически исчезли из обихода.

Как это не прискорбно констатировать, но вследствие повсеместного распространения электронных устройств, «поголовно» снабженных калькуляторами, устный счет стал изгоем. Причина, видимо, кроется в переполненности современной жизни информацией, которая мешает сосредоточиться и не торопясь выбрать самую важную информацию для пользования, а лишнее решительно «выкинуть из головы».



Поэтому в недавнем прошлом, когда электронная революция еще только готовилась, были предприняты попытки к распространению новых моделей «Вечных календарей», которые выдавали в простой и понятной форме дни недели необходимых дат.

Само построение «вечного» календаря основано на цикличности: раз в 28 лет цикл начинается заново и становится идентичным предыдущему.

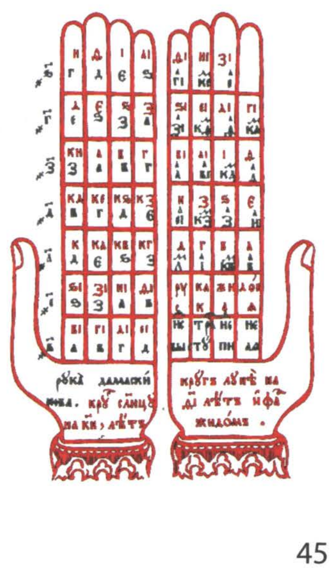
Здесь, однако, надо пояснить, что понятие «вечный» конечно же не охватывает всю временную шкалу, а лишь разумную ее часть. Как правило протяженностью 20-30 лет. Этого даже слишком много, поскольку любой «нормальный» человек успеет за это время потерять свой календарь десять раз. А если этого не случится, то календарь придет в негодность от такой длительной «эксплуатации».

В конце-концов появились «вечные» календари нескольких видов. Самыми распространенными стали табличные календари, содержавшие как правило две таблицы, из которых надо было выбирать значения, чтобы получить результат.

Другой разновидностью были дисковые календари. Диск имел несколько вырезов и круговую таблицу. Он крепился осью к основанию, на котором была нанесена своя таблица. Вращая диск относительно основания и совмещая определенным образом значения нанесенные на них, можно было выяснить день недели необходимой даты.

Интересно отметить, что на Руси был свой «вечный» календарь, которым пользовались наши предки. Он назывался «Вруцелето» от древне-славянских слов «рука» и «лето» в значении года. То есть – «В руке – год».

Исчисление производилось с помощью специальных таблиц, а также рук человека. А именно сгибов пальцев, которые обозначали так называемые вруцелетные буквы древнерусского алфавита А, В, Г, Д, Е, S и З. Летоисчисление велось от Сотворения мира и предназначалось для определения дат Пасхалии.



С появлением персональных электронных устройств, в которых календари программируются на «веки вечные», надобность в картонных или даже в алюминиевых механических приборах отпала.

54. КАК ВЕЛИК МИЛЛИОН?

Величественная внушительность числовых великанов — миллиона, миллиарда, даже триллиона — заметно померкла в наших глазах за последнее время, с тех пор как числа эти вместе с потоком бумажных денег проникли в нашу повседневную жизнь [1]. Когда месячные расходы в хозяйстве небольшой семьи достигали миллиардов, а бюджет второстепенного учреждения выражался триллионами, естественна была мысль, что эти некогда недоступные воображению числа вовсе не так огромны, как твердили нам до сих пор. Трудно поражаться громадности семизначного числа рублей, за которое не давали и полной крынки молока. Не подавляет ума миллиард, на который не купишь сапог.

Но было бы заблуждением думать, что благодаря проникновению числовых великанов из своих недоступных высот в прозу житейского обихода мы познакомились с ними лучше, чем раньше. Миллион по прежнему остается для большинства людей тем, чем и был — «знакомым незнакомцем». Скорее даже наоборот: ходячее представление о миллионе сделалось еще превратнее. Мы и раньше склонны были преуменьшать величину этого числа, превышающего силу нашего воображения. Когда же миллионными числами стали выражаться весьма скромные, в сущности, ценности, миллион сжался в нашем воображении до размера довольно обыкновенного, легко доступного числа. Мы впадали при этом в курьезную психологическую ошибку: то, что миллион рублей сделался сравнительно небольшой суммой, мы относили не за счет уменьшения денежной единицы, а за счет уменьшения миллиона. Многие воображали, что им довелось, наконец, постичь величину миллиона, который оказался вовсе не так огромен, как трубит его будто бы незаслуженная слава. Я слышал, как человек, узнав впервые, что от Земли до Солнца 150 миллионов километров, простодушно воскликнул:

— Только всего?

Другой, прочтя, что от Петрограда до Москвы миллион шагов, заметил:

— Только один миллион шагов до Москвы? А мы-то платим за билет двести миллионов!…

Большинство людей, так свободно обращавшихся с миллионами при денежных расчетах, все-таки не отдавали себе ясного отчета в том, насколько эти числа огромны. Для этого следовало бы упражняться в миллионном счете не таких изменчивых единиц, как рубль, а предметов всегда сохраняющих в нашем воображении одну и ту же постоянную величину. Если вы хотите ощутить истинные размеры миллиона — попробуйте хотя бы проставить в чистой тетради миллион точек. Я не предлагаю вам доводить такую работу до конца (на это едва ли у кого достанет терпения); уже одно начало работы, его медленный ход даст вам почувствовать, что такое «настоящий» миллион.

Английский натуралист А. Р. Уоллес, знаменитый сподвижник Дарвина, придавал весьма серьезное значение развитию правильного представления о миллионе. Он предлагал [2] «в каждой большой школе отвести одну комнату или залу, на стенах которой можно было бы наглядно показать, что такое миллион. Для этой цели нужно иметь 100 больших квадратных листов бумаги, в 4 ½ фута каждый, разграфленных квадратиками в четверть дюйма, оставив равное число белых промежутков между черными пятнами. Через каждые 10 пятен нужно оставлять двойной промежуток, чтобы отделить каждую сотню пятен (10 × 10). Таким образом на каждом листе будет по 10 тысяч черных пятен, хорошо различимых с середины комнаты, а все сто листов будут содержать миллион пятен. Такая зала была бы в высшей степени поучительна, особенно в стране, где о

[1] В 1921 году реальная стоимость 100 тыс. руб. совзнаков равнялась стоимости одной дореволюционной копейки. В 1924 году по итогам всех деноминаций в стране возник советский рубль, равный 50 миллиардам рублей периода до 1922 года.

[2] В книге «Положение человека во вселенной».

миллионах говорят очень развязно и тратят их без смущения [1]. Между тем, никто не может оценить достижений современной науки, имеющей дело с невообразимо большими или невообразимо малыми величинами, если не способен их представить наглядно и, суммируя в целое, вообразить себе, как велико число один миллион, когда современной астрономии и физике приходится иметь дело с сотнями, тысячами и даже миллионами таких миллионов [2]. Во всяком случае, очень желательно, чтобы в каждом большом городе была устроена такая зала для наглядного показания на ее стенах величины одного миллиона».

Я предлагаю другой, более доступный для каждого, способ развить в себе возможно отчетливое представление о величине миллиона. Для этого нужно только дать себе труд поупражняться в мысленном миллионном счете и суммировании размеров мелких, но хорошо знакомых нам единиц — шагов, минут, спичек, стаканов и т. п. Результаты получаются нередко неожиданные, поразительные.

Приведем несколько примеров.

55. МИЛЛИОН СЕКУНД

Задача № 58

Как вы думаете, сколько времени отняла бы у вас работа — пересчитать миллион каких-либо предметов, по одному каждую секунду?

Решение

Оказывается, что, считая безостановочно по 10 часов в сутки, вы закончили бы подсчет в месяц времени! Приблизительно удостовериться в этом нетрудно даже устным вычислением: в часе 3600 секунд, в 10 часах — 36 000; в трое суток вы, следовательно, пересчитаете всего около100 тысяч предметов; а так как миллион в 10 раз больше, то, чтобы досчитать до него, понадобится 30 дней [3].

Отсюда следует, между прочим, что предложенная ранее работа — проставить в тетради миллион точек — потребовала бы много недель самого усердного и неустанного труда [4]. Да и тетрадь для этого понадобилась бы страниц в тысячу. Тем не менее такой труд был однажды выполнен. В распространенном английском журнале я видел как-то воспроизведение страницы из тетради, «единственное содержание которой составляет миллион аккуратно расставленных точек, по тысяче на странице». Все 500 листов этой тетради были разграфлены карандашом и заполнены рукой одного беспримерно терпеливого учителя чистописания в середине прошлого столетия.

56. В МИЛЛИОН РАЗ ТОЛЩЕ ВОЛОСА

Задача № 59

Тонкость волоса вошла чуть ли не в поговорку. Все часто видят волос и хорошо знают, насколько он тонок. Толщина человеческого волоса — около 0,07 мм. Мы округлим ее до 0,1 мм. Представьте себе, однако, что волос стал в миллион раз толще — какова тогда была бы его толщина. Был ли бы он толщиной в руку? В бревно? Или в большую бочку? Или, может быть, ширина его достигла бы ширины комнаты средних размеров?

Если вы никогда не задумывались над такой задачей, то можно поручиться, что, не проделав вычисления — вы дадите грубо ошибочный ответ. Мало того: вы будете, пожалуй, даже оспаривать правильный ответ — настолько покажется он неправдоподобным. Каков же он?

Решение

Оказывается, что волос, увеличенный по толщине в миллион раз, имел бы около сотни метров в поперечнике! Это кажется невероятным, но дайте себе труд сделать подсчет, и вы убедитесь, что так и есть: 0,1 мм × × 1000000 = 0,1 м × 1000 = 0,1 км = 100 м.)

57. УПРАЖНЕНИЯ С МИЛЛИОНОМ

Проделаем — попытайтесь выполнить это устно — еще ряд упражнений, чтобы освоиться надлежащим образом с величиною миллиона.

Задача № 60

Величина обыкновенной комнатной мухи общеизвестна — около 7 мм в длину. Но какова была бы ее длина при увеличении в миллион раз?

Решение

Умножим 7 мм на 1 000 000, получим 7 км — примерно ширина Москвы или Ленинграда. С трудом верится, что муха или комар, увеличенная по длине в миллион раз, могли бы покрыть своим телом столичный город!

Задача № 61

Увеличьте мысленно в миллион раз (по ширине) ваши карманные часы — и получите снова поражающий результат, который едва ли вам удастся предугадать. Какой?

---

[1] Перельману удалось осуществить эту затею в павильоне занимательной науки на Елагином острове. На темно-синем потолке зала посетители видели бесчисленное множество ярко-желтых кружков. Весь потолок был густо усыпан ими. Россыпь на потолке представляла один миллион.

[2] Например, взаимные расстояния планет измеряются десятками и сотнями миллионов километров, расстояние звезд — миллионами миллионов километров, а число молекул в кубическом сантиметре окружающего нас воздуха — миллионами миллионов миллионов. — Я. П.

[3] Отметим для сведения, что в году (астрономическом) 31556926 секунд; миллион секунд в точности равен и суткам 13 ч 46 мин 40 с.

[4] До какой степени люди склонны недооценивать величину миллиона, показывает следующий поучительный пример. Тот самый Уоллес, который так предостерегает других от преуменьшения миллиона, заканчивает приведенный выше (с. 46-47) отрывок таким советом: «В маленьких размерах каждый может устроить это сам для себя: стоит только достать сотню листов толстой бумаги, разлиновать их на квадратики и поставить крупные черные точки. Подобное изображение было бы очень поучительно, хотя не в такой, конечно, степени, как осуществленное в большом масштабе». Почтенный автор, по-видимому, полагал, что подобная работа вполне под силу одному человеку.

Решение

Часы имели бы в ширину километров 50, а каждая цифра простиралась бы на целую географическую милю (7 км).

Задача № 62

Какой высоты достигал бы человек в миллион раз выше обычного роста?

Решение

1700 км. Он был бы всего в 8 раз меньше поперечника земного шара. Буквально одним шагом мог бы он перешагнуть из Ленинграда в Москву, а если бы лег, то растянулся бы от Ленинграда до Крыма…

Приведу еще несколько готовых подсчетов того же рода, предоставляя проверку их читателю.

Сделав миллион шагов по одному направлению, вы отошли бы километров на 600. От Москвы до Ленинграда примерно и будет миллион шагов.

Миллион человек, выстроенных в одну шеренгу плечом к плечу, растянулись бы на 250 км.

Миллионом стаканов воды можно наполнить 200 огромных бочек.

Миллион точек типографского шрифта — например, этой книги, — поставленные рядом, вплотную, растянулись бы метров на 50–100 [1].

Зачерпывая миллион раз наперстком, вы черпаете около тонны жидкости (в 80-ведерную бочку).

Книга в миллион страниц имела бы в толщину метров 50.

Миллион букв заключает книга убористой печати в 600–800 страниц среднего формата.

Миллион дней — более 27 столетий. От начала нашей эры не прошло еще миллиона дней!

58. НАЗВАНИЯ ЧИСЛОВЫХ ВЕЛИКАНОВ [2]

Прежде чем перейти к еще большим числовым гигантам — миллиардам, триллионам и т. д. — остановимся немного на их названиях. Слово «миллион» понимается всеми одинаково: тысяча тысяч. Но слова миллиард, триллион и т. д. сравнительно не так давно придуманы и еще не получили единообразного значения. При финансовых расчетах и в житейском обиходе принято у нас называть «миллиардом» тысячу миллионов, а «триллионом» — миллион миллионов. Но в книгах по астрономии и физике вы встречаете эти названия в другом значении: миллиард означает здесь не тысячу, а миллион миллионов, триллион — миллион миллионов миллионов, квадриллион — миллион миллионов миллионов миллионов и т. д. Короче говоря: в научных книгах каждое новое высшее наименование принято давать миллиону низших, а в финансовых расчетах и в обиходе — тысяче низших.

Приведенная здесь табличка наглядно показывает это различие:

В обиходе и в финансовых расчетах:	квинтиллионы	квадриллионы	триллионы	миллиарды	миллионы	тысячи	единицы
	000	000	000	000	000	000	000
В астрономии и физике:	триллионы		биллионы	миллиарды	миллионы	тысячи	единицы

Вы видите, что физик называет миллиардом то, что финансист называет триллионом и т. д., так что, во избежание недоразумений следует наименование всегда сопровождать цифрами. Это, пожалуй, единственный случай в практике, когда обозначение суммы прописью скорее затемняет, чем поясняет написанное цифрами. Вы видите также, что астрономы и физики гораздо экономнее пользуются новыми названиями, чем финансисты, которым, впрочем, нет основания особенно скупиться в этом отношении, так как им почти не приходится иметь дело более чем с 12-значными числами; в науке же 20-значные числа — нередкие гости [3].

59. МИЛЛИАРД

Слово «миллиард» употребляется у нас в смысле тысячи миллионов и при денежных вычислениях, и в точных науках. Но, например, в Германии и в Америке под миллиардом иногда разумеют не тысячу, а всего сто миллионов. Этим, между прочим, можно объяснить то, что слово «миллиардер» было в ходу за океаном еще тогда, когда ни один из тамошних богачей не имел состояния в тысячу миллионов. Огромное состояние Рокфеллера незадолго до войны исчислялось «всего» 900 миллионов долларов, а остальных «миллиардеров» — меньшими числами. Только во время войны появились в Америке миллиардеры в нашем смысле слова (их называют на родине «биллионерами»).

Чтобы составить себе представление об огромности миллиарда, подумайте о том, что в книжке, которую вы сейчас читаете, заключается немногим более 200 000 букв. В пяти таких книжках окажется один миллион букв. А миллиард букв будет заключать в себе стопка из 5000 экземпляров этой книжки — стопка, которая, будучи аккуратно сложена, составила бы столб высотой с Исаакиевский собор. (См. прим. 1).

---

[1] Имеется ввиду книга Я. И. Перельмана "Занимательная арифметика", 1926 г. издания

[2] В настоящее время финансовая система названий больших чисел (короткая шкала) стала общепринятой практически во всем мире. Астрономы и физики для обозначения больших чисел используют степени числа 10, а не названия научной (длинной шкалы) системы чисел. В последующих главах Перельман для названий больших чисел использовал научную (длинную шкалу). В настоящем издании все названия больших чисел приводятся по общепринятой, короткой шкале.

[3] Надо заметить, впрочем, что обычные цифровые обозначения весьма больших чисел и их названия употребляются лишь в научно-популярных книгах; в книгах же строго научных по физике и астрономии пользуются обыкновенно иным способом обозначения: биллион обозначается 10^{12}, триллион — 10^{18}, двадцать семь тысяч биллионов — 27×10^{15} и т. д. При таком способе обозначения сберегается место и, кроме того, гораздо легче производить над числами различные действия (по правилам, изучаемым в алгебре).

Миллиард секунд часы отобьют более чем в 30 лет (точнее в 31,7 лет). А миллиард минут составляет более 19 столетий; человечество всего двадцать четыре года назад (29 апреля 1902 года, в 10 ч 40 мин) начало считать второй миллиард минут от первого дня нашего летосчисления.

60. ТРИЛЛИОН И КВИНТИЛЛИОН

Ощутить огромность этих числовых исполинов трудно даже человеку, опытному в обращении с миллионами. Великан-миллион — такой же карлик рядом со сверх великаном триллионом, как единица рядом с миллионом. Об этом взаимоотношении мы обыкновенно забываем и не делаем в своем воображении большой разницы между миллионом, триллионом и квинтиллионом. Мы уподобляемся здесь тем первобытным народам, которые умеют считать только до 2 или до 3, а все числа свыше их одинаково обозначают словом много. «Подобно тому, как ботокудам[1] кажется несущественной разница между двумя и тремя, — говорит известный германский математик проф. Г. Шуберт, — так и многим современным культурным людям представляется несущественной разница между триллионом и квинтиллионом. По крайней мере, они не думают о том, что одно из этих чисел в миллион раз больше другого и что, значит, первое относится ко второму приблизительно так, как расстояние от Берлина до Сан-Франциско относится к ширине улицы».

Волос, увеличенный по толщине в триллион раз, был бы раз в 8 шире земного шара, а муха при таком увеличении была бы в 70 раз толще Солнца!

Взаимоотношение между миллионом, триллионом и квинтиллионом можно с некоторою наглядностью представить следующим образом. В Ленинграде еще недавно было миллион жителей[2]. Вообразите же себе длинный прямой ряд городов таких, как Ленинград, — целый миллион их: в этой цепи столиц, тянущихся на семь миллионов километров (в 20 раз дальше Луны) будет насчитываться триллион жителей…

Теперь вообразите, что перед вами не один такой ряд городов, а целый миллион рядов, т. е. квадрат, каждая сторона которого состоит из миллиона Ленинградов и который внутри сплошь уставлен Ленинградами: в этом квадрате будет квинтиллион жителей.

Одним квинтиллионом кирпичей можно было бы, размещая их плотным слоем по твердой поверхности земного шара, покрыть все материки равномерным сплошным пластом высотою с четырехэтажный дом (16 м).

Если бы все видимые в сильнейшие телескопы звезды обоих небесных полушарий, т. е. не менее 100 миллионов звезд, — были обитаемы и населены каждая, как наша Земля, то на всех этих звездах, вместе взятых, насчитывалась бы только десятая доля квинтиллиона людей.

Последнюю иллюстрацию мы заимствуем из мира мельчайших частиц, составляющих все тела природы — из мира молекул. Молекула по ширине меньше точки типографского шрифта этой книги примерно в миллион раз. Вообразите же квинтиллион таких молекул[3], нанизанных вплотную на одну нитку. Какой длины была бы эта нить? Ею можно было бы семь раз обмотать земной шар по экватору!

[1] Ботокуды — индейское племя, жившее немногочисленными группами в Восточной Бразилии.

[2] В 1923 году население Ленинграда насчитывало 1 млн. 93 тыс. человек.

61. СЕПТИЛЛИОН

В старинной (XVIII в.) «Арифметике» Магницкого, о которой мы не раз уже упоминали, приводится таблица названий классов чисел, доведенная до септиллиона, т. е. единицы с 24 нулями![4]

Это было большим шагом вперед по сравнению с более древним числовым инвентарем наших предков. Древняя славянская лестница больших чисел была гораздо скромнее и достигала только ста миллионов.

Вот эта старинная нумерация:

«тысяща»	1000
«тьма»	10 000
«легион»	100 000
«леодр»	1000 000
«ворон»	10 000 000
«колода»	100 000 000

Магницкий широко раздвинул древние пределы больших чисел в своей табличке. Но он считал практически бесполезным доводить систему наименований числовых великанов чересчур далеко.

Вслед за его таблицей он помещает такие стихи:

Числ есть бесконечно,
умом нам недотечно,
И никто не знает конца,
кроме всех бога творца.
Несть бо нам определьно
тем же есть и бесцельно
Множайших чисел искати
и больше сей писати
Превосходной таблицы
умов наших границы
И аще кому треба
счисляти, что внутрь неба
Довлеет числа сего
к вещем всем мира сего.

Наш старинный математик хотел сказать этими стихами, что так как ум человеческий не может обнять бесконечного ряда чисел, то бесцельно составлять числа больше тех, которые представлены в его таблице, «умов наших границе». Заключающиеся в ней числа (от

[3] В каждом кубическом сантиметре воздуха (т. е. примерно в наперстке) насчитывается — отметим кстати — от 20 до 30 триллионов молекул. Как велико это число, видно между прочим из того, что, достигнув с помощью совершеннейших воздушных насосов самой крайней степени разрежения — в сто миллиардов раз, — мы все-таки будем еще иметь в каждом кубическом сантиметре до 270 миллионов молекул! Не знаешь, чему изумляться больше: огромной численности молекул или их невообразимой малости…

[4] Магницкий придерживался той классификации чисел, которая дает каждое новое наименование миллиону низших единиц (миллиард — миллион миллионов, и т. д.). Такая система наименований больших чисел принята была и в более поздних русских школьных руководствах (насколько я могу судить по имеющимся у меня русским учебникам конца XVIII и начала XIX века). И лишь сравнительно недавно получила у нас распространение нынешняя «обиходная» система наименований.

1 до септиллионов включительно) достаточны для исчисления всех вещей видимого мира — достаточны для тех, «кому треба счисляти, что внутрь неба».

Любопытно отметить, что Магницкий оказался в данном случае почти прозорливцем. По крайней мере, до самого последнего времени наука не ощущала еще нужды в числах высшего наименования, чем септиллионы. Расстояния самых отдаленных звездных скоплений, по новейшим оценкам астрономов исчисляемые в сотни тысяч «световых лет» [1], в переводе на километры выражаются квинтиллионами. Это — доступные сильнейшим телескопам видимые границы вселенной. Расстояние всех других звезд, расположенных «внутри неба», выражается, конечно, меньшими числами. Общее число звезд исчисляется «всего лишь» сотнями миллионов. Древность старейших из них не превышает, по самой щедрой оценке, миллиарда лет. Массы звезд исчисляются тысячами септиллионов тонн.

Обращаясь в другую сторону, к миру весьма малых величин, мы и здесь не ощущаем пока надобности пользоваться числами свыше септиллионов. Число молекул в кубическом сантиметре газа — одно из самых больших множеств, реально исчисленных, — выражается десятками квинтиллионов. Число колебаний в секунду для самых быстро колеблющихся волн лучистой энергии (лучей Рентгена) не превышает 40 квинтиллионов. Если бы мы вздумали подсчитать, сколько капель в океане (считая даже объем капли 1 мм³, — что весьма немного), нам и тогда не пришлось бы обратиться к наименованиям выше септиллиона, потому что число это исчисляется только тысячами септиллионов.

И только при желании выразить числом, сколько граммов вещества заключает вся наша солнечная система, понадобились бы наименования выше септиллиона, потому что в числе этом 34 цифры (2 и 33 нуля): это — две тысячи нониллионов.

Если вам интересно, каковы наименования сверх исполинов, следующих за септиллионом, вы найдете их в приводимой здесь табличке:

наименования	единица со сколькими нулями:
септиллион	24
нонеллион	30
ундециллион	36
тредециллион	42
квиндециллион	48
септдециллион	54
новемдециллион	60

Далее наименований не имеется, да и эти, в сущности, почти не употребляются, так как мало кому известны [2]. Как велики выражаемые ими числа, видно хотя бы из того, что число граммов вещества всей вселенной (по современным воззрениям [3]) «всего» 10 септдециллионов.

[1] Световой год — путь, проходимый лучом света в 1 год (свет пробегает в секунду 300 000 км), он равен примерно 9 ½ миллиардам км.

[2] На самом деле наименования имеются: например, дуомилиамилиаиллион это — единица с 12 миллионами нолей, но они, действительно, почти не употребляются.

[3] По современным данным, масса наблюдаемой части Вселенной больше в 100 раз, т. е. 1 октодециллион грамм.

62. КУБИЧЕСКАЯ МИЛЯ И КУБИЧЕСКИЙ КИЛОМЕТР

В заключение остановимся на арифметическом (вернее, пожалуй, геометрическом) великане особого рода — на кубической миле: мы имеем в виду географическую милю, составляющую 15 долю экваториального градуса и заключающую 7420 метров. С кубическими мерами наше воображение справляется довольно слабо; мы обычно значительно преуменьшаем их величину — особенно для крупных кубических единиц, с которыми приходится иметь дело в астрономии. Но если мы превратно представляем себе уже кубическую милю — самую большую из наших объемных мер — то как ошибочны должны быть наши представления об объеме земного шара, других планет, Солнца? Стоит поэтому уделить немного времени и внимания, чтобы постараться приобрести о кубической миле более соответствующее представление.

В дальнейшем воспользуемся картинным изложением талантливого германского популяризатора А. Бернштейна, приведя (в несколько измененном виде) длинную выписку из его полузабытой книжечки — «Фантастическое путешествие через вселенную» (появившейся более полувека тому назад [4]).

«Положим, что по прямому шоссе мы можем видеть на целую милю (7½ км) вперед. Сделаем мачту длиною в милю и поставим ее на одном конце дороги, у верстового столба. Теперь взглянем вверх и посмотрим, как высока наша мачта. Положим, что возле этой мачты стоит одинаковой с ней высоты человеческая статуя — статуя более семи километров высоты. В такой статуе колено будет находиться на высоте 1800 метров; нужно было бы взгромоздить одну на другую 25 египетских пирамид, чтобы достигнуть до поясницы статуи!

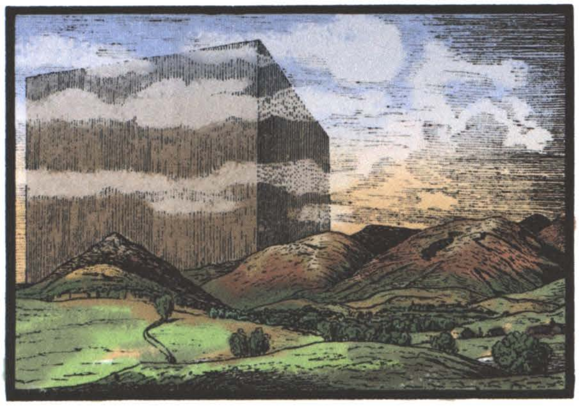
Вообразим теперь, что мы поставили две таких мачты вышиною в милю на расстоянии мили одна от другой и соединили обе мачты досками; получилась бы стена в милю длины и милю вышины. Это — квадратная миля.

Если бы подобная стена действительно существовала, например, вдоль Невы в Ленинграде, то — заметим мимоходом, — климатические условия этого места изменились бы баснословным образом: северная сторона города могла бы иметь еще суровую зиму, когда южная уже наслаждалась бы ранним летом. В марте месяце можно было бы с одной стороны стены прогуливаться в лодке, а с другой — ездить в санях и кататься на коньках... Но мы отвлеклись в сторону.

Мы имеем деревянную стену, стоящую отвесно. Представим себе еще четыре подобных стены, сколоченные вместе, как ящик. Сверху прикроем его крышкой в милю длины и милю ширины. Ящик этот займет объем кубической мили. Посмотрим теперь, как он велик, т. е. что и сколько в нем может поместиться.

Начнем с того, что, сняв крышку, бросим в ящик все здания Ленинграда. Они займут там очень немного места. Отправимся в Москву и по дороге захватим все губернские и уездные города. Но так как все это только покрыло дно ящика, то для заполнения его поищем

[4] Книга Аарона Бернштейна была напечатана в 1856 году.



материалов в другом месте. Возьмем Париж со всеми его триумфальными воротами, колоннами, башнями и бросим туда же. Все это летит, как в пропасть; прибавка едва заметна. Прибавим Лондон, Вену, Берлин. Но так как всего этого мало, чтобы хоть сколько-нибудь заполнить пустоту в ящике, то станем бросать туда без разбора все города, крепости, замки, деревни, отдельные здания. Все-таки мало. Бросим туда все, что только сделано руками человека в Европе; но и с этим ящик едва наполняется до одной четверти. Прибавим все корабли мира; но и это мало помогает. Бросим в ящик все египетские пирамиды, все рельсы Старого и Нового Света, все машины и фабрики мира — все, что сделано людьми в Азии, Африке, Америке, Австралии. Ящик заполняется едва до половины. Встряхнем его, чтобы в нем улеглось ровнее, и попробуем, нельзя ли дополнить его людьми.

Соберем всю солому и всю хлопчатую бумагу, существующую в мире, и расстелим ее в ящике, — мы получим слой, предохраняющий людей от ушибов, сопряженных с выполнением подобного опыта. Все население Германии — 50 миллионов человек — уляжется в первом слое. Покроем их мягким слоем в фут толщиною и уложим еще 50 миллионов. Покроем и этот слой и, кладя далее слой на слой, поместим в ящике все население Европы, Азии, Африки, Америки, Австралии… Все это заняло не более 35 слоев, т. е., считая слой толщиной в метр, — всего 35 метров. Понадобилось бы в 50 раз больше людей, чем их существует на свете, чтобы наполнить вторую половину ящика…

Что же нам делать? Если бы мы пожелали поместить в ящике весь животный мир — всех лошадей, быков, ослов, мулов, баранов, верблюдов, на них наложить всех птиц, рыб, змей, все, что летает и ползает, — то и тогда мы не наполнили бы ящика доверху без помощи скал и песку.

Такова кубическая миля. А из земного шара можно сделать 660 миллионов подобных ящиков! При всем почтении к кубической миле, к земному шару приходится питать еще большее уважение».

Теперь, когда неимоверная огромность кубической мили (около 350 км^3) стала до некоторой степени ощущаться читателем, мы прибавим, что целая кубическая миля пшеничных зерен насчитывала бы их «всего» несколько квинтиллионов.

Весьма внушительную вместимость имеет и кубический километр. Нетрудно подсчитать, например, что ящик таких размеров мог бы вместить 5000 триллионов спичек, вплотную уложенных; для изготовления такого количества спичек фабрика, выпускающая миллион спичек в сутки, должна была бы работать 14 миллионов лет; а чтобы такое число спичек доставить, потребовалось бы 10 миллионов вагонов — поезд длиною в 100 000 километров, т. е. в 2 ½ раза длиннее земного экватора. И все-таки в целом кубическом километре воды содержится не более одного квинтиллиона мельчайших капель (считая объем капли в 1 мм^3), — в миллион раз меньше септиллиона.

Исполинские размеры квинтиллиона и септиллиона после сказанного о кубических миле и километре еще более вырастают в нашем сознании.

63. ИСПОЛИНЫ ВРЕМЕНИ

Огромные промежутки времени представляются нам еще более смутно, чем огромные расстояния и объемы. Между тем, геология говорит нам, что со времени отложения наиболее древних пластов земной коры протекли сотни миллионов лет. Как ощутить неизмеримую огромность таких периодов времени? Один немецкий писатель [1] предлагает для этого такой способ:

«Все протяжение истории Земли представим в виде прямой линии в 500 километров. Это расстояние пусть изображает те 500 миллионов лет, которые протекли от начала кембрийской эпохи (одна из древнейших эпох истории земной коры). Так как километр представляет длительность миллиона лет, то последние 500–1000 метров изобразят длительность ледникового периода; а 6000 лет мировой истории сократятся до 6 метров — длина комнаты, в масштабе которой 70 лет жизни человека представляются линией в 7 сантиметров. Если заставить улитку проползти все названное расстояние с нормальной для улитки скоростью 3,1 мм в секунду, то на все расстояние ей понадобится ровно 5 лет. А все протяжение от начала мировой войны до наших дней она одолеет в 3 секунды…

Мы видим, как ничтожны в масштабе истории Земли те небольшие сроки, которые человек может обнять своим умом. Как ничтожна вся история человечества, которую наше самомнение окрестило «всемирной» историей, и как бесконечно мала в потоке мировых событий одна человеческая жизнь! »

ЗАДАЧА-ШУТКА

Какое число делится на все числа без остатка?

(Ответ — на с. 55).

[1] Лотце «Древность Земли».

64. ОТ ВЕЛИКАНОВ К КАРЛИКАМ

Гулливер в своих странствованиях, покинув карликов-лилипутов, очутился среди великанов. Мы путешествуем в обратном порядке: познакомившись с числовыми исполинами, переходим к миру лилипутов — к числам, которые во столько же раз меньше единицы, во сколько раз единица меньше числового великана.

Разыскать представителей этого мира не составляет никакого труда: для этого достаточно написать ряд чисел, обратных миллиону, миллиарду, триллиону и т. д., т. е. делить единицу на эти числа.

Получающиеся дроби

$$\frac{1}{1\,000\,000},\ \frac{1}{1\,000\,000\,000},\ \frac{1}{1\,000\,000\,000\,000}\ \text{и т. д.}$$

есть типичные числовые лилипуты, такие же пигмеи по сравнению с единицей, каким является единица по сравнению с миллионом, миллиардом, триллионом и прочими числовыми исполинами.

Вы видите, что каждому числу-исполину соответствует число лилипут, и что, следовательно, числовых лилипутов существует не меньше, чем исполинов. Для них так же придуман сокращенный способ обозначения. Мы уже упоминали, что весьма большие числа в научных сочинениях (по астрономии, физике) обозначаются так:

1 000 000	10^6
10 000 000	10^7
400 000 000	4×10^8
6 квадриллионов	6×10^{24}, и т. д.

Соответственно этому числовые лилипуты обозначаются следующим образом:

$$\frac{1}{1\,000\,000}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ 10^{-6}$$

$$\frac{1}{1\,000\,000\,000}\ \ldots\ldots\ 10^{-9}$$

$$\frac{1}{1\,000\,000\,000\,000}\ \ldots\ 10^{-12}$$

Есть ли, однако, реальная надобность в подобных дробях? Приходится ли когда-нибудь действительно иметь дело со столь мелкими долями единицы?

Об этом интересно побеседовать подробнее.

65. ЛИЛИПУТЫ ВРЕМЕНИ

Секунда, по обычному представлению, есть настолько малый промежуток времени, что с весьма мелкими частями ее не приходится иметь дела ни при каких обстоятельствах.

Легко написать $\frac{1}{1\,000}$ секунды, но это чисто бумажная величина, потому что ничего не может произойти в такой ничтожный промежуток времени.

Так думают многие, но ошибаются, потому что в тысячную долю секунды могут успеть совершиться весьма различные явления. Поезд, проходящий 36 километров в час, делает в секунду 10 метров, и, следовательно, в течение 1000-й доли секунды успевает продвинуться на один сантиметр. Звук в воздухе переносится в течение 1000-й доли секунды на 33 сантиметра, а пуля, покидающая ружейный ствол со скоростью 700–800 метров в секунду, переносится за тот же промежуток времени на 70 сантиметров. Земной шар перемещается каждую 1000-ю долю секунды, в своем обращении вокруг Солнца, на 30 метров. Струна, издающая высокий тон, делает в 1000-ю долю секунды 2–4 и более полных колебаний; даже комар успевает в это время взмахнуть вверх или вниз своими крылышками. Молния длится гораздо меньше 1000-й доли секунды: в течение этого промежутка времени успевает возникнуть и прекратиться столь грозное явление природы (молния простирается в длину на целые километры).

Но, — возразите вы, — 1000-я доля секунды еще не подлинный лилипут, как никто не назовет тысячу числовым гигантом. Если взять миллионную долю секунды, то уж наверное можно утверждать, что это — величина не реальная, промежуток времени, в течение которого ничего произойти не может. Ошибаетесь: даже и одна миллионная доля секунды — для современного физика, например, — вовсе не чрезмерно маленький промежуток. В области явлений световых (и электрических) ученому сплошь и рядом приходится иметь дело с гораздо более мелкими частями секунды. Напомним прежде всего, что световой луч пробегает ежесекундно (в пустоте) 300 000 километров; следовательно, в 1 000 000-ю долю секунды свет успевает перенестись на расстояние 300 метров — примерно на столько же, на сколько переносится в воздухе звук в течение целой секунды.

Далее: свет есть явление волнообразное, и число световых волн, проносящихся ежесекундно через точку пространства, исчисляется сотнями триллионов. Те световые волны, которые, действуя на наш глаз, вызывают ощущение красного света, имеют частоту колебаний 400 триллионов в секунду; это значит, что в течение одной 1 000 000-й доли секунды в наш глаз вступает 400 000 000 волн, а одна волна вступает в глаз в течение 400 000 000 000 000-й доли секунды. Вот подлинный числовой лилипут!

Но этот несомненный, реально существующий лилипут является истинным великаном по сравнению с еще более мелкими долями секунды, с которыми физик встречается при изучении Рентгеновых лучей. Эти удивительные лучи, обладающие свойством проникать через многие непрозрачные тела, представляют собою, как и видимые лучи, тоже волнообразное явление, но частота колебаний у них значительно больше, чем у видимых: она достигает 25000 триллионов в секунду! Волны следуют тут одна за другой в 60 раз чаще, чем в лучах видимого красного света. Значит, и в мире лилипутов существуют свои великаны и карлики. Гулливер был выше лилипутов всего в дюжину раз и казался им великаном. Здесь же один лилипут больше другого лилипута в пять дюжин раз и, следовательно, имеет все права именоваться по отношению к нему исполином.

66. ЛИЛИПУТЫ ПРОСТРАНСТВА

Интересно рассмотреть теперь, какие наименьшие расстояния приходится отмеривать и оценивать современным исследователям природы.

В метрической системе мер наименьшая единица длины для обиходного употребления — миллиметр; она примерно вдвое меньше толщины спички. Чтобы измерять предметы, видимые простым глазом, такая единица длины достаточно мелка. Но для измерения бактерий и других мелких объектов, различимых только в сильные микроскопы, миллиметр чересчур крупный. Ученые обращаются для таких измерений к более мелкой единице — микрону, который в 1000 раз меньше миллиметра. Так называемые красные кровяные тельца, которые насчитываются десятками миллионов в каждой капельке нашей крови, имеют в длину 7 микронов и в толщину 2 микрона. Стопка из 1000 таких телец имеет толщину спички.

Как ни мелок кажется нам микрон, он все же оказывается чрезмерно крупен для расстояний, которые приходится измерять современному физику. Мельчайшие, не доступные даже микроскопу частицы, молекулы, из которых состоит вещество всех тел природы, и слагающие их еще более мелкие атомы имеют размеры от одной 10 000-й до одной 1000-й доли микрона. Если остановиться на последней, наибольшей величине, то и тогда окажется, что миллион таких крупинок (а мы уже знаем, как велик миллион), будучи расположен на одной прямой, вплотную друг к другу, занял бы всего лишь один миллиметр!

Чтобы представить себе наглядно чрезвычайную малость атомов, обратимся к такой картине. Вообразите, что все предметы на земном шаре увеличились в миллион раз. Эйфелева башня (300 м высоты) уходила бы тогда своей верхушкой на 300 000 км в мировое пространство и находилась бы в недалеком соседстве от орбиты Луны. Люди были бы величиной в ¼ земного радиуса — в 1700 км; один шаг такого человека-гиганта унес бы его на 600–700 км. Мельчайшие красные тельца, миллиардами плавающие в его крови, имели бы каждое более 7 м в поперечнике. Волос имел бы 100 м в толщину. Мышь достигала бы 100 км в длину, муха — 8 км. Каких же размеров будет при таком чудовищном увеличении атом вещества?

Положительно не верится: его размеры предстанут перед вами в виде… типографской точки шрифта этой книги!

Достигаем ли мы здесь крайних пределов пространственной малости, за которые не приходится переступать даже физику с его изощренными приемами измерений? Еще не особенно давно думали так; но теперь известно, что атом — целый мир, состоящий из гораздо более мелких частей и являющийся ареною действия могущественных сил. Атом, например, водорода состоит из центрального «ядра» и быстро обращающегося вокруг него «электрона». Не входя в другие подробности, расскажем только о размерах этих составных частей атома. Поперечник электрона измеряется триллионными долями миллиметра, а ядра — квадриллионными долями. Другими словами, поперечник электрона почти в миллион раз, а ядро — в миллиард раз меньше поперечника атома. Если вы пожелаете сравнить размеры электрона с размерами пылинки, то расчет покажет вам, что электрон меньше пылинки примерно во столько же раз, во сколько раз пылинка меньше — чего бы вы думали? — земного шара!

Вы видите, что атом — лилипут среди лилипутов, — является в то же время настоящим исполином по сравнению с электроном, входящим, в его состав — таким же исполином, каким вся солнечная система является по отношению к земному шару.

Можно составить следующую поучительную лестницу, в которой каждая ступень является исполином по отношению к предыдущей ступени и лилипутом по отношению к последующей:

электрон
атом
пылинка
дом
земной шар
солнечная система
расстояние до Полярной звезды.

Каждый член этого ряда примерно в четверть миллиона раз [1] больше предыдущего и во столько же раз меньше последующего. Ничто не доказывает так крас-

[1] Имеются в виду линейные размеры (а не объемы), т. е. поперечник атома, диаметр солнечной системы, высота или длина дома и т. п.

норечиво всю относительность понятий «большой» и «малый», как эта табличка. В природе нет безусловно большого или безусловно малого предмета. Каждая вещь может быть названа и подавляюще огромной, и исчезающе малой в зависимости от того, как на нее взглянуть, с чем ее сравнить. «Время и пространство — закончим мы словами одного английского физика [1] — понятия чисто относительные. Если бы сегодня в полночь все предметы — в том числе и мы сами, и наши измерительные приборы — уменьшились в 1000 раз, мы совершенно не заметили бы этого изменения. Не было бы никакого указания на то, что произошло такое уменьшение. Точно так же, если бы все события и все часы получили ускорение хода в одинаковом отношении, то мы равным образом ничего не подозревали бы об этой перемене».

67. СВЕРХ ИСПОЛИН И СВЕРХ ЛИЛИПУТ

Наши беседы о великанах и карликах из мира чисел были бы не полны, если бы мы не рассказали читателю об одной изумительной диковинке этого рода — диковинке, правда, не новой, но стоящей дюжины новинок. Чтобы подойти к ней, начнем со следующей на вид весьма незамысловатой задачи:

Задача № 63

Какое самое большое число можно написать тремя цифрами, не употребляя никаких знаков действий?

Решение

Хочется ответить: 999, — но, вероятно, вы уже подозреваете, что ответ другой, иначе задача была бы чересчур проста. И, действительно, правильный ответ пишется так:

$$9^{9^{9}}$$

Выражение это означает: «девять в степени девять в девятой степени». Другими словами: нужно составить произведение из стольких девяток, сколько единиц в результате умножения:

$$9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9.$$

Достаточно только начать вычисление, чтобы ощутить огромность предстоящего результата. Если у вас хватит терпения выполнить перемножение девяти девяток, вы получите число:

387 420 489.

Главная работа только начинается: теперь нужно найти 9 387 420 489, т. е. произведение 387 420 489 девяток. Придется сделать круглым счетом 400 миллионов умножений…У вас, конечно, не будет времени довести до конца подобное вычисление. Но я лишен возможности сообщить вам готовый результат по трем причинам, которые нельзя не признать весьма уважительными. Во-первых, число это никогда и никем еще не было вычислено (известен только приближенный результат). Во-вторых, если бы даже оно и было вычислено, то, чтобы напечатать его, понадобилось бы не менее тысячи таких книг как эта, потому что число наше состоит из 369693100 цифр; набранное обыкновенным шрифтом, оно имело бы в длину 1000 км… Наконец, если бы меня снабдили достаточным количеством бумаги и чернил, я и тогда не мог бы удовлетворить вашего любопытства. Вы легко можете сообразить почему: если я способен писать, скажем, без перерыва по две цифры в секунду, то в час я напишу 7200 цифр, а в сутки, работая непрерывно день и ночь, — не более 172 800 цифр. Отсюда следует, что не отрываясь ни на секунду от пера, трудясь круглые сутки изо дня в день без отдыха, я просидел бы за работой не менее 7 лет, прежде чем написал бы это число…

Могу сообщить вам об этом числе только следующее: оно начинается цифрами 428 124 773 175 747 048 036 987 118 и кончается 89. Что находится между этим началом и концом — неизвестно. А ведь там 369 693 061 цифра!..

Вы видите, что уже число цифр нашего результата невообразимо огромно. Как же велико само число, выражаемое этим длиннейшим рядом цифр? Трудно дать хотя бы приблизительное представление о его громадности, потому что такого множества отдельных вещей, считая даже каждый электрон за отдельную вещь — нет в целой вселенной!

Архимед вычислил некогда, сколько песчинок заключал бы в себе мир, если бы весь он, до неподвижных звезд, был наполнен тончайшим песком. У него получился результат, не превышающий единицы с 63 нулями. Наше число состоит не из 64, а из 370 миллионов цифр — следовательно, оно неизмеримо превышает огромное число Архимеда.

Поступим же по примеру Архимеда, но вместо «исчисления песчинок», произведем «исчисление электронов». Вы уже знаете, что электрон меньше песчинки примерно во столько же раз, во сколько раз песчинка меньше земного шара. Для радиуса видимой вселенной примем расстояние в миллиард световых лет. Так как свет пробегает в секунду 300 000 км, а в году 31 миллион секунд, то можно сосчитать, что «световой год» равен круглым счетом 10 триллионам км (гнаться за большой точностью здесь бесполезно). Значит, для радиуса всей известной нам вселенной получаем величину 10 миллиардов триллионов км, или — прибегая к способу изображения числовых великанов, объясненному на с. 48, —

1022 км.

Объем шара такого радиуса можно вычислить по правилам геометрии: он равен (с округлением) 4 × 1066 км³.

Умножив это число на число кубических сантиметров в кубическом километре (1015), получим для объема видимой вселенной величину

1081 см³. [2]

Теперь представим себе, что весь этот объем сплошь заполнен самыми тяжелыми из известных нам атомов — атомами элемента урана, которых идет на грамм около 1022 штук. Их поместилось бы в шаре указанного объема 10103 штуки. Дознано, что в каждом атоме урана содержится 92 электрона. Округлив это число до 100, узнаем, что во всей доступной на-

---

[1] Фурнье Дальб «Два новые мира» (есть русский перевод).

[2] Поучительно отметить, что Архимед в своем исчислении песчинок определял объем вселенной в 5×10^{54} *см³*. (По современным данным объем видимой вселенной составляет $3{,}5 \times 10^{86}$ *см³*.)

шему исследованию вселенной могло бы поместиться не более

$$10^{105} \text{ электронов.}$$

Число, состоящее «всего лишь» из 105 цифр… Как это мизерно по сравнению с нашим числовым великаном из 369 миллионов цифр!

Вы видите, что, наполняя сплошь всю вселенную — величайшее, что мы знаем — электронами, т. е. мельчайшим из того, что нам известно, мы не исчерпали бы и небольшой доли того исполинского числа, которое скромно скрывается под изображением:

$$9^{9^9}$$

Познакомившись с этим замаскированным гигантом, обратимся к его противоположности.

Соответствующий числовой лилипут получится, если разделим 1-цу на это число.

Будем иметь:

$$\frac{1}{9^{9^9}}$$

т. е., что равно:

$$\frac{1}{9^{387420489}}$$

Мы имеем здесь знакомое нам огромное число в знаменателе. Сверх великан превратился в сверх лилипута.

ОТВЕТ

на задачу-шутку

(предложенную на с. 51):

Число, которое делится на все числа без остатка, есть —

произведение всех чисел

С момента выхода в свет «Занимательной математики» Я. Перельмана прошло уже довольно много времени. Можно даже сказать, что поменялась эпоха. XX в. с его потрясениями уходит в историю. На его место пришли другие, будем надеяться, лучшие времена.

Наука сделала огромный шаг вперед, в направлении всевозможных открытий, а техника и технологии настолько преобразили мир, что сравнивать с прошлым, хотя бы полувековой давности, становится практически невозможно. Итак, что же нового было открыто в области самого-самого? Самых больших и самых малых величин, расстояний или временных отрезков?

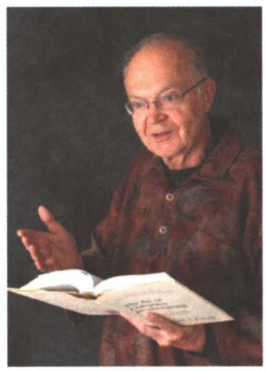
Самым большим числом, которое когда-либо использовалось в практических целях стало так называемое число Рональда Грэма, американского математика, который применил его в расчетах при решении одной из проблем в теории Рамсея.

Это настолько абстрактные для обычного человека математические вопросы, что ограничимся лишь замечанием, что теория Рамсея – это раздел математики изучающий возникновение некоего порядка из хаоса первоначальных математических объектов.

Рональд Грэм

Но вернемся к числу Рональда Грэма. Оно настолько велико, что для того, чтобы его просто записать в обычном десятичном виде не хватит всего пространства наблюдаемой вселенной.... А чтобы его как-то зафиксировать на бумаге, был предложен специальный метод записи больших чисел – стрелочная нотация другого американского математика – Дональда Кнута. Попутно заметим, что он является профессором Санкт-Петербургского университета. Понятно, что число Рональда Грэма было увековечено в книге рекордов Гиннеса.

Кратко упомянем о других числовых гигантах, которые имеют собственные имена. Это два очень популярных числа: 10^{100} – гугол. Всемирно известная американская IT-компания Гугл взяла себе это слегка видоизмененное название. Другим подобным числом является 10 в степени гугол $10^{\text{гугол}}$, то есть $10^{(10^{100})}$. Чтобы хоть как-то представить себе трудновообразимые размеры этого числа отметим, что гуглоплекс больше числа всех частиц, из которых состоит видимая, в том числе и в неоптических диапазонах, часть вселенной.

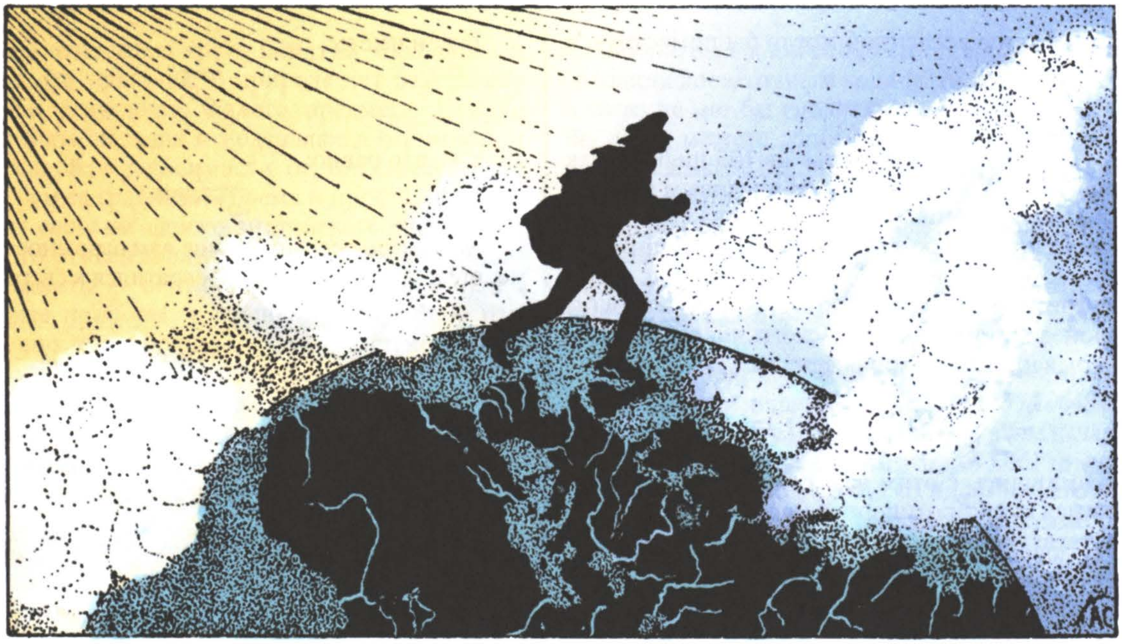


Эдвард Казнер

Заметим, что оба числа и их названия придумал американский математик Эдвард Казнер, получивший степень доктора в Колумбийском университете еще в 1899 г. Однажды, гуляя с племянниками, Казнер то ли в шутку, то ли всерьез, попросил племянников придумать имя для очень большого числа. И младший из них, Милтон, быстро ответил: «Гугол!». Немногим позднее они придумали и второе название – гуглоплекс.

Самым маленьким числом до сих пор считается величина, выражающая вероятность появления новой вселенной из атома. Это число рассчитали физики, но названия ему не дали. А само число выглядит следующим образом: сначала идет ноль, затем десятичная запятая, затем 100 миллионов триллионов триллионов триллионов триллионов нулей и, наконец, единица. Чтобы записать это число в цифровом виде на обычный носитель, понадобится 12,5 миллиардов миллиардов миллиардов терабайт.

Самым малым из возможных расстояний во вселенной может быть планковская длина, равная $1{,}6 \times 10^{-35}$. Этот вывод проистекает из теории квантовой механики и является следствием фундаментальных законов, а не пределом точности измерения. Меньшее расстояние вряд ли возможно, поскольку не имеет физического смысла. Наука постоянно преподносит нам удивительные открытия. Посмотрим, что будет дальше!



68. ВАШЕ КРУГОСВЕТНОЕ ПУТЕШЕСТВИЕ

В молодости я занимался в редакции одного распространенного Ленинградского журнала, где состоял секретарем. Однажды мне подали визитную карточку посетителя. Я прочел на ней незнакомое мне имя и совершенно необычайное обозначение профессии: «первый русский кругосветный путешественник пешком». По обязанностям службы мне не раз доводилось беседовать с русскими путешественниками по всем частям света и даже с кругосветными, но о «кругосветном путешественнике пешком» я никогда еще не слыхал. С любопытством поспешил я в приемную, чтобы познакомиться с этим предприимчивым и неутомимым человеком.

Замечательный путешественник был молод и имел очень скромный вид. На вопрос, когда успел он совершить свое необыкновенное путешествие, «первый русский кругосветный и т. д.» объяснил мне, что оно теперь именно и совершается.

Маршрут? Шувалово–Ленинград [1]; о дальнейшем он желал посоветоваться со мною… Из разговора выяснилось, что планы «первого русского и т. д.» довольно смутны, но, во всяком случае, не предусматривают оставления пределов России.

— Как же в таком случае совершите вы кругосветное путешествие? — с изумлением спросил я.

— Главное дело длину земного обхвата пройти, а это можно сделать и в России, — разрешил он мое недоумение. — Десять верст уже пройдено, и остается…

— Всего 37490. Счастливого пути! [2]

[1] Шувалово — небольшая станция в 10 километрах от Ленинграда.

[2] Канадец Жан Беливо совершил кругосветное пешеходное путешествие выйдя из Монреаля (Канада) 18 августа 2002. За 11 лет (4077 дней) он прошел 75 543 км и вернулся в Монреаль 16 октября 2011. Про свое путешествие он написал книгу «В поисках себя. История человека, обошедшего Землю пешком».

Не знаю, как странствовал «первый и т. д.» на протяжении остальной части своего пути. Но что он успешно выполнил свое намерение, я нисколько не сомневаюсь. Даже если он больше вовсе не странствовал, а сразу возвратился в родное Шувалово и безвыездно проживал там, — он и в таком случае прошел не менее 40 тысяч км. Беда только, что он не первый и не единственный человек, совершивший такой подвиг. И я, и вы, и большинство других граждан нашего Союза имеют столько же прав на звание «русского кругосветного путешественника пешком», в понимании шуваловского ходока. Потому что каждый из нас, какой бы он ни был домосед, успел в течение своей жизни, сам того не подозревая, пройти пешком путь даже более длинный, чем окружность земного шара. Маленький арифметический подсчет сейчас убедит вас в этом.

В самом деле. В течение каждого дня вы, конечно, не менее 5 часов проводите на ногах: ходите по комнатам, по двору, по улице, словом, так или иначе шагаете. Если бы у вас в кармане был шагомер (прибор для подсчета сделанных шагов), он показал бы вам, что вы ежедневно делаете не менее 30000 шагов. Но и без шагомера ясно, что расстояние, проходимое вами в день, очень внушительно. При самой медленной ходьбе человек делает в час 4–5 км. Это составляет в день, за 5 часов, 20–25 км. Теперь остается умножить этот дневной наш переход на 360 — и мы узнаем, какой путь каждый из нас проходит в течение целого года:

$$20 \times 360 = 7200, \text{ или же } 25 \times 360 = 9000.$$

Итак, самый малоподвижный человек, никогда даже и не покидавший родного города, проходит ежегодно пешком около 8000 км. А так как окружность земного шара имеет 40000 км, то нетрудно вычислить, во сколько лет мы совершаем пешеходное путешествие, равное кругосветному:

$$40\,000 : 8000 = 5.$$

Значит, в течение 5 лет вы проходите путь, по длине равный окружности земного шара. Каждый 13-летний мальчик, если считать, что он начал ходить с двухлетнего возраста — дважды совершил уже «кругосветное путешествие». Каждый 25-летний человек выполнил не менее 4 таких путешествий. А дожив до 60 лет, мы десять раз обойдем вокруг земного шара, т. е. пройдем путь более длинный, чем от Земли до Луны (380 000 км).

Таков неожиданный результат подсчета столь обыденного явления, как ежедневная наша ходьба по комнате и вне дома.

69. ВАШЕ ВОСХОЖДЕНИЕ НА МОНБЛАН

Задача № 64

Вот еще один интересный подсчет. Если вы спросите почтальона, ежедневно разносящего письма по адресатам, или врача, целый день занятого посещением своих пациентов, совершали ли они восхождение на Монблан, — они, конечно, удивятся такому вопросу. Между тем, вы легко можете доказать каждому из них, что не будучи альпинистами, они наверное совершили уже восхождение на высоту, даже превышающую величайшую вершину Альп. Стоит только подсчитать, на сколько ступеней поднимается почтальон ежедневно, восходя по лестницам при разноске писем, или врач, посещая больных. Окажется, что самый скромный почтальон, самый занятой врач, никогда даже и не помышлявшие о спортивных состязаниях, побивают мировые рекорды горных восхождений. Подсчитайте это.

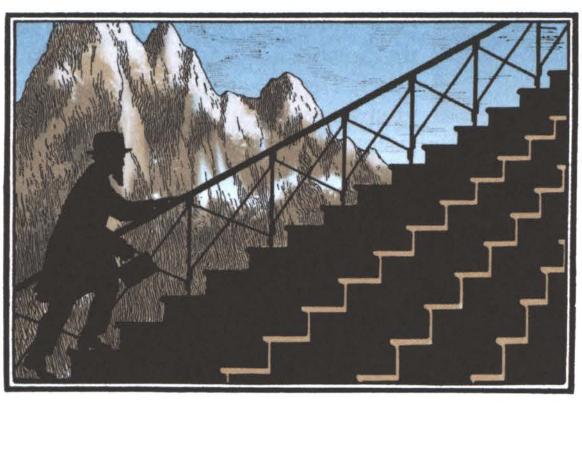
Решение

Возьмем для подсчета довольно скромные средние цифры; допустим, что почтальон ежедневно посещает только десять человек, живущих кто на втором этаже, кто на третьем, четвертом, пятом — в среднем возьмем на третьем. Высоту третьего этажа примем для круглого числа в 10 м: следовательно, наш почтальон ежедневно совершает по ступеням лестниц путешествие на высоту

$$10 \times 10 = 100 \text{ м.}$$

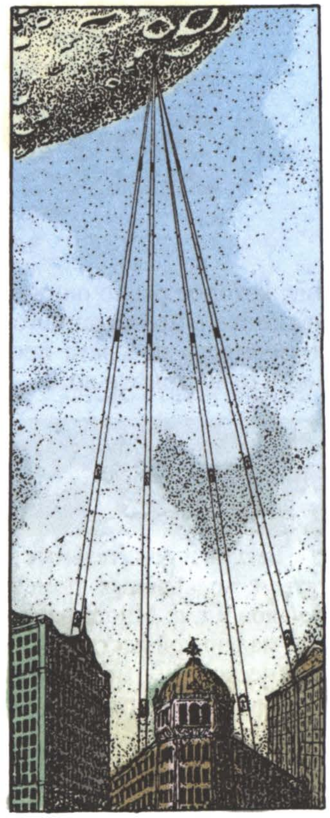
Высота Монблана 4800 м. Разделив ее на 100, вы узнаете, что наш скромный почтальон выполняет восхождение на Монблан в 48 дней…

Итак, каждые 48 дней, или примерно 8 раз в год, почтальон поднимается по лестницам на высоту, равную высочайшей вершине Европы. Скажите, какой спортсмен ежегодно по 8 раз взбирается на Монблан?



Для врача у меня имеются не предположительные, а реальные цифры. Врачи квартирной помощи в Ленинграде подсчитали, что в среднем каждый из них за свой рабочий день поднимается к больным на 2500 ступеней. Считая высоту ступеньки равной 15 см и принимая 300 рабочих дней в году, получаем, что за год врач поднимается на 112 км, т. е. совершает 20 раз восхождение на высоту Монблана!

Не надо непременно быть почтальоном или врачом, чтобы выполнять подобные подвиги, конечно, того не ведая. Я живу на 2-м этаже, в квартире, куда ведет лестница с 20 ступеньками — число, казалось бы, весьма скромное. Ежедневно мне приходится взбегать по этой лестнице раз 5, да еще посещать двоих знакомых, живущих, скажем, на такой же высоте. В среднем можно принять, что я поднимаюсь ежедневно 7 раз по лестнице с 20 ступенями, то есть взбегаю вверх каждый день по 140 ступеней. Сколько же это составит в течение года?



$$140 \times 360 = 50400.$$

Итак, ежегодно я поднимаюсь более, чем на 50000 ступеней. Если мне суждено дожить до 60-летнего возраста, я успею подняться на вершину сказочно-высокой лестницы в три миллиона ступеней (450 км)!

Как изумился бы я, если бы ребенком меня подвели к основанию этой уходящей в бесконечную даль лестницы и сказали, что некогда я, быть может, достигну ее вершины… На какие же исполинские высоты взбираются те люди, которые по роду своей профессии только и делают, что поднимаются на высоту, — например, служители при лифтах? Кто-то подсчитал, что, например, служитель при лифте одного из Нью-Йоркских небоскребов совершает за 15 лет службы подъем до высоты…

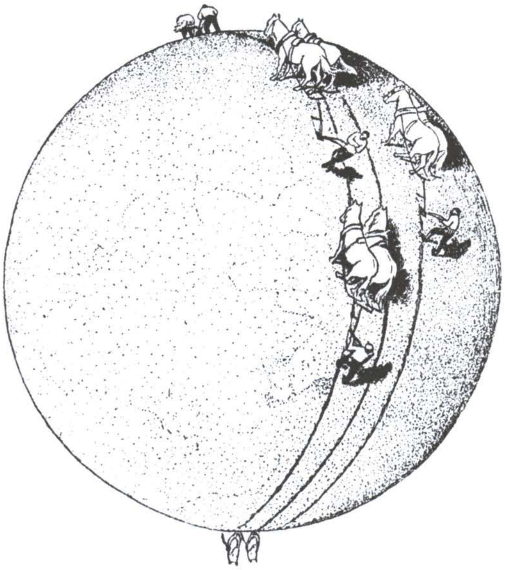
Луны!

70. ПАХАРИ-ПУТЕШЕСТВЕННИКИ

Задача № 65

Взгляните на странный рисунок, приведенный на следующей странице. Кто те сказочные пахари богатыри, что проводят борозды кругом земного шара?

Вы полагаете, рисунок — создание чересчур разыгравшейся фантазии художника? Нисколько: художник лишь изобразил наглядно то, о чем скажут вам достоверные арифметические подсчеты, если вы дадите себе труд их произвести. Каждый пахарь проходит со своим плугом в течение нескольких лет (4–6) такое расстоя-



ние, которое равно окружности земного шара. Выполнение этого неожиданного по своим результатам арифметического подсчета предоставляю читателю произвести самостоятельно.

71. НЕЗАМЕТНОЕ ПУТЕШЕСТВИЕ НА ДНО ОКЕАНА

Весьма внушительные путешествия выполняют обитатели подвальных помещений, служители таких же складов и т. п. Много раз в день сбегая вниз по ступенькам маленькой лестницы, ведущей в погреб, они в течение нескольких месяцев проходят расстояние в целые километры. Нетрудно рассчитать, во сколько времени мальчик-служитель подвального склада проходит, таким образом, вниз расстояние, равное глубине океана. Если лестница углубляется, скажем, всего на 2 м, и мальчик сбегает по ней ежедневно всего 10 раз, то в месяц он пройдет вниз расстояние в 30 × 20 = 600 м, а в год 600 × × 12 = 7200 м — более 7 км. Вспомним, что глубочайшая шахта простирается в недра Земли всего на 2 км! [1]

Итак, если бы с поверхности океана вела на его дно лестница, то любой служитель подвального торгового помещения достиг бы дна океана в течение одного года (наибольшая глубина Тихого океана — около 9 км).

72. ПУТЕШЕСТВУЮЩИЕ, СТОЯ НА МЕСТЕ

Задача № 66

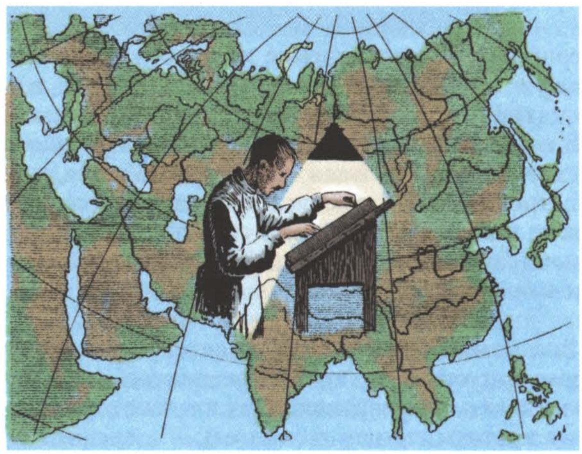
Последние страницы этой книги мне хочется посвятить ее первым читателям, без деятельного сотрудничества которых она не могла бы появиться на свет. Я говорю, конечно, о наборщиках. Они также совершают далекие арифметические путешествия, не выходя из пределов наборной, даже стоя неподвижно у наборных касс. Проворная рука труженика свинцовой армии, скользя ежесекундно от кассы к верстатке, проходит за год огромное расстояние. Сделайте подсчет. Вот данные: наборщик набирает в течение рабочего дня 8000 букв, и для каждой буквы должен переместить руку туда и назад на расстояние, в среднем, около полуметра. В году считайте 300 рабочих дней.

Решение

$$2 \times 0{,}5 \times 8000 \times 300 = 2400000 \text{ м, т. е. } 2400 \text{ км}$$

Значит, за 16–17 лет работы даже и наборщик, не отрывающийся от кассы, совершает кругосветное путешествие. «Неподвижный кругосветный путешественник»! Это звучит оригинальнее, чем «путешественник пешком».

Не найдется человека, который так или иначе не совершил бы в этом смысле кругосветного путешествия. Можно сказать, что замечательным человеком является

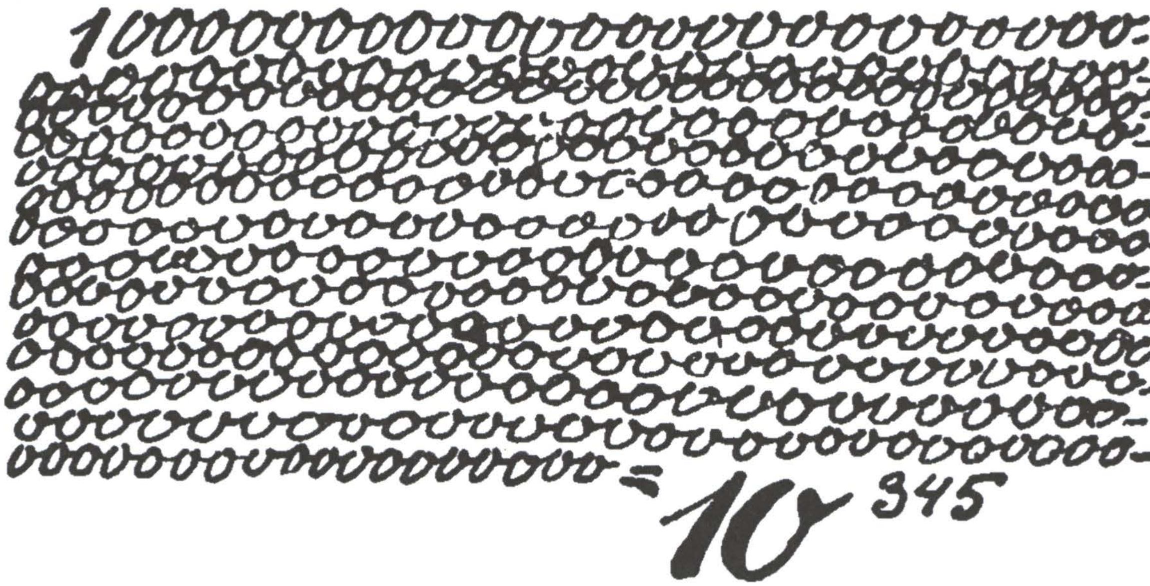


не тот, кто проделал кругосветное путешествие, а тот, кто его не совершил. И если кто-нибудь станет уверять вас, что этого не сделал, вы, надеюсь, сможете «математически» доказать ему, что он не составляет исключения из общего правила.

Эру кругосветных путешествий открыли древние моряки, прошедшие вокруг Земли под парусами. В XX в. стали привычными кругосветки яхтсменов-одиночек, которые в свое время заставили мир удивиться их смелости и мастерству мореплавателей. Первое современное одиночное кругосветное путешествие совершил на яхте «Спрей» американский моряк Джошуа Слокэм в 1895-1898 гг.

В конце XX в. мир был потрясен новым удивительным кругосветным путешествием. С 9 марта 2015 г. по 26 июля 2016 г. швейцарские пилоты Бертран Пиккар и Андре Боршберг облетели вокруг света на электро самолете «Solar Impulse 2».

[1] В настоящее время самая глубокая скважина в мире это Кольская сверхглубокая скважина (СГ-3), — пробуренная для изучения глубинного строения. Ее глубина составляет 12 262 метра.



73. ПЯТОЕ ДЕЙСТВИЕ

Алгебру называют нередко «арифметикой семи действий», желая подчеркнуть, что к четырем общеизвестным математическим операциям она присоединяет три новых: возвышение в степень и два ему обратных действия. Это гораздо характернее для алгебры, чем употребление буквенных обозначений. В истории математики мы знаем сочинения, даже целый ряд их, которые не содержат вовсе буквенных обозначений и все же представляют собой несомненно учебники алгебры; к таким «риторическим» алгебрам принадлежит, например, знаменитый учебник Фибоначчи или Леонарда Пизанского [1], появившийся в 1202 г. и употреблявшийся затем еще в течение трех столетий.

Наши алгебраические беседы начнутся с «пятого действия» — с возвышения в степень.

Вызвана ли потребность в этом новом действии практической жизнью? Безусловно. Мы очень часто сталкиваемся с ним в реальной действительности. Вспомним о многочисленных случаях вычисления площадей и объемов, где обычно приходится возвышать числа во вторую и третью степень. Далее: сила всемирного тяготения, электростатическое и магнитное взаимодействия, свет, звук — ослабевают пропорционально второй степени расстояния. Продолжительность обращения планет вокруг Солнца (и спутников вокруг планет) связана с расстояниями от центра обращения также степенной зависимостью: вторые степени времен обращения относятся между собою, как третьи степени расстояний.

Не надо думать, что практика сталкивает нас только со вторыми и третьими степенями, а более высокие показатели существуют только в упражнениях алгебраических задачников. Инженер, производя расчеты на прочность, сплошь и рядом имеет дело с четвертыми степенями, а при других вычислениях (например, диаметра паропровода [2] — даже с шестой степенью. Исследуя силу, с какою текучая вода увлекает камни, гидротехник наталкивается на зависимость также шестой степени: если скорость течения в одной реке вчетверо больше, чем в другой, то быстрая река способна перекатывать по своему ложу камни в 4^6, т. е. в 4096 раз более тяжелые, чем медленная [3].

С еще более высокими степенями встречаемся мы, изучая зависимость яркости раскаленного тела — например нити накала в электрической лампочке — от температуры. Общая яркость растет при белом калении с двенадцатой степенью температуры, а при красном — с тридцатой степенью температуры («абсолютной», т. е. считаемой от минус 273°). Это значит, что тело, нагретое, например, от 2000° до 4000° (абсолютных), т. е. в 2 раза сильнее, становится ярче в 2^{12}, иначе говоря, более чем в 4000 раз. О том, какое значение имеет эта своеобразная зависимость в технике изготовления электрических лампочек, мы еще будем говорить в другом месте, — так же, как и о применении «пятого действия» в явлениях живой природы.

74. АСТРОНОМИЧЕСКИЕ ЧИСЛА

Никто, пожалуй, не пользуется так широко пятым математическим действием, как астрономы. Исследователям вселенной на каждом шагу приходится встречаться с огромными числами, состоящими из одной-двух значащих цифр и длинного ряда нулей. Изображение обычным образом подобных числовых исполинов, справедливо называемых «астрономическими числами», неизбежно вело бы к большим неудобствам, особенно когда приходится производить с ними вычисления. Расстояние, например, до туманности Андромеды,

[1] Фибоначчи или Леонард Пизанский (ок. 1170 — ок. 1250) — итальянский математик.

[2] Паропровод — трубопровод по которому транспортируется пар (прим. ред.).

[3] Подробнее об этом — в «Занимательной математике» Я. И. Перельмана 1926 г. издания.

написанное обычным порядком, представляется таким числом километров:

8 500 000 000 000 000 000.

При выполнении астрономических расчетов приходится к тому же выражать зачастую небесные расстояния не в километрах или более крупных единицах, а в сантиметрах. Наше число, так раздробленное, удлиняется 5 нулями:

850 000 000 000 000 000 000 000.

Массы звезд выражаются еще большими числами, особенно если их раздроблять, как требуется для многих расчетов, в граммы. Масса нашего Солнца в граммах равна:

1900 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000.

Легко представить себе, как затруднительно было бы производить вычисления с такими громоздкими числами и как легко было бы при этом ошибиться. А ведь здесь приведены далеко еще не самые большие астрономические числа!

Пятое математическое действие дает вычислителям простой выход из этого затруднения. Единица, сопровождаемая рядом нулей, представляет собою определенную степень десяти:

$$100 = 10^2;\ 1000 = 10^3 \text{ и т. д.}$$

Приведенные раньше числовые великаны могут быть поэтому представлены в таком виде:

первый .... 85×10^{22}

второй .... 19×10^{32}

Делается это не только для сбережения места, но и для облегчения расчетов. Если бы потребовалось, например, оба эти числа перемножить, то достаточно было бы найти произведение $85 \times 19 = 1615$ и поставить его впереди множителя $10^{22+32} = 10^{54}$:

$$85 \times 10^{22} \times 19 \times 10^{32} = 1615 \times 10^{54}$$

Это, конечно, гораздо удобнее, чем выписывать сначала число с 22 нулями, затем с 32 и, наконец, с 54 нулями – не только удобнее, но и надежнее, так как при писании десятков нулей можно проглядеть один-два нуля и получить неверный результат.

75. СКОЛЬКО ВЕСИТ ВЕСЬ ВОЗДУХ?

Чтобы убедиться, насколько облегчаются практические вычисления при пользовании степенным изображением больших чисел, выполним такой расчет: определим, во сколько раз масса земного шара больше массы всего окружающего его воздуха.

На каждый кв. сантиметр земной поверхности воздух давит, мы знаем, с силою около килограмма. Это означает, что вес того столба атмосферы, который опирается на 1 *кв. см*, равен 1 *кг*. Атмосферная оболочка Земли вся составлена из таких воздушных столбов; их столько, сколько кв. сантиметров содержит поверхность нашей планеты; столько же килограммов весит вся атмосфера. Заглянув в справочник, узнаем, что поверхность земного шара равна 510 млн. *кв. км*. В степенном изображении

$$510\,000\,000 = 51 \times 10^7 \textit{ кв. км.}$$

Сколько кв. сантиметров в кв. километре? Рассчитаем. Линейный километр содержит 1000 ***м***, по 100 ***см*** каждый, т. е. $100000 = 10^5$ ***см***, а кв. километр – $(10^5)^2 = 10^{10}$ *кв. см*. Во всей поверхности земного шара заключается поэтому кв. сантиметров

$$51 \times 10^7 \times 10^{10} = 51 \times 10^{17}.$$

Столько же килограммов весит и атмосфера Земли. Переведя в тонны, получим

$$51 \times 10^{17} : 1000 = 51 \times 10^{17} : 10^3 = 51 \times 10^{17-3} =$$
$$= 51 \times 10^{14}.$$

Масса же земного шара выражается числом

$$6 \times 10^{21} \text{ тонн.}$$

Чтобы определить, во сколько раз наша планета тяжелее ее воздушной оболочки, производим деление:

$$6 \times 10^{21} : 51 \times 10^{14} = \text{около } 10^6,$$

т. е. масса атмосферы составляет, примерно, миллионную долю массы земного шара.

Едва ли бы вы избежали ошибки в числе нулей, если бы проделали весь этот расчет с числами в обычном изображении, не говоря уже о том, что затратили бы на него и больше времени.

76. ГОРЕНИЕ БЕЗ ПЛАМЕНИ И ЖАРА

Если вы спросите у химика, почему дрова или уголь горят только при высокой температуре, он скажет вам, что соединение углерода с кислородом происходит, строго говоря, при всякой температуре, но при низких температурах процесс этот протекает чрезвычайно медленно (т. е. в реакцию вступает весьма незначительное число молекул) и потому ускользает от нашего наблюдения. Закон, определяющий скорость химических реакций, гласит, что с понижением температуры на 10° скорость реакции (число участвующих в ней молекул) уменьшается в два раза. «Были измерены реакции, где заметная инверсия сахара (т. е. превращение его в смесь декстрозы и левулозы[1] наступала только через сутки, если жидкость была при 100°. Если поддерживать температуру при 0°, то скорость реакции будет в 210 раз меньше. Значит при 0° заметная реакция может быть наблюдаема только спустя $2^{10} = 1024$ суток, т. е. на третий год после начала опыта», – пишет Оствальд [2] («Эволюция химии»).

Применим сказанное к реакции соединения древесины с кислородом, т. е. к процессу горения дров. Пусть при температуре пламени 600° сгорает ежесекундно 1 ***гр*** древесины. Во сколько времени сгорит 1 ***гр*** дерева при 20°? Мы уже знаем, что при температуре, которая на $580 = 58 \times 10$ градусов ниже, скорость реакции меньше в

$$2^{58} \text{ раз,}$$

т. е. 1 грамм дерева сгорит в 2^{58} секунд.

[1] Декстроза и левулоза, сейчас глюкоза и фруктоза (прим. ред.).

[2] Вильгельм Фридрих Оствальд (1853-1932) русско-немецкий химик (прим. ред.).

Скольким годам равен такой промежуток времени? Мы можем приблизительно подсчитать это, не производя 57 умножений двойки на себя и обходясь без логарифмических таблиц. Воспользуемся тем, что $2^{10} = 1024 =$ = около 10^3.

Следовательно,

$$2^{58} = 2^{60-2} = 2^{60} : 2^2 = \frac{1}{4} \times 2^{60} = \frac{1}{4} \times (2^{10})^6 =$$

$$= \text{около } \frac{1}{4} \times 10^{18},$$

т. е. около четверти триллиона секунд. В году около 30 млн.) т. е. 3×10^6 секунд; поэтому

$$\left(\frac{1}{4} \times 10^{18}\right) : \left(3 \times 10^7\right) = \frac{1}{12} \times 10^{11} = \text{около } 10^{10}.$$

Десять миллиардов лет! Вот во сколько, примерно, времени сгорел бы грамм дерева без пламени и жара.

Итак, дерево, уголь горят и при обычной температуре, не будучи вовсе подожжены. Изобретение орудий добывания огня ускорило этот страшно медленный процесс в миллиарды раз.

77. РАЗНООБРАЗИЕ ПОГОДЫ

Задача

Будем характеризовать погоду только по одному признаку, – покрыто ли небо облаками или нет, т. е. станем различать лишь дни ясные и пасмурные. Как вы думаете, много ли при таком условии возможно шестидневок с различным чередованием погоды?

Казалось бы, немного: пройдет месяца два, и все комбинации ясных и пасмурных дней в шестидневке будут исчерпаны; тогда неизбежно повторится одна из тех комбинаций, которые уже наблюдались прежде.

Попробуем, однако, точно подсчитать, сколько различных комбинаций возможно при таких условиях. Это – одна из задач, неожиданно приводящих к пятому математическому действию.

Итак: сколькими различными способами могут на одной шестидневке чередоваться ясные и пасмурные дни?

Решение

Первый день шестидневки может быть либо ясный, либо пасмурный; имеем, значит, пока две «комбинации».

В течение двухдневного периода возможны следующие чередования ясных и пасмурных дней:

ясный и ясный
ясный и пасмурный
пасмурный и ясный
пасмурный и пасмурный.

Итого в течение 2 дней 2^2 различных рода чередований. В трехдневный промежуток к каждой из 4 комбинаций первых 2 дней присоединяются две комбинации третьего дня; всех родов чередований будет

$$2^2 \times 2 = 2^3.$$

В течение четырехдневки число чередований достигнет

$$2^3 \times 2 = 2^4.$$

В пятидневку возможно 2^5 и, наконец, в шестидневку – $2^6 = 64$ различного рода чередований.

Отсюда следует, что шестидневок с различным порядком следования ясных и пасмурных дней имеется 64. Спустя $64 \times 6 = 384$ дня, необходимо должно повториться одно из прежде бывших сочетаний; повторение, конечно, может случиться и раньше, но 384 дня – срок, по истечении которого такое повторение неизбежно. И обратно: может пройти целый год, даже больше (1 год и 19 дней), в течение которого ни одна шестидневка по погоде не будет похожа на другую.

78. ЗАМОК С СЕКРЕТОМ

Задача

В одном советском учреждении обнаружен был несгораемый шкаф, сохранившийся с дореволюционных лет. Отыскался и ключ к нему, но, чтобы им воспользоваться, нужно было знать секрет замка; дверь шкафа открывалась лишь тогда, когда имевшиеся на двери 5 кружков с алфавитом на их ободах (26 букв [1]) устанавливались на определенное слово. Так как никто этого слова не знал, то, чтобы не взламывать шкафа, решено было перепробовать все сочетания букв на кружках. На составление одного сочетания требовалось 3 секунды времени.

Можно ли надеяться, что шкаф будет открыт в течение ближайших 10 рабочих дней?

Решение

Подсчитаем, сколько всех буквенных сочетаний надо было перепробовать.

Каждая из 26 букв первого кружка может сопоставляться с каждой из 26 букв второго кружка. Значит, двубуквенных сочетаний было

$$26 \times 26 = 262.$$

К каждому из этих сочетаний можно присоединить любую из 26 букв третьего кружка. Поэтому трехбуквенных сочетаний было

$$26^2 \times 26 = 26^3.$$

Таким же образом определяем, что четырехбуквенных сочетаний было 26^4 и пятибуквенных 26^5, или 11 881 376. Чтобы составить эти почти 12 млн. сочетаний, потребовалось бы времени, считая по 3 секунды на каждое,

$$3 \times 11\,831\,376 = 35\,644\,128 \text{ сек.}$$

Это составляет около 10 000 часов или 1 400 семичасовых рабочих дней – без малого четыре года.

Значит, шансов на то, что шкаф будет открыт в течение ближайших 10 рабочих дней, имеется 10 из 1400, или один из 140. Это очень малая вероятность.

79. ДВОЙНИКИ

Подобным же расчетом можно уяснить себе, почему так редко попадаются люди со сходною наружностью, не находящиеся между собой в родстве.

Желая придать конкретность расчету, будем опираться хотя и на произвольные, но правдоподобные

[1] 26 букв – имеется в виду английский алфавит.

числовые данные. А именно, предположим, что разнообразие наружности зависит от изменчивости 25 признаков (рост, сложение, толщина, волосы, фасон головы, лоб, брови, глаза, нос, уши, щеки, губы, подбородок, шея и т. п.), из которых

10 допускают по 3 варианта каждый,
10 « « 4 « «
5 « « 5 « «

Нетрудно определить число всех различных комбинаций признаков. Оно равно

$$3^{10} \times 4^{10} \times 5^5.$$

Преобразуем это выражение:
$3^{10} \times 4^{10} \times 5^5 = 3^{10} \times 2^{20} \times 5^5 = 3^{10} \times 2^{15} \times 2^5 \times 5^5 = 3^{10} \times 2^{15} \times 10^5 = 59\,049 \times 32\,768 \times 10^5 =$ около 19×10^{13}. Людей же на всем земном шаре около 1 900 млн, т. е. 19×10^8. Число возможных изменений наружности больше числа людей в 10^{13-8}, т. е. в 100 000 раз.

Понятно теперь, почему двойники встречаются лишь в виде исключений. Людей на Земле недостаточно для того, чтобы двойники могли попадаться чаще.

80. ИТОГИ ПОВТОРНОГО УДВОЕНИЯ

Разительный пример чрезвычайно быстрого возрастания самой маленькой величины при повторном ее удвоении дает общеизвестная легенда о награде изобретателю шахматной игры [1]. Не останавливаясь на этом классическом примере, вошедшем в поговорку, приведу другие, не столь широко известные.

Задача

Инфузория парамеция каждые 27 часов (в среднем) делится пополам. Если бы все нарождающиеся таким образом инфузории оставались в живых, то сколько понадобилось бы времени, чтобы потомство одной парамеции заняло объем, равный объему Солнца?

Данные для расчета: 40-е поколение парамеций, не погибающих после деления, занимает в объеме 1 ***куб. м***; объем Солнца можно принять равным 10^{27} ***куб. м.***

Решение

Задача сводится к тому, чтобы определить, сколько раз нужно удваивать 1 *куб. м,* чтобы получить объем в 10^{27} *куб. м.* Делаем преобразования:

$$10^{27} = (10^3)^9 \approx (2^{10})^9 \approx 2^{90},$$

так как $2^{10} \approx 1000$ (точно 1024) [2].

Значит, сороковое поколение должно претерпеть еще 90 делений, чтобы вырасти до объема Солнца. Общее число поколений, считая от первого, равно $40 + 90 = 130$. Легко сосчитать, что это произойдет на 140-е сутки.

Заметим, что фактически одним микробиологом (Метальниковым [3]) наблюдалось 8 061 деление парамеции. Предоставляю читателю самому рассчитать, какой колоссальный объем заняло бы последнее поколение, если бы ни одна инфузория из этого количества не погибла...

Вопрос, рассмотренный в этой задаче, можно предложить, так сказать, в обратном виде:

Вообразим, что наше Солнце разделилось пополам, половина также разделилась пополам и т. д. Сколько понадобится таких делений, чтобы получились частицы величиной с инфузорию?

Хотя ответ уже известен читателям – 130, он все же поражает своею несоразмерною скромностью.

Мне предложили ту же задачу в такой форме:

Листок бумаги разрывают пополам, полученную половину снова делят пополам и т. д. Сколько понадобится делений, чтобы получить частицы атомных размеров?

Допустим, что бумажный лист весит 1 *г* и примем для веса атома величину порядка $1/10^{24}$ ***г.*** Так как в последнем выражении можно заменить 10^{24} приближенно равным ему выражением 2^{80}, то ясно, что делений пополам потребуется всего 80, а вовсе не миллионы, как приходится иногда слышать в ответ на вопрос этой задачи.

81. НЕОБЫЧАЙНОЕ ЛЕКАРСТВО

То направление в медицине, которое носит название гомеопатии, признает обычные дозы лекарств вредными и назначает лекарства только в чрезвычайно сильном разведении. Гомеопатические лекарства приготовляются так. Одну часть лекарственного настоя разбавляют в 99 равных частях чистого спирта. Сотую часть полученного раствора вновь смешивают с 99 частями спирта. То же делают с сотой долей нового разведения и т. д., повторяя эту операцию от 18 до 30 раз. Для лечения, например, коклюша настой росянки (Drosera) разбавляют в спирту тридцатью сейчас описанными приемами.

Надо думать, что, назначая подобные дозы лекарств, гомеопаты никогда не пытались математически осознать то, что они делают. Потому что, если подойти к гомеопатическим разведениям с надлежащим расчетом, то обнаружится совершенно неожиданная вещь. Займемся таким вычислением; оно как раз и относится к настоящему разделу нашей книги.

Пусть количество первоначального лекарственного настоя равнялось 100 *куб. см.* В. гомеопатической аптеке берут 1 сантиметровый кубик настоя и смешивают с 99 кубиками чистого спирта. Получают 100 кубиков раствора, в котором содержится 1 кубик лекарства. Иначе говоря, лекарство разбавлено в 100 раз.

Далее берут 1 *куб. см* этого разбавленного лекарства и смешивают с 99 *куб. см* чистого спирта, т. е. разбавляют снова в 100 раз. Но в новом растворе на 100 *куб. см* жидкости приходится уже только 0,01 *куб. см.* первоначального настоя. Следовательно, здесь степень разбавления $0{,}01 \times 0{,}01 = 0{,}0001$, или $1/10^4$.

[1] См. мою книгу «Живая математика», гл. VII.

[2] Знак ≈ обозначает приближенное равенство.

[3] Сергей Иванович Метальников (1870-1946) русский врач-иммунолог. (прим. ред.).

1 В грамм-молекуле любого вещества содержится 6,602 × 1023 молекул (число Авогадро). Грамм-молекулой называется число граммов вещества, равное его молекулярному весу. Грамм-молекула этилового спирта (C2H6O) весит 12 × 2 + 6 + 16 = 46 граммов. Значит, в одном грамме спирта содержится молекул

6,602 : 1023 : 46 ≈ 1,5 × 1022.

А в ***куб. см*** — около 1,2 × 1022.

После третьей подобной же операция первоначальный раствор разбавляется в 100^3, т. е. в 10^6; после четвертой – в 10^8 раз и т. д.

Наконец, после 30-й операции (столько их предписано для лекарства против коклюша) первоначальный настой окажется разбавленным в 10^{60} раз. Это значит, что 1 *куб. см* настоя словно влит в 10^{60} *куб. см* спирта.

Пока мы видим лишь «астрономическое число», но не подозреваем, что оно означает. Дело предстанет перед нами в новом свете, если сопоставим это число с числом молекул в 1 *куб. см* первоначального лекарства. Физика утверждает (имея на то вполне достаточные основания), что число молекул в 1 *куб. см* настоя[1] порядка 10^{22}. Иными словами, в объеме 10^{60} *куб. см* разбавленной жидкости содержится «только» 10^{22} молекул лекарственного вещества, – по одной молекуле на каждые

$$10^{60} : 10^{22} = 10^{38} \text{ куб. см.}$$

Что же это за объем 10^{38} *куб. см*, содержащий одну молекулу лекарства? Сделаем расчет. В куб. километре 10^{16} *куб. см*. Значит, 10^{38} *куб. см* заключают в себе куб. километров

$$10^{38} : 10^{15} = 10^{23}.$$

Заглядываем в астрономический справочник и ищем подходящие объемы. Находим, что объем земного шара, 10^{12} *куб. км*, – микроскопическая величина по сравнению с сейчас полученной. Даже Солнце, имеющее объем 14×10^{17} *куб. км*, недостаточно велико для наглядного сравнения; оно в 70 000 раз меньше того объема раствора, который содержит в себе одну единственную молекулу лекарственного вещества.

Возвращаясь от астрономии к медицине, приходим к такому выводу. Если признать, что 1 молекула росянкового настоя способна излечить коклюш, то больной должен для своего исцеления проглотить 70 тысяч пилюль, каждая величиной с Солнце, – порция для детского возраста несомненно чрезмерная...

После сказанного естественно поставить вопрос: что же содержат в себе пилюли гомеопатических аптек? Очевидно, все что угодно, только не лекарственное вещество. Легко рассчитать, что уже после 11-го разведения, когда 1 *куб. см* первоначального настоя разбавился на 10^{22} раз, в стакане жидкости окажется всего только одна молекула лекарства. Остальные 19 разведений будут состоять уже из чистого спирта, без лекарственного вещества. Ведь, беря из склянки (100 *куб. см*) 1 *куб. см*, едва ли посчастливится извлечь как раз тот кубик, в котором затеряна наша единственная молекула. 99 шансов против и только один – за. И уже во всяком случае так не будет 19 раз кряду; можно поручиться, что до 30-го разведения ни одна молекула лекарственного вещества не дойдет[1].

Раньше было замечено, что гомеопаты никогда не отдают себе отчета в математической стороне своих операций. Это не вполне верно. Русский химик А. М. Бутлеров, принадлежавший к сторонникам гомеопатии, ясно сознавал астрономическую огромность того количества спирта, в котором разводится гомеопатическое лекарство. В одной из его статей читаем:

«Хотя все знают, что гомеопатические лекарства употребляются часто в больших разжижениях, но далеко не все имеют ясное представление, о каких именно величинах идет здесь речь... При каждом разжижении количество вещества делится на 10. Поэтому в сотом разжижении на 1 *куб. мм* первоначальной лекарственной тинктуры приходится такое количество алкоголя, которое, представленное в кубических миллиметрах, выражается цифрой, имеющей после себя сто нулей. Если представить себе всю эту массу жидкости в форме куба, то единица и 30 нулей выразят в метрах величину ребра куба... Простой расчет показывает, что в квинтиллионе метров содержится около 10 триллионов солнечных расстояний и около 7 биллионов расстояний от Земли до Сириуса... Если же взять двухтысячное разведение, то, выражая величину ребра куба жидкости в расстояниях Сириуса, мы имели бы цифру, заключающую не менее 646 знаков».

Это не мешало нашему химику с доверием относиться к сообщению, что «поваренная соль обнаруживает главный максимум действия в двухтысячном разведении».

Чудовищное разведение не смущало сторонников гомеопатии и не ослабляло их веры в действие лекарств потому, что они, не зная числа молекул в 1 *куб. см* ссылались на факт поглощения энергии материей при переходе в более тонкое состояние. «Образование воды из льда, пара из воды сопровождается поглощением тепла; пар является, так сказать, резервуаром «энергии» (Бутлеров). Но все подобные соображения, каковы бы они ни были, начисто отпадают, когда в пилюле нет буквально ни одной молекулы лекарственного вещества!

Изложенные здесь критические соображения направлены не против гомеопатии в целом, а лишь против веры в действие тех лекарств, при изготовлении которых лекарственное вещество дробится на число частей, превышающих число содержащихся в нем молекул.

82. ЧЕТЫРЬМЯ ЕДИНИЦАМИ

Задача

Четырьмя единицами, не употребляя никаких знаков математических действий, написать возможно большее число.

Решение

Естественно приходящее на ум решение – 1111 – не отвечает требованию задачи, так как число

$$11^{11}$$

во много раз больше. Вычислять это число десятикратным умножением на 11 едва ли у кого хватит терпения. Но можно определить его величину гораздо быстрее – помощью логарифмических таблиц. Число это превышает 285 миллиардов и, следовательно, больше числа 1111 в 25 млн. раз.

83. ТРЕМЯ ДВОЙКАМИ

Всем, вероятно, известно, как следует написать три цифры, чтобы изобразить ими возможно большее число. Надо взять три девятки и расположить их так:
т. е. написать третью «сверхстепень» от 9[2].

---

[1] Автором этого поучительного расчета является не кто иной, как всемирно известный датский физик Нильс Бор.

[2] Алгебраический символ для третьей сверхстепени 9 таков: $9^{(3)}$, для четвертой сверхстепени 2-х: $2^{(4)}$ и т. д.

$$9^{9^{9}},$$

Число это столь чудовищно велико, что никакие сравнения не помогают уяснить себе его грандиозность. Число электронов видимой вселенной ничтожно по сравнению с ним. В моей «Занимательной арифметике» уже говорилось об этом. Возвращаюсь к этой задаче лишь потому, что хочу предложить здесь по ее образцу другую:

Тремя двойками, не употребляя знаков действий, написать возможно большее число.

Решение

Под свежим впечатлением трехъярусного расположения девяток, вы, вероятно, готовы дать и двойкам такое же расположение:

$$2^{2^{2}}$$

Однако, на этот раз ожидаемого эффекта не получается. Написанное так число довольно мизерно, – меньше даже, чем ординарное 222. В самом деле: ведь мы написали всего лишь 2^4, т. е. 16.

Подлинно наибольшее число из трех двоек не 222 и не 22^2 (т. е. 484), а

$$2^{22} = 4\ 194\ 304.$$

Пример очень поучителен. Он показывает, что в математике опасно поступать по аналогии; она легко может повести к ошибочным заключениям.

84. ТРЕМЯ ТРОЙКАМИ

Задача

Теперь, вероятно, вы осмотрительнее приступите к решению следующей задачи.

Тремя тройками, не употребляя знаков действий,

$$3^{3^{3}},$$

написать возможно большее число.

Решение

Трехъярусное расположение и здесь не приводит к ожидаемому эффекту, так как
т. е. 3^{27}, меньше, чем 3^{33}.

Последнее расположение и дает ответ на вопрос задачи.

85. ТРЕМЯ ЧЕТВЕРКАМИ

Задача

Тремя четверками, не употребляя знаков действий, написать возможно большее число.

Решение

Если в данном случае вы поступите по образцу сейчас рассмотренных двух задач, т. е. дадите ответ

$$4^{44},$$

то промахнетесь, потому что на этот раз трехъярусное расположение

$$4^{4^{4}},$$

как раз дает большее число. В самом деле, $4^4 = 256$, а 4^{256} больше чем 4^{44}.

86. ТРЕМЯ ОДИНАКОВЫМИ ЦИФРАМИ

Попытаемся углубиться в это озадачивающее явление и установить, почему одни цифры порождают числовые исполины при трехъярусном расположении, другие – нет. Рассмотрим общий случай.

Тремя одинаковыми цифрами, не употребляя знаков действий, изобразить возможно большее число.

Обозначим цифру буквой a. Расположению

$$2^{22},\ 3^{33},\ 4^{44}$$

соответствует написание

$$a^{10a+a},\ \text{т. е. } a^{11a}.$$

Расположение же трехъярусное представится в общем виде так:

$$a^{a^{a}}$$

Определим, при каком значении a последнее расположение изображает большее число, нежели первое. Так как оба выражения представляют степени с равными целыми основаниями, то большая величина отвечает большему показателю. Когда же

$$a^a > 11a?$$

Разделим обе части неравенства на a. Получим:

$$a^{a-1} > 11.$$

Легко видеть, что a^{a-1} больше 11 только при a, равном или большем 4, потому что

$$4^{4-1} > 11,$$

между тем как степени

$$3^2 \text{ и } 2^1$$

меньше 11.

Теперь понятны те неожиданности, с которыми мы сталкивались при решении предыдущих задач: для двоек и троек надо было брать одно расположение, для четверок и более – другое.

87. ЧЕТЫРЬМЯ ДВОЙКАМИ

Задача

Сделаем следующий шаг в развитии задач рассматриваемого рода и поставим наш вопрос для четырех одинаковых цифр, именно для двоек. При каком расположении четыре двойки изображают наибольшее число?

Решение

Возможны 8 комбинаций:

$$2222,\ 222^2,\ 22^{22},\ 2^{222}$$

$$22^{2^{2}},\quad 2^{22^{2}},\quad 2^{2^{22}},\quad 2^{2^{2^{2}}}.$$

Какое же из этих чисел наибольшее?

Займемся сначала верхним рядом, т. е. числами в двухъярусном расположении.

Первое – 2222 – очевидно меньше трех прочих. Чтобы сравнить следующие два –

$$222^2 \text{ и } 22^{22},$$

преобразуем второе из них:

$$22^{22} = 22^{2 \times 11} = (22^2)^{11} = 484^{11}.$$

Последнее число больше, нежели 222^2 так как и основание и показатель степени 484^{11} больше, чем у степени 222^2.

Сравним теперь 22^{22} с четвертым числом – первой строки – с 2^{222}. Заменим 22^{22} большим числом 32^{22} и покажем, что даже это большее число уступает по величине числу 2^{222}.

В самом деле

$$32^{22} = (2^5)^{22} = 2^{110}$$

– степень меньшая, нежели 2^{222}.

Итак, наибольшее число верхней строки – 2^{222}.

Теперь нам остается сравнить между собой пять чисел – сейчас полученное и следующие четыре:

Последнее число, равное всего 2^{16}, сразу выбывает из состязания. Далее, первое число этого ряда, равное 22^4 и меньшее, чем 32^4 или 2^{20}, меньше каждого из двух следующих. Подлежат сравнению, следовательно, три числа, каждое из которых есть степень 2. Больше, очевидно, та степень 2, показатель которой больше. Но из трех показателей

$$222,\ 484 \text{ и } 2^{20+2}\ (= 2^{10 \times 2} \times 2^2 = \text{около } 10^6 \times 4)$$

последний – явно наибольший.

$$22^{2^2},\quad 2^{22^2},\quad 2^{2^{22}},\quad 2^{2^{2^2}}.$$

Поэтому наибольшее число, какое можно изобразить четырьмя двойками, таково

$$2^{2^{22}},$$

Не обращаясь к услугам логарифмических таблиц, мы можем составить себе приблизительное представление о величине этого числа, пользуясь приближенным равенством

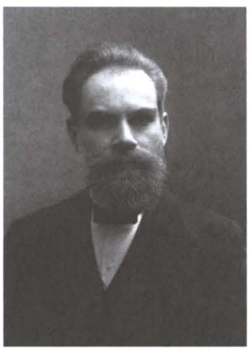
$$2^{10} = \text{около } 1000.$$

В самом деле

$$2^{22} = 2^{20} \times 2^2 = \text{около } 4 \times 10^6,$$

$$2^{2^{22}} = \text{около } 2^{4\,000\,000} = \text{около } 10^{1\,200\,000}.$$

Ясно, что в этом числе свыше миллиона цифр.



Александр Михайлович Ляпунов (1857–1918)

Россия дала миру немало выдающихся ученых, среди которых были и математики с мировой известностью.

Александр Михайлович Ляпунов (1857–1918), математик и механик, академик Санкт-Петербургской Академии наук, член-корреспондент Парижской академии наук, член Национальной академии деи Линчеи (Рим, Италия) и других академий наук и научных обществ.

Незаурядные способности он проявил уже в юном возрасте, поэтому, несмотря на раннюю смерть отца, мать будущего математика, Софья Александровна всеми силами старалась продолжить обучение Саши. Семья специально переезжает из Ярославля в Нижний Новгород, где гимназист Александр Ляпунов оканчивает учебу с золотой медалью. Затем он поступает в Санкт-Петербургский университет.

Вскоре после окончания университета молодой приват-доцент получает предложение из Харькова, где возглавляет кафедру механики местного университета. В 1892 г. в Московском университете, Ляпунов блестяще защищает первую свою фундаментальную работу – докторскую диссертацию «Общая задача об устойчивости движения». Попутно можно заметить, что оппонентом на защите Ляпунова был профессор Н. Е. Жуковский, которого называли отцом русского воздухоплавания, ученый, создавший науку аэродинамику.

Весной 1902 г. после его избрания ординарным академиком по кафедре прикладной математики Петербургской Академии наук академик Ляпунов переезжает в Петербург. Здесь он продолжает научную деятельность и пишет научный труд в четырех частях «О фигурах равновесия однородной вращающейся жидкости, мало отличающихся от эллипсоидальных».

Особое место в работах Ляпунова занимает его «Теория устойчивости равновесия и движения механических систем, определяемых конечным числом параметров». Эта работа дала теоретическую основу для разработки в дальнейшем систем управления полетом самолетов и ракет. Остальные научные труды посвящены небесной механике, математической физике и теории вероятностей.

Конец жизни для Александра Михайловича сложился весьма драматически. В 1917 г., по настоянию врачей, ему пришлось переехать в Одессу, чтобы пройти курс лечения от туберкулеза его жены. Но, к великому сожалению, она умерла. В день ее смерти, Ляпунов, не выдержав такого удара судьбы, покончил жизнь самоубийством, выстрелив в себя. Он умер через три дня, так и не придя в сознание. Ему шел 62-й год. Похоронен выдающийся ученый в Одессе.

88. МЫСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ

Испанский философ XIII в. Раймонд Люллий, придумал способ автоматически выводить из общих понятий всевозможные истины. Поясним своеобразный ход его рассуждений на примере. Возьмем понятие «золото» и ряд понятий, обозначающих цвета: синий, зеленый, желтый, красный, белый, черный и т. д. Будем сочетать понятие «золото» последовательно со всеми понятиями цвета. Получим ряд положений:

золото — синее, золото — красное, золото — желтое, золото — белое и т. д.

В этом перечне, составленном чисто-механическим путем, должно заключаться (если список цветов был полон) среди других также и истинное утверждение о цвете золота. Будь цвет золота нам неизвестен, мы могли бы его узнать, не исследуя вовсе самого металла, — если бы только сумели выудить единственно правильное утверждение из перечня остальных, неверных. Люллий был глубоко убежден, что, сочетая понятие «золото» также с другими понятиями (помимо цвета), удастся путем перекрестного сопоставления различных перечней безошибочно обнаружить в них истинные утверждения. Этот воображаемый метод открывать истины путем автоматического анализа понятий Люллий называл своим «великим искусством».

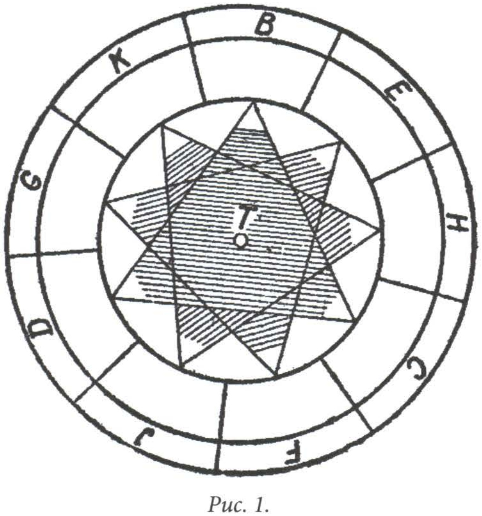


Рис. 1.

Этот испанский ученый придумал даже механический прибор для облегчения подобных умственных операций. Прибор состоял из нескольких подвижных концентрических кругов, разделенных радиальными линиями на отделения, в которых обозначались общие понятия. Вследствие концентричности кругов подразделения каждого из них занимали определенное положение относительно подразделений прочих кругов, а вращая круги, можно было получать множество новых сочетаний.

Рис. 1 воспроизводит одну из моделей Люллиевой вертушки. Видны три круга, один внутри другого, вращающегося около общего центра ***T***. На краях наружного круга 9 букв ***BEHCF***... означают некоторые общие понятия; в 9 отделениях средней кольцевой полосы помещался другой ряд понятий, и, наконец, на третьем, внутреннем круге возле углов девятиконечной звезды размещался еще третий ряд понятий. Ясно, что, поворачивая круги, можно создать всевозможные комбинации этих групп понятий. Общее число их нетрудно подсчитать:

$$9^3 = 729.$$

В наши дни с трудом верится, что подобная игрушка могла глубоко волновать умы той сумрачной эпохи. Но не забудем, что Люллий жил в век религиозных и всяких иных суеверий. Радужные надежды, которые изобретатель возлагал на свою вертушку, нашли отклик в сердцах современников и горячо разделялись «ученым миром» его эпохи. Многие прониклись радостным убеждением, что «великое искусство» Люллия открывает прямой путь к быстрому разрешению всех проблем науки, всех загадок бытия, всех тайн земли и неба. С необычайным рвением принялись испытывать «искусство» Люллия. Философы, астрологи, алхимики искали с помощью вертушки разрешения занимавших их вопросов. Все единодушно считали

Люллия величайшим ученым эпохи и слепо верили в его учение.

Целое столетие держалось увлечение мыслительной рулеткой, прежде чем передовые умы постигли простую мысль, что эта бесплодная затея не может оправдать возлагаемых на нее надежд. Остановка была за малым: не удавалось найти способа извлекать жемчужины истины из того океана бессмыслицы, которым затопляла человеческие умы вертушка испанского философа. Умственная эпидемия ослабела, машинка Люллия утратила приверженцев, и люди постепенно обратились к единственно верному пути познания мира, основанному на терпеливом исследовании самой природы.

Однако, идея Люллия в том или ином виде находила и впоследствии отдельных сторонников. Среди них были и великие мыслители. Джордано Бруно (XVI в.), например, долго пытался извлечь здоровое ядро из учения средневекового философа, много размышляя о его мыслительной вертушке, произносил на эту тему публичные речи, но постепенно пришел к мысли, что возможная польза изобретения Люллия весьма сомнительна и сводится лишь к некоторому облегчению памяти. Столь же безрезультатно занимался «вертушкой понятий» и Афанасий Кирхнер, ученый XVII в.

Мало кому известно (биографы почти не касаются этого), что и такой могучий ум, как Лейбниц, много размышлял над вертушкой Люллия. Но для этого философа и великого математика увлечение идеей механизации мысли не прошло бесследно: в результате он изобрел счетную машину (1671 г.), более совершенную, нежели та, которая двадцатью годами раньше была придумана Паскалем.

Прямой логической связи между вертушкой Люллия и счетной машиной в сущности нет. Идеи, положенные в их основу, скорее противоположны. Машинка Люллия дает всевозможные сочетания, которые все, кроме одного, неверны. В счетной машине, наоборот, появляется только та единственно верная комбинация, которую машинка Люллия бессильна отыскать. Некоторого внешнего сходства между обоими приборами оказалось достаточным, чтобы натолкнуть мысль Лейбница на правильный путь и помочь ему сделать полезное изобретение из бесплодной идеи. Машины для автоматического решения уравнений (мы будем говорить о них дальше) тоже имеют с вертушкой Люллия лишь чисто наружное сходство [1].

В эпоху Свифта, 200 лет назад, увлечение мыслительными машинами было, очевидно, еще очень сильно, потому что автор «Путешествий Гулливера» высмеял эту идею в своей бессмертной сатире. В той части, где повествуется о путешествии в Лапуту, находим следующее место, посвященное мыслительной машине:

«Мы зашли во второе отделение Академии. Первый из профессоров, с которым мне пришлось познакомиться, восседал в большой комнате, окруженный 40 студентами. Заметив, что я внимательно рассматриваю стоячую раму, занимавшую большую часть комнаты, он сказал:

[1] То же относится и к так называемой «Логической машине» Джевонса [2].

[2] Уильям Стэнли Джевонс (1835-1882) английский философ — логик и экономист (прим. ред.).

« — Быть может, вас удивит, что, будучи специалистом по выработке и усовершенствованию отвлеченных знаний, я намерен достичь этой цели посредством механического аппарата. Но мир скоро оценит всю целесообразность моего проекта, и я даже уверен, что никогда еще доселе не зарождалось в мозгу человеческом столь гениальной идеи. Известно, как трудно изу-чение наук и искусств по общепринятому методу; но едва войдет во всеобщее употребление мой механический аппарат, — самый невежественный человек получит возможность писать всякие книги: философские и юридические трактаты, сочинения по богословию и математике, политические памфлеты и даже стихи, ибо, чтобы сочинять книги, не понадобится тогда ни учености, ни таланта.

С этими словами профессор подвел меня к раме, по бокам которой стояли рядом его ученики. Рама была квадратной формы и имела 20 футов в длину и высоту. По всей раме, от края до края, были натянуты проволоки с нанизанными на них кубиками, в среднем величиной с игральную кость. На сторонах каждого кубика были написаны слова лапутского языка во всех их грамматических формах — временах, наклонениях, падежах, — но без всякой системы. По команде профессора 40 студентов взялись за 40 рукояток по краям рамы, повернули их на один оборот — и расположение слов в раме совершенно изменилось. Профессор приказал 36 студентам прочесть про себя все слова, появившиеся в раме, и когда из них составлялась осмысленная фраза, диктовать ее четырем прочим студентам. Эту манипуляцию проделали раза четыре, — и всякий раз в раме получались новые комбинации слов.

Студенты занимались этой работой по шести часов в день, и профессор показал мне несколько фолиантов, составленных из фраз, которые появлялись на деревяшках. Он намеревался рассортировать этот богатый материал, подобрать по предметам и таким образом обогатить мир полной библиотекой книг по всем отраслям знания. Его работа, говорил он, была бы успешнее, если бы имелись средства на сооружение 500 таких машин и все заведующие машинами работали бы сообща».

89. ЛИТЕРАТУРНЫЙ АВТОМАТ

Легко вообразить себе буквопечатающий механизм наподобие общеупотребительного нумератора, который последовательно печатает все сочетания, возможные при наборе текста из 1000 букв. Когда работа будет выполнена, т. е. будут целиком исчерпаны все возможные комбинации букв, мы отбросим бессмысленные сочетания, и у нас в руках очутятся все литературные отрывки, какие мыслимо написать тысячей литер. А именно: по отдельным страницам, по полустраницам будем мы иметь все, что когда-либо было написано и когда-либо будет написано в прозе, в стихах на русском и на всех существующих и будущих языках (потому что любое иностранное слово можно ведь передать буквами русского алфавита). Все романы и рассказы, все научные сочинения и доклады, все журнальные и газетные статьи и известия, все стихотворения, все разговоры, когда-либо слышанные всеми прежде жившими людьми, и все то, что еще предстоит передумать и высказать людям грядущих поколений...

Самый механизм можно представить себе осуществленным, примерно, в таком виде. Вообразите шестеренку, на ободе которой помещается 100 различных литер. Пусть высота и ширина одной литеры — 2 *мм*, Окружность шестеренки в 2 × 100, т. е. в 200 *мм*, имеет диаметр меньше 7 *см*. Толщина шестеренки может быть немного шире литеры — пусть в 4 *мм*. Вообразим 1000 таких шестеренок, насаженных рядом на одну общую ось. Получим вал длиною 4 *м* и толщиною 7 *см*. Шестеренки соединены между собой так, как это делается в нумераторах и в счетных машинах, а именно: при полном повороте первой шестеренки вторая повертывается на одну литеру, при полном повороте второй — третья повертывается на одну литеру, и так до последней 1000-й шестеренки. Валик покрывается типографской краской и делает оттиски на длинной, 4-метровой бумажной полосе. Таково устройство машины.

Как же она работает? Шестеренки вращаются последовательно. Сначала начинает вращаться первая и дает на бумаге оттиски своих литер, — это первые 100 «литературных произведений» из категории бессмысленных. Когда она обернется один раз, она вовлекает во вращение вторую шестеренку: та повертывается на одну литеру и остается в этом положении, пока первая продолжает вращаться; получим еще 100 оттисков, теперь уже из двух букв. После 100 таких оборотов вторая шестеренка повертывается еще на одну литеру, опять обе дают 100 новых оттисков, и т. д. Когда же и вторая сделает полный оборот, присоединяется третья шестеренка; получаются всевозможные оттиски из трех литер. И так далее, пока не дойдет очередь до последней, 1000-й шестеренки. Когда 1000-я шестеренка сделает полный оборот, все возможные комбинации в 1000 литер будут исчерпаны, и останется лишь работа по разборке оттисков.

Мы нарочно остановились на подробностях конструкции машины, чтобы придать проекту большую конкретность и убедительность. Действительно, на первый взгляд проект кажется вполне осуществимым. Однако несложный расчет обнаруживает его несбыточность. Пусть первая шестеренка вертится с быстротой 30 000 оборотов в минуту — самой большой, достижимой в современной технике. Первые несколько шестеренок будут вступать в работу спустя секунды и минуты одна после другой. Но нетрудно вычислить, что следующие шестеренки будут запаздывать все более и более. Вот расчет:

2-я шестерня вступит в работу, когда первая сделает 1 оборот;
3-я — когда первая сделает 100 оборотов;

4-я –	«	«	«	100^2	«
5-я –	«	«	«	100^3	«
n-я –	«	«	«	100^{n-2}	«

Отсюда устанавливаем, что n-я шестерня вступит в работу спустя

$$\frac{100^{n-2}}{30\,000} \text{ мин, т. е. } 2 \times 10^{2n-7} \text{ сек.}$$

Легко рассчитать, что 10-я шестерня ($n = 10$) начнет работать через 6 400 000 лет, а тысячная ($n = 1000$) спустя

$$2 \times 10^{2000-7} = 2 \times 10^{1993} \text{ сек.} = 7 \times 10^{1985} \text{ лет.}$$

Число, состоящее из 1986 цифр!

Ясно, что все звезды успеют погаснуть миллион раз, прежде чем начнет работать последняя шестеренка, и труд машины будет вполне закончен. Не говорим уже о том, что во вселенной не хватит материала для всех оттисков.

Ведь в доступной нашему исследованию вселенной не более 10^{73} электронов [1] и протонов; значит, даже если бы каждый оттиск состоял из одного электрона, можно было бы отпечатать лишь ничтожную долю всей продукции «литературной машины». Перерабатывать старые оттиски вновь на бумагу? Но допуская даже при этом ничтожнейшую потерю материи в 1 биллионную долю мы должны были бы иметь — считая снова по электрону на оттиск — число оттисков из 1767 цифр; между тем число электронов и протонов содержит всего 74 цифры...

Можно возразить, пожалуй, что незачем ждать окончания работы «литературной машины»: шедевры литературы и замечательные открытия могут случайно оказаться среди первого миллиона оттисков. При невообразимо огромном числе возможных сочетаний эта вероятность более ничтожна, чем вероятность случайно наткнуться на один определенный электрон среди всех электронов вселенной. Число электронов во вселенной неизмеримо меньше, чем общее число миллионов возможных оттисков нашей машины.

Но пусть даже осуществилось несбыточное, пусть случилось чудо, и в наших руках имеется сообщение о научном открытии, появившееся из-под машины без участия творческой мысли. Сможем ли мы этим открытием воспользоваться?

Нет, мы даже не сможем признать это открытие. Ведь у нас не будет критерия, который позволил бы нам отличить истинное открытие от многих мнимых, столь же авторитетно возвещаемых в процессе работы нашей машины. Пусть, в самом деле, машина дала нам отчет о превращении ртути в золото. Наряду с правильным описанием этого открытия будет столько же шансов иметь множество неправильных его описаний, а кроме того описаний и таких процессов, как превращение меди в золото, марганца в золото, кальция в золото и т. д. Оттиск, утверждающий, что превращение ртути в золото достигается при высокой температуре, ничем не отличается от оттиска, предписывающего прибегнуть к низкой температуре, причем могут существовать варианты оттисков с указанием всех температур от минус 273 до плюс бесконечность. С равным успехом могут появиться из-под машины указания на необходимость пользоваться высоким давлением (тысячи вариантов), электризацией (опять тысячи вариантов), разными кислотами (снова тысячи и тысячи вариантов) и т. п.

Как при таких условиях отличить подлинное открытие от мнимого? Пришлось бы тщательно проверять на опыте каждое указание (кроме, конечно, явно нелепых), т. е. проделать такую огромную лабораторную работу, которая совершенно обесценила бы всю экономичность идеи «литературной машины».

---

[1] По Шепли [2].

[2] Харлоу Шепли (1885-1972) американский астроном (прим. ред.).

Точно так же пришлось бы проделать обширные исторические изыскания, чтобы проверить правильность каждого исторического факта, утверждаемого каким-нибудь продуктом механического производства открытий. Словом, подобный механический способ двигать науку вперед был бы совершенно бесполезен, даже если бы и удалось дождаться осмысленного оттиска.

Поучителен следующий расчет французского математика Бореля (в книге «Случай»): вероятность выпадения орла 1000 раз подряд при игре в орлянку определяется одним шансом из 2^{1000}. Так как число 2^{1000} содержит около 300 цифр, то этот шанс приблизительно таков же, как и шанс получить две первых строки определенного стихотворения, вынимая на удачу буквы по следующему способу: в шапке 25 букв, одна из них вынимается, записывается и кладется обратно в шапку; после встряхивания вынимается вторая и т. д. Строго говоря, получить таким образом две первых строки определенного стихотворения вполне возможно. «Однако, — справедливо замечает Борель, — это представляется нам до такой степени маловероятным, что если бы подобный опыт удался на наших глазах, мы считали бы это плутовством».

Читателю, вероятно, интересно будет познакомиться с теми соображениями, которые высказаны были по поводу литературного автомата проф. О. Д. Хвольсоном [1]. Покойный физик заинтересовался этой задачей, когда она предложена была мною (в 1924 г.) на страницах вечерней газеты, и изложил свои мысли в остроумном сообщении, присланном в редакцию. Вот несколько выдержек из этого письма:

«Весьма любопытно, до какой степени ничтожными сравнительно с числом N (т. е. числом сочетаний из 100 литер, возможных при наборе текста в 1000 букв) представляются самые чудовищные числа, которые только можно придумать, но которые относились бы к физическому миру. Если число N разделить на эти чудовищные числа, то оно для нас еле заметно меняется. Приведем примеры.

1. В одном кубическом сантиметре воздуха находится примерно $2{,}7 \times 10^{19}$ молекул. Если из сосуда, содержащего это число молекул, выпускать каждую секунду по одному миллиону частиц, то весь сосуд опорожнится через один миллион лет! Легко вычислить, что вся земная атмосфера содержит около 10^{44} молекул. Надо взять 10^{1956} земных атмосфер, чтобы в них заключалось N молекул ($N = 10^{2000}$). Для нас числа 10^{1956} и 10^{2000} не отличаются заметно.

2. Число атомов, из которых состоит земной шар, можно принять равным 10^{50}. Это число надо 40 раз помножить на себя, чтобы получить число N. Надо взять 10^{1950} таких тел, как Земля, чтобы число их атомов равнялось числу N сочетаний.

3. Вообразим шар, радиус которого так велик, что свету, который проходит 300 000 километров в одну секунду, требуется десять миллионов лет, чтобы пройти от центра шара до его поверхности, которая охватывает отдаленнейшие звездные скопления (если центр находится в Земле). Представим себе, что весь этот шар наполнен таким воздухом, каким мы окружены на поверхности Земли. В этом шаре будут находиться только 10^{95} молекул. Надо взять 10^{1905} таких шаров, наполненных воздухом, чтобы число молекул в них равнялось числу N сочетаний, которые должна произвести литературная машина.

Оставаясь в мире физическом, мы, даже при помощи пылкой фантазии, не можем чувствительно для нас уменьшить число N.

Совсем другая картина получается, если из мира физического мы перейдем к символам математическим.

Всем известен вопрос: какое самое большое число можно написать из трех цифр без других математических знаков? Ответ: это число

$$M = 9^{9^{9}}$$

Число это состоит приблизительно из десяти миллионов цифр [2], между тем как наше число N имеет всего «только» 2000 цифр. Зато число

$$5^{5^{5}}$$

содержит только 2188 цифр, так что оно получится, если к числу N приписать только 188 нулей.

«Возвратимся еще раз к нашей литературной машине. Среди «литературных произведений», которые она дает, окажутся некоторые весьма курьезные. Сотня «произведений» будет состоять из 1000 одинаковых букв или 1000 одинаковых знаков препинания. Далее, более 10^{1000} произведений будет состоять из одних знаков препинания, а свыше 10^{300} будет состоять из одних восклицательных и вопросительных знаков».

90. МУЗЫКАЛЬНЫЙ СПОР

В общежитии московского Метростроя возник однажды горячий спор на музыкальную тему. Поводом послужило неожиданное утверждение одной из обитательниц, что «композиционные возможности в музыке сильно ограничены и чем дальше, тем больше будет музыкальных плагиатов. Число колебаний, воспринимаемых нашим ухом, ограничено. А раз ограничено число звуков, то ограничено и число комбинаций, какие можно из них составить, так что в конце концов не услышишь ни одной безусловно новой мелодии».

Не придя к единодушному решению спора, метростроевцы отправили мне письмо с просьбою разобрать вопрос. Задача не сложна. В той постановке, какую придали вопросу метростроевцы, слишком очевидно, что число комбинаций из всех доступных человеческому слуху тонов хотя и ограничено, но неимоверно огромно — практически бесконечно.

Возможен, однако, и иной подход к той же теме. Один из моих читателей поделился со мной любопытными соображениями на этот счет, сводящимися к следующему. Основную мелодию музыкального произведения всегда можно исполнить на рояли одним пальцем, пользуясь только тремя октавами, т. е. 36 нотами. Всевозможные сочетания из этих 36 нот на протяже-

[1] Орест Данилович Хвольсон (1852-1934) российский физик (прим. ред.).

[2] Более чем из 360 миллионов цифр. — Я. П. (См. мою «Занимательную арифметику», гл. X.)

нии, например, 10 тактов должны охватить все мотивы, состоящие из десятка тактов. Число их, конечно, ограничено, и это обстоятельство, казалось бы, должно заметно стеснять музыкальное творчество. Первый десяток тактов неизбежно должен рано или поздно повториться и возможно, что современная музыка уже близка к исчерпанию всех комбинаций. Скоро нельзя будет придумать нового вступления; то же относится и к концам пьес; неизбежны повторения и в середине. Быть может, недалеко время, когда все основные мелодии будут исчерпаны.

С другой стороны, — прибавлю от себя — представляется заманчивая возможность создания механизма, который автоматически перебирал бы все основные мотивы, облегчая до крайности творческую работу композиторов. Вместо изобретения новых мелодий, им нужно было бы лишь производить их отбор.

Но опасения музыкального кризиса, как и надежды на изобретение автомата рассеиваются без остатка, когда приступаешь к вопросу с карандашом и бумагой. Мой корреспондент произвел следующий поучительный подсчет: он вычислил, сколько может быть различных комбинаций из 36 тонов на протяжении 8 тактов. При средней продолжительности нот в ¼ такта на протяжении 8 тактов умещается 32 ноты. Рассуждая, как в случае литературной машины, легко исчислить все комбинации.

Число их равно

$$36^{32}$$

Приблизительно определить величину этой степени можно так:

$$36 = 9 \times 4 = 3^2 \times 2^2.$$

$$36^{32} = 3^{64} \times 2^{64} = 81^{16} \times 2^{64} \approx 80^{16} \times 2^{64} = 2^{48} \times 2^{64} \times 10^{16} =$$
$$2^{112} \times 10^{16} = 2^2 \times 2^{110} \times 10^{16} = 4 \times (2^{10})^{11} \times 10^{16}.$$

Принимая $2^{10} \approx 1000$, т, е. 10^3, имеем $36^{32} = 4 \times 10^{33} \times 10^{16} \approx \approx 4 \times 10^{49}$

или, круглым числом[1], 10^{50}, т. е. сто биллионов триллионов. Такого числа комбинаций хватит надолго. Если бы все человечество превратилось поголовно в композиторов и ежесекундно каждый обитатель земного шара сочинял основную мелодию, то в миллион лет использовано было бы 10^{23} комбинаций. Такая музыкальная деятельность могла бы длиться без повторений мелодий 10^{27}, т. е. миллиард триллионов лет.

91. СЕКРЕТ ШАХМАТНОГО АВТОМАТА

Здесь естественно возникает вопрос, хотя и далекий от алгебры, но естественно вытекающий из того, о чем сейчас идет речь. Литературная машина невозможна, автомат для сочинения мелодий бесполезен. Но вот шахматный автомат ведь существовал! Как примирить это с бесконечным числом комбинаций фигур на шахматной доске?

Дело разъясняется очень просто. Существовал не шахматный автомат, а только вера в него. Особенной популярностью пользовался автомат венгерского механика Вольфганга фон-Кемпелена (1734–1804), который показывал свою машину при австрийском и русском дворах, а затем демонстрировал публично в Париже и Лондоне. Наполеон I играл с этим автоматом, уверенный, что меряется силами с машиной. В середине прошлого века знаменитый автомат попал в Америку и кончил там свое существование во время пожара в Филадельфии.

Другие автоматы шахматной игры пользовались уже не столь громкой славой. Тем не менее вера в существование подобных машин не иссякла и в позднейшее время.

В действительности ни одна шахматная машина не действовала автоматически. Внутри прятался искусный живой шахматист, который и двигал фигуры. Тот мнимый автомат, о котором мы сейчас упоминали, представлял собою объемистый ящик, заполненный сложным механизмом. На ящике имелась шахматная доска с фигурами, передвигавшимися рукой большой куклы. Перед началом игры публике давали возможность удостовериться, что внутри ящика нет ничего, кроме деталей механизма. Однако, в нем оставалось достаточно места, чтобы скрыть человека небольшого роста (эту роль играли одно время знаменитые игроки Иоганн Альгайер и Вильям Льюис). Возможно, что пока публике показывали последовательно разные части ящика, спрятанный человек бесшумно перебирался в соседние отделения. Механизм же никакого участия в работе аппарата не принимал и лишь маскировал присутствие живого игрока. (Кто интересуется бóльшими подробностями, тот может обратиться к статье «История шахматного автомата» в журнале «64» за 1927 г. № 18.)

92. ЧИСЛО ВОЗМОЖНЫХ ШАХМАТНЫХ ПАРТИЙ

Читатель, вероятно, пожелает познакомиться с подсчетом, хотя бы приблизительным, того числа различных партий, какие вообще могут быть сыграны на шахматной доске. Быть может, шахматному искусству реально грозит та опасность исчерпать себя, от которой обеспечена, как мы видели, музыка?

Точный подсчет в этом случае немыслим, но мы познакомим читателя с попыткой приближенно оценить величину числа возможных шахматных партий. В книге бельгийского математика М. Крайчика «Математика игр и математические развлечения», весьма разнообразной и богатой по содержанию, находим такой подсчет:

«При первом ходе белые имеют выбор из 20 ходов (16 ходов восьми пешек, каждая из которых может передвинуться на одно или на два поля, и по два хода каждого коня). На каждый ход белых черные могут ответить одним из тех же 20 ходов. Сочетая каждый ход белых с каждым ходом черных, имеем $20 \times 20 = 400$ различных партий после первого хода каждой стороны.

После первого хода число возможных ходов увеличивается. Если, например, белые сделали первый ход *e2 – e4*, они для второго хода имеют выбор из 29 ходов. В дальнейшем число возможных ходов еще больше. Один только ферзь, стоя, например, на поле *d5*, имеет выбор из 27 ходов (предполагая, что все поля, куда он

[1] Вычисление помощью логарифмов дает 6×10^{49}.

может стать, свободны). Однако, ради упрощения расчета, будем держаться следующих средних чисел:

по 20 возможных ходов для обеих сторон при первых пяти ходах;

по 30 возможных ходов для обеих сторон при последующих ходах.

Примем, кроме того, что среднее число ходов нормальной партии равно 40. Тогда для числа возможных партий найдем выражение

$$(20 \times 20)^5 \times (30 \times 30)^{35}.$$

Чтобы определить приближенно величину этого выражения, пользуемся следующими преобразованиями и упрощениями:

$$(20 \times 20)^5 \times (30 \times 30)^{35} = 20^{10} \times 30^{70} = 2^{10} \times 3^{70} \times 10^{80}.$$

Заменяем 2^{10} близким ему числом 1000, т. е. 10^3. Выражение 3^{70} представляем в виде $3^{70} = 3^{68} \times 3^2 \approx 10\ (3^4)^{17} \approx$ $\approx 10 \times 80^{17} \approx 10 \times 8^{17} \times 10^{17} \approx 2^{51} \times 10^{18} \approx 2(2^{10})^5 \times 10^{18} \approx 2 \times$ $\times 10^{15} \times 10^{18} \approx 2 \times 10^{33}$.

Следовательно

$$(20 \times 20)^5 \times (30 \times 30)^{35} \approx 10^3 \times 2 \times 10^{33} \times 10^{80} \approx 2 \times 10^{116}.$$

Число это оставляет далеко позади себя легендарное множество пшеничных зерен, испрошенных в награду за изобретение шахматной игры ($2^{64} - 1 \approx 18 \times 10^{18}$). Если бы все население земного шара круглые сутки играло в шахматы, делая ежесекундно по одному ходу, то для исчерпания всех возможных шахматных партий такая непрерывная поголовная игра должна была бы длиться не менее 10^{100} веков! Опасаться шахматного кризиса, как видим, не приходится.

Человек всегда хотел найти себе помощников в повседневной жизни, которые бы облегчали его труд, а лучше — и вовсе избавляли его от рутины. Использование рабов всегда было делом довольно хлопотным. Поэтому в идеале, помощник должен все делать сам и при этом «не просить есть».

Следуя этому естественному желанию, математики во все времена старались найти возможность избавить себя от сложных и длительных рассчетов, которых в докомпьютерное время было весьма и весьма много.

Дерек Джон де Солла Прайс (1922–1983). Автор первой подробной работы об антикитерском механизме - «Древнегреческий компьютер»

С глубокой древности известны приспособления для облегчения элементарных подсчетов, например, в торговле. Это различные вариации счетных палочек, которыми оперировали древние купцы, а также современные дети в начальной школе, когда учатся считать.

Первые подобные инструменты счета датируются тысячей с лишним лет до нашей эры. Ученые, во время раскопок на территории древнего государства Финикия, на восточном побережье Средиземного моря, обнаружили так называемые финикийские фигурки, с помощью которых производились подсчеты.

Что особенно поражает воображение, так это античные шестеренчатые механизмы для вычисления положений планет, Луны и Солнца. Причем в механизме, получившем название Антикитерский, поскольку был найден на морском дне недалеко от греческого острова Антикитера, наряду с обычными прямозубыми шестернями присутствовала и дифференциальная. Она позволяла разделить движение на два одновременных потока. Ранее считалось, что передачи такого рода были изобретены лишь в XVI в. Прибор служил календарем и позволял вычислить время наступления 42 различных астрономических событий. Он содержал в себе 32 бронзовые шестерни. Такие механизмы резко выделяются на фоне примитивных арифметических приспособлений, как счетные палочки или фигурки, а так же абак.

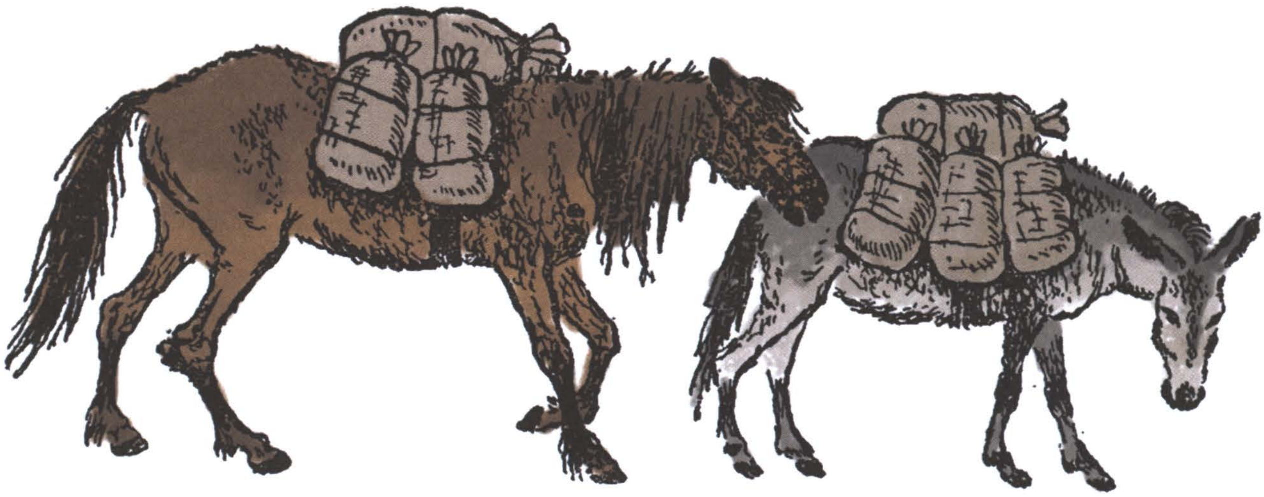
Следующим заметным инструментом, приближавшим мечту математиков к реальности, стал упомянутый абак. Более сложное устройство, позволявшее работать с большими числами.

Вообще, работы над «мыслительными» машинами шли по двум направлениям: возможностью производить все более сложные рассчеты и увеличение скорости выполнения рассчетов. На этом пути весьма значительным событием стало появление в 1622 г. логарифмической линейки, практически полностью соответствующей современному прибору. Ее изобретателем стал английский математик Уильям Отред. Появилась возможность с достаточной для практики точностью оперировать дробными степенями чисел, вычислять логарифмы, производить операции умножения и деления. Причем, что было очень удобно, с помощью логарифмической линейки можно проводить цепочки последовательных вычислений.

На линии борьбы за быстродействие был достигнут значительный прорыв, когда появились механические счетные устройства. В 1646 г. французский ученый Блез Паскаль изобрел свою счетную машину, которую назвал «Паскалина». Интересно отметить, что Блезу в то время было лишь 19 лет. Дальними родственниками Паскалины стали очень широко распространенные еще полвека назад арифмометры. Специальные механические устройства, позволявшие производить основные арифметические операции. Достаточно лишь было «набрать» с помощью штырьков необходимые значения, а затем прокрутить ручку аппарата на необходимое количество оборотов.

С появлением электроники, так страстно желаемое быстродействие «мыслительных машин» начало обретать черты искусственного интеллекта. Сейчас уже существуют компьютеры, выполняющие миллиарды операций в секунду. А первой широко известной ЭВМ стала модель 5150 знаменитой американской компании IBM или Международные деловые машины, представленная публике в 1981 г. По сути это был первый в мире персональный компьютер, не требовавший от пользователя практически никакой квалификации программиста или математика. Мечта сбылась.

IBM 5150 PC



92. ИСКУССТВО СОСТАВЛЯТЬ УРАВНЕНИЯ

Язык алгебры – уравнения. «Чтобы решить вопрос, относящийся к числам или к отвлеченным отношениям величин, нужно лишь перевести задачу с родного языка на язык алгебраический», – писал великий Ньютон в своем учебнике алгебры, озаглавленном «Всеобщая арифметика». Как именно выполняется такой перевод с родного языка на алгебраический, Ньютон показал на примерах. Вот один из них:

На родном языке:	На языке алгебры:
Купец имел некоторую сумму денег.	x
В первый год он истратил 100 фунтов.	$x - 100$
К оставшейся сумме добавил третью ее часть.	$(x-100) + \frac{x-100}{3} = \frac{4x-400}{3}$
В следующем году он вновь истратил 100 фунтов	$\frac{4x-400}{3} - 100 = \frac{4x-700}{3}$
и увеличил оставшуюся сумму на третью ее часть.	$\frac{4x-700}{3} + \frac{4x-700}{9} = \frac{16x-2\,800}{9}$
В третьем году он опять истратил 100 фунтов.	$\frac{16x-2\,800}{9} - 100 = \frac{16x-3\,700}{9}$
После того как он добавил к остатку третью его часть,	$\frac{16x-3\,700}{9} + \frac{16x-3\,700}{27} = \frac{64x-14\,800}{27}$
капитал его стал вдвое больше первоначального.	$\frac{64x-14\,800}{27} = 2x$

Чтобы определить первоначальный капитал купца, остается только решить последнее уравнение.

Решение уравнений – зачастую дело нетрудное; составление уравнений по данным задачи затрудняет больше. Вы видели сейчас, что искусство составлять уравнения действительно сводится к умению переводить «с родного языка на алгебраический». Но язык алгебры весьма немногословен; поэтому перевести на него удается без труда далеко не каждый оборот родной речи. Переводы попадаются различные по трудности, как убедится читатель из ряда приведенных далее примеров на составление уравнений первой степени.

93. ЖИЗНЬ ДИОФАНТА

Задача

История сохранила нам мало черт биографии замечательного древнего математика Диофанта. Все, что известно о нем, почерпнуто из надписи на его гробнице, надписи, составленной в форме математической задачи. Мы приводим далее эту надпись:

На родном языке:	На языке алгебры:
Путник! Здесь прах погребен Диофанта. И числа поведать Могут, о чудо, сколь долог был век его жизни.	x
Часть шестую его представляло прекрасное детство:	$\frac{x}{6}$

На родном языке:	На языке алгебры:
Двенадцатая часть протекла еще жизни – покрылся Пухом тогда подбородок.	$\frac{x}{12}$
Седьмую в бездетном Браке провел Диофант.	$\frac{x}{7}$
Прошло пятилетие; он Был осчастливлен рожденьем прекрасного первенца сына,	5
Коему рок половину лишь жизни прекрасной и светлой Дал на земле по сравненью с отцом.	$\frac{x}{2}$
И в печали глубокой Старец земного удела конец восприял, переживши Года четыре с тех пор, как сына лишился.	$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$
Скажи, сколько лет жизни достигнув, Смерть восприял Диофант?	

Решение

Решив уравнение и найдя $x = 84$, узнаем следующие черты биографии Диофанта: он женился в 21 год, стал отцом на 38-м году, потерял сына на 80-м году и умер 84 лет.

94. ЛОШАДЬ И МУЛ

Задача

Вот еще несложная старинная задача, легко переводимая с родного языка на язык алгебры.

«Лошадь и мул шли бок-о-бок с тяжелой поклажей на спине. Лошадь жаловалась на свою непомерно тяжелую ношу. «Чего ты жалуешься? – отвечал ей мул. – Ведь если я возьму у тебя один мешок, ноша моя станет вдвое тяжелее твоей. А вот если бы ты сняла с моей спины один мешок, твоя поклажа стала бы одинакова с моей».

Скажите же, мудрые математики, сколько мешков несла лошадь и сколько нес мул?

Решение

Если я возьму у тебя один мешок,	$x - 1$
ноша моя	$y + 1$
станет вдвое тяжелее твоей.	$y + 1 = 2 \times (x - 1)$
А если бы ты сняла с моей спины один мешок,	$y - 1$
твоя поклажа	$x + 1$
стала бы одинакова с моей.	$y - 1 = x + 1$

Мы привели задачу к системе уравнений с двумя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} y + 1 &= 2 \times (x - 1) \\ y - 1 &= x + 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad \left\{\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ y - x &= 2 \end{aligned}\right.$$

Решив ее, находим $x = 5$, $y = 7$. Лошадь несла 5 мешков, мул 7.

95. ЧЕТВЕРО БРАТЬЕВ

Задача

У четырех братьев 45 рублей. Если деньги первого увеличить на 2 рубля, деньги второго уменьшить на 2 рубля, деньги третьего увеличить вдвое, а деньги четвертого уменьшить вдвое, – то у всех окажется поровну. Сколько было у каждого?

Решение

Расчленяем второе уравнение на три отдельных:

У четырех братьев 45 руб.	$x + y + z + t = 45$
Если деньги первого увеличить на 2 руб.,	$x + 2$
деньги второго уменьшить на 2 руб.,	$y - 2$
деньги третьего увеличить вдвое,	$2z$
деньги четвертого уменьшить вдвое,	$\frac{t}{2}$
то у всех окажется поровну.	$x + 2 = y - 2 = 2z = \frac{t}{2}$

$$x + 2 = y - 2$$
$$x + 2 = 2z$$
$$x + 2 = \frac{t}{2}$$

откуда

$$y = x + 4$$
$$z = \frac{x + 2}{2}$$
$$t = 2x + 4$$

Подставив эти значения в первое уравнение, получаем:

$$x + x + 4 + \frac{x + 2}{2} + 2x + 4 = 45,$$

откуда $x = 8$. Далее находим: $y = 12$; $z = 5$; $t = 20$. Итак, у братьев было:

8 р., 12 р., 5 р., 20 р.

96. ПТИЦЫ У РЕКИ

Задача

У одного арабского математика XI века находим следующую задачу.

Рис. 2.

На обоих берегах реки растет по пальме, одна против другой. Высота одной – 30 локтей, другой – 20 локтей; расстояние между их основаниями – 50 локтей. На верхушке каждой пальмы сидит птица. Внезапно обе птицы заметили рыбу, выплывшую к поверхности воды между пальмами; они кинулись к ней разом и достигли ее одновременно (рис. 2).

В каком расстоянии от основания более высокой пальмы появилась рыба?

Решение

Из схематического чертежа (рис. 3), пользуясь теоремой Пифагора, устанавливаем:

$$AB^2 = 30^2 + x^2;\quad AC^2 = 20^2 + (50 - x)^2.$$

Но $AB = AC$, так как обе птицы пролетели эти расстояния в одинаковое время. Поэтому

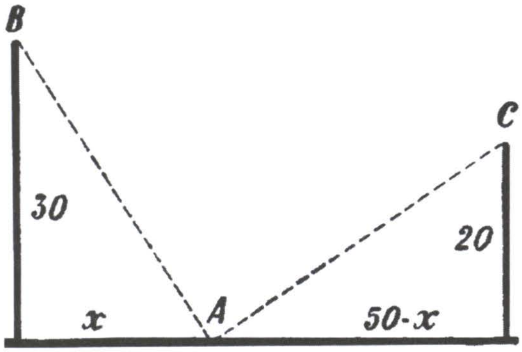


Рис. 3.

$$30^2 + x^2 = 20^2 + (50 - x)^2.$$

Раскрыв скобки и сделав упрощения, получаем уравнение первой степени

$$100x = 2000,$$

откуда

$$x = 20.$$

Рыба появилась в 20 локтях от той пальмы, высота которой 30 локтей.

97. ПРОДАЖА ЧАСОВ

Задача первая

Куплены двое часов за 220 руб. и затем проданы: одни с 10% прибыли, другие с 10% убытка. В общем итоге получено было 5% прибыли. Сколько заплачено порознь за часы при первоначальной покупке?

Решение

Обозначим искомую стоимость первых часов через x, тогда стоимость вторых выразится через $220 - x$.

Первые часы проданы были с прибылью в 0,1 их стоимости, т. е, за $x + 0{,}1x = 1{,}1x$; вторые проданы с убытком в 0,1 их стоимости, т. е. за $0{,}9\ (220 - x)$.

Сумма, вырученная от продажи обоих часов, на 5% больше их стоимости, т. е. составляла $220 + 0{,}05 \times 220 = 220 \times 1{,}05$. Имеем уравнение:

$$1{,}1x + 0{,}9\ (220 - x) = 220 \times 1{,}05,$$

отсюда $x = 165$; $220 - x = 55$.

Первые часы стоили 165 руб., вторые 55 руб.

Задача вторая

Двое часов проданы по одной цене. При продаже первых получено 20% убытка, при продаже вторых – 20% прибыли. В общем же продажа дала 5 рублей убытка. Определить себестоимость часов.

Решение

Здесь два неизвестных: себестоимость первых часов, которую мы обозначим через x, и себестоимость вторых – y. Продажная цена первых часов $x - 0{,}2x = 0{,}8x$, вторых $y + 0{,}2y = 1{,}2y$.

Имеем уравнение

$$0{,}8x = 1{,}2y, \text{ или } 2x = 3y.$$

Так как у нас два неизвестных, то одного уравнения недостаточно для их нахождения. Составим второе, выразив в нем ту часть условия, которая не вошла в первое уравнение, а именно, что продажа дала 5 рублей убытка:

$$(x + y) - (0{,}8x + 1{,}2y) = 5.$$

Преобразуем его:

$$x + y - 0{,}8x - 1{,}2y = 5$$
$$0{,}2x - 0{,}2y = 5$$
$$2x - 2y = 50.$$

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x = 3y \\ 2x - 2y = 50. \end{cases}$$

Подставив во второе уравнение вместо $2x$ равную им величину $3y$, получаем

$$y = 50.$$

Легко найти теперь, что $x = 75$ руб.

Себестоимость часов 75 руб. и 50 руб.

98. ПРОГУЛКА

Задача

Следующая задача изложена одним английским писателем в беллетристической форме:

– Зайдите ко мне завтра днем на чашку чая, – сказал старый доктор своему знакомому.

– Благодарю вас. Я выйду, в три часа. Может быть, и вы надумаете прогуляться, так выходите в то же время, встретимся на полпути.

– Вы забываете, что я старик, шагаю в час всего только 3 *км*, а вы, молодой человек, проходите при самом медленном шаге 4 *км* в час. Не грешно бы дать мне небольшую льготу.

– Справедливо. Так как я прохожу больше вас на 1 *км* в час, то, чтобы уравнять нас, дам вам этот километр, т. е. выйду на четверть часа раньше. Достаточно?

– Очень любезно с вашей стороны, – поспешил согласиться старик.

Молодой человек так и сделал: вышел из дому в три четверти третьего и шел со скоростью 4 *км* в час. А доктор вышел ровно в три и делал по 3 *км* в час. Когда они встретились, старик повернул обратно и направился домой вместе с молодым другом.

Только за чаем сообразил молодой человек, что с льготной четвертью часа вышло не совсем ладно. Он сказал доктору, что из-за этого ему придется в общем итоге пройти вдвое больше, чем доктору.

– Не вдвое, а вчетверо, – возразил доктор, и был прав.

Как далеко от дома доктора до дома его молодого знакомого?

Решение

Обозначим расстояние между домами через x. Молодой человек всего прошел $2x$, а доктор вчетверо меньше, т. е. $\frac{x}{2}$. До встречи доктор прошел половину пройденного им пути, т. е. $\frac{x}{4}$, а молодой человек – остальное, т. е. $\frac{x}{12}$. Свою часть пути доктор прошел в $\frac{3x}{4}$ часа, а молодой человек – в $\frac{3x}{16}$ часа, причем мы знаем, что он был в пути на ¼ часа дольше, чем доктор.

Имеем уравнение:

$$\frac{3x}{16} - \frac{x}{12} = \frac{1}{4},$$

откуда $x = 2{,}4$ км.

От дома молодого человека до дома доктора – 2,4 км.

99. ЗАДАЧА ЛЬВА ТОЛСТОГО

Известный физик А. В. Цангер в своих воспоминаниях о Л. Н. Толстом рассказывает о следующей задаче, которой занимался Л. Н. Толстой:

«Артели косцов надо было скосить два луга, один вдвое больше другого. Половину дня артель косила большой луг. После этого артель разделилась пополам: первая половина осталась на большом лугу и докосила его к вечеру до конца; вторая же половина косила малый луг, на котором к вечеру еще остался участок, скошенный на другой день одним косцом за один день работы.

Сколько косцов было в артели?»

Решение

В этом случае, кроме главного неизвестного – числа косцов, которое мы обозначим через x, – приходится ввести еще и вспомогательное, именно – размер участка, скашиваемого одним косцом в 1 день; обозначим его через y. Хотя задача и не требует его определения, оно облегчит нам нахождение главного неизвестного.

Выразим через x и y площадь большего луга. Луг этот косили полдня x косцов; они скосили $x \times ½ \times y = \frac{xy}{2}$.

Вторую половину дня его косила только половина артели, т. е. $\frac{x}{2}$ косцов; они скосили $\frac{x}{2} \times ½ \times y = \frac{xy}{4}$.

Так как к вечеру скошен был весь луг, то площадь его равна

$$\frac{xy}{2} + \frac{xy}{4} = \frac{3xy}{4}$$

Выразим теперь через x и y площадь меньшего луга. Его полдня косили $\frac{x}{2}$ косцов и скосили площадь $\frac{x}{2} \times ½ \times y = \frac{xy}{4}$. Прибавим недокошенный участок, как раз равный y (площади, скашиваемой одним косцом в 1 рабочий день), и получим площадь меньшего луга:

$$\frac{xy}{4} + y = \frac{xy + 4y}{4}$$

Остается перевести на язык алгебры фразу: «первый луг вдвое больше второго», – и уравнение составлено:

Сократим дробь в левой части уравнения на y, вспомогательное неизвестное благодаря этому исключается,

$$\frac{3xy}{4} : \frac{xy + 4y}{4} = 2 \quad \text{или} \quad \frac{3xy}{xy + 4y} = 2$$

и уравнение принимает вид

$$\frac{3x}{x+4} = 2 \quad \text{или} \quad 3x = 2x + 8,$$

откуда $x = 8$.

В артели было 8 косцов[1].

После напечатания первого издания «Занимательной алгебры» проф. А. В. Цингер прислал мне подробное и весьма интересное сообщение, касающееся этой задачи. Главный эффект задачи, по его мнению, в том, что «она совсем не алгебраическая, а арифметическая и притом крайне простая, затрудняющая только своей нешаблонной формой».

«История этой задачи такова, – продолжает проф. А. В. Цингер. – В Московском университете на математическом факультете в те времена, когда там учились мой отец и мой дядя И. И. Раевский (близкий друг Л. Толстого), среди прочих, предметов преподавалось нечто вроде педагогики. Для этой цели студенты должны были посещать отведенную для университета городскую народную школу и там в сотрудничестве с опытными искусными учителями упражняться в преподавании. Среди товарищей Цингера и Раевского был некий студент Петров, по рассказам – чрезвычайно одаренный и оригинальный человек. Этот Петров (умерший очень молодым, кажется, от чахотки) утверждал, что на уроках арифметики учеников портят, приучая их к шаблонным задачам и к шаблонным способам решения. Для подтверждения своей мысли Петров изобретал задачи, которые вследствие нешаблонности очень затрудняли «опытных искусных учителей», но легко решались более способными учениками, еще не испорченными учебой. К числу таких задач (их Петров сочинил несколько) относится и задача об артели косцов. Опытные учителя, разумеется, легко могли решать ее при помощи уравнения, но простое арифметическое решение от них ускользало. Между тем, задача настолько проста, что привлекать для ее решения алгебраический аппарат совсем не стоит.

Если большой луг полдня косила вся артель и полдня пол-артели, то ясно, что в полдня пол-артели скашивает ⅓ луга. Следовательно, на малом лугу осталось $½ - ⅓ = ⅙$.

Если один косец в день скашивает $^1/_6$ луга, а скошено было $^6/_6 + ^2/_6 = ^8/_6$, то косцов было 8.

Толстой, всю жизнь любивший фокусные, не слишком хитрые задачи, эту задачу знал от моего отца еще с молодых лет. Когда об этой задаче пришлось беседовать мне с Толстым – уже стариком, его особенно восхити-

[1] Возможны и другие варианты алгебраического решения, например, три следующие:

1) $\frac{x + 1}{3} = \frac{x}{4} + 1$

2) $\frac{2(x + 1)}{3} = \frac{x}{2} + \frac{x}{4}$

3) $\left(\frac{x}{4} + 1\right) : \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{4}\right) = 1 : 2$

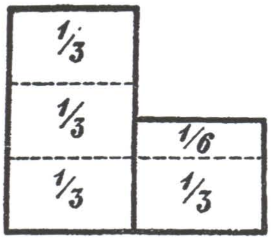


Рис. 4.

ло то, что задача делается гораздо яснее и прозрачнее, если при решении пользоваться самым примитивным чертежом (рис. 4).

Мне несчетное число раз приходилось рассказывать об этой задаче самой разнообразной публике, начиная с профессоров–математиков и кончая деревенскими школярами. По моему мнению, всем без всякого исключения чертежик весьма облегчал решение. Сам я еще в детстве, помню, понял решение задачи по объяснению отца, который намечал размеры лугов пальцем на шахматной доске в 6 и в 3 квадратика».

Нельзя не согласиться с автором письма, что название *задача Л. Толстого* «по существу неправильно, так же как в свое время было неправильным ее название задача *проф. А. В. Цингера*, под которым она была известна московским, петербургским и провинциальным математикам».

100. КОРОВЫ НА ЛУГУ

Задача

«При изучении наук задачи полезнее правил», – писал Ньютон в своей «Всеобщей арифметике» и сопровождал теоретические указания рядом примеров. В числе этих упражнений находим задачу о быках, пасущихся на лугу, – родоначальницу особого типа своеобразных задач, наподобие следующей:

Трава на всем лугу растет одинаково густо и быстро. Известно, что 70 коров поели бы ее в 24 дня, а 30 коров – в 60 дней. Сколько коров поели бы всю траву луга в 96 дней?»

Задача эта в одном английском журнале послужила сюжетом для юмористического рассказа, напоминающего Чеховский «Репетитор». Двое взрослых, родственники школьника, которому эту задачу задали для решения, безуспешно трудятся над нею и недоумевают:

« – Выходит что-то странное, – говорит один из решающих: – если в 24 дня 70 коров поедают всю траву луга, то сколько коров съедят ее в 96 дней? Конечно, $\frac{1}{4}$ от 70, т. е. $17\frac{1}{2}$ коров... Первая нелепость! А вот вторая: 30 коров поедают траву в 60 дней; сколько коров съедят ее в 96 дней? Получается еще хуже: $18\frac{3}{4}$ коровы. Кроме того: если 70 коров поедают траву в 24 дня, то 30 коров употребляют на это 56 дней, а вовсе не 60, как утверждает задача».

« – А приняли вы в расчет, что трава все время растет?» – спрашивает другой.

Замечание резонное: трава непрерывно растет, и если этого не учитывать, то не только нельзя решить задачи, но и само условие ее будет казаться противоречивым.

Как же решается задача?

Решение

Введем и здесь вспомогательное неизвестное, которое будет обозначать суточный прирост травы в долях ее запаса на лугу. В одни сутки прирастает y, в 24 дня – $24y$; если общий запас выразить через 1, то в течение 24 дней коровы съедают

$$1 + 24y.$$

В сутки все стадо (из 70 коров) съедает

$$\frac{1 + 24y}{24}$$

а одна корова съедает в сутки

$$\frac{1 + 24y}{24 \times 70}$$

Подобным же образом из того, что 30 коров поели бы траву того же луга в 60 суток, выводим, что одна корова съедает в одни сутки

$$\frac{1 + 60y}{30 \times 60}$$

Но количество травы, съедаемое коровой в сутки, для обоих стад одинаково. Поэтому
откуда

$$y = \frac{1}{480}$$

Найдя y (величину прироста), легко уже определить, какую долю первоначального запаса травы съедает одна корова в сутки:

$$\frac{1 + 24y}{24 \times 70} = \frac{1 + 24 \times \frac{1}{480}}{24 \times 70} = \frac{1}{1600}.$$

Наконец, составляем уравнение для окончательного решения задачи: если искомое число коров x, то

$$\frac{1 + 96 \times \frac{1}{480}}{96x} = \frac{1}{1600}.$$

откуда $x = 20$.

20 коров поели бы всю траву в 96 дней.

101. ЗАДАЧА НЬЮТОНА

Рассмотрим теперь подлинную ньютонову задачу о быках, по образцу которой составлена сейчас рассмотренная.

Задача, впрочем, придумана не самим Ньютоном; она является продуктом народного математического творчества.

«Три луга, покрытые травой одинаковой густоты и скорости роста, имеют площади: $3\frac{1}{3}$ *га*, 10 *га* и 24 *га*. Первый прокормил 12 быков в продолжение 4 недель; второй – 21 быка в течение 9 недель. Сколько, быков может прокормить третий луг в течение 18 недель?»

Решение

Введем вспомогательное неизвестное y, означающее, какая доля первоначального запаса травы прирастает на 1 *га* в течение недели. На первом лугу в течение недели прирастает травы $3\frac{1}{3}y$, а в течение 4 недель

$$3\tfrac{1}{3}y \times 4 = \frac{40}{3}y$$

того запаса, который первоначально на нем имелся. Это равносильно тому, как если бы первоначальная площадь луга увеличилась и сделалась равной

$$3\tfrac{1}{3} + \frac{40}{3}y \text{ гектаров.}$$

Другими словами, быки съели столько травы, сколько покрывает луг площадью $3\tfrac{1}{3} + \frac{40}{3}y$ гектаров**.** В одну неделю 12 быков поели ¼ этого количества, а 1 бык в неделю – $\frac{1}{48}$, т. е. запас, растущий на площади

$$\left(3\frac{1}{3} + \frac{40}{3}y\right) : 48 = \frac{10 + 40y}{114} \textit{ га.}$$

Подобным же образом находим площадь луга, кормящего одного быка в течение недели, из данных для второго луга:

недельный прирост на 1 га = y

9-недельн. прирост на 1 га = $9y$

9-недельн. прирост на 10 га = $90y$.

Площадь участка, содержащего запас травы для прокормления 21 быка в течение 9 недель, равна

$$10 + 90y.$$

Площадь, достаточная для прокормления 1 быка в течение 1 недели, –

$$\frac{10 + 90y}{9 \times 21} = \frac{10 + 90y}{189} \textit{ га.}$$

Обе нормы прокормления должны быть одинаковы:

$$\frac{10 + 40y}{144} = \frac{10 + 90y}{189} \textit{ га.}$$

Решив это уравнение, находим $y = \frac{1}{12}$.

Определим теперь площадь луга, наличный запас травы которой достаточен для прокормления одного быка в течение недели:

$$\frac{10 + 40y}{144} = \frac{10 + 40 \times \frac{1}{12}}{144} = \frac{5}{54} \textit{ га.}$$

Наконец, приступаем к вопросу задачи. Обозначив искомое число быков через x, имеем

$$\frac{23 + 24 \times 18 \times \frac{1}{12}}{18x} = \frac{5}{54} \textit{ га,}$$

откуда $x = 36$. Третий луг может прокормить в течение 18 недель 36 быков.

102. СЕМЕРО ИГРОКОВ

Задача

Семь игроков условились, что каждый проигравший платит каждому из остальных шести партнеров столько денег, сколько у того имеется, – другими словами, удваивает его деньги.

Сыграли 7 партий. Проиграли все – каждый по разу.

По окончании игры подсчитали, сколько у каждого денег. Оказалось у всех поровну – 12 руб. 80 коп.

Сколько у каждого было денег до начала игры?

Решение

Несмотря на кажущуюся сложность, задача решается довольно просто, если сообразить, что во время игры, общая сумма денег у всех игроков оставалась неизменной: деньги только переходили из кармана одного в карман другого. Отсюда следует, что до начала игры общее количество денег было то же, что и к концу, т. е. равнялось $7 \times 12{,}8$ рублей.

Проследим за тем, как во время игры менялось количество денег игрока, проигравшего первым.

До начала игры у него было x рублей.

После первой партии он, проиграв, уплатил шестерым партнерам столько, сколько у всех их имелось, т. е. $7 \times 12{,}8 - x$. Осталось у него после первой партии $x - (7 \times 12{,}8 - x) = 2x - 7x \times 12{,}8$.

После второй партии деньги его удвоились и, значит, стали равны

$$2\,(2x - 7 \times 12{,}8).$$

После третьей партии деньги его снова удвоились и составляли

$$2^2\,(2x - 7 \times 12{,}8).$$

После четвертой партии у него оказалось

$$2^3\,(2x - 7 \times 12{,}8).$$

После 7-й партии, т. е. по окончании игры, у него было 12,8 р.; следовательно,

$$2^6\,(2x - 7 \times 12{,}8) = 12{,}8.$$

Решаем это уравнение:

$$64\,(2x - 7 \times 12{,}8) = 12{,}8$$

$$2x - 7 \times 12{,}8 = 0{,}2$$

$$2x - 89{,}6 = 0{,}2;\ x = 44{,}9.$$

Итак, до начала игры первый игрок имеет 44 р. 90 к.

Таким же образом определим и деньги игрока, проигравшего вторым. До начала игры у него было y. После первой партии у него стало $2y$.

Вторую партию он проиграл и выплатил $7 \times 12{,}8 - 2y$; осталось у него $2y - (7 \times 12{,}8 - 2y) = 4y - 7 \times 12{,}8$.

После третьей партии у него было

$$2\,(4y - 7 \times 12{,}8).$$

После четвертой:

$$2^2\,(4y - 7 \times 12{,}8)$$

После седьмой:

$$2^5\,(4y - 7 \times 12{,}8)$$

Имеем уравнение

$$2^5\,(4y - 7 \times 12{,}8) = 12{,}8$$

откуда y = 22 р. 50 к.

Подобным же образом находим деньги третьего игрока – 11 р. 30 к.

Предоставляем читателю самостоятельно определить деньги остальных игроков. Проверкой решения будет то, что сумма денег всех игроков до и после игры должна быть одна и та же.

103. ЧИСЛЕННОСТЬ ПЛЕМЕНИ

Задача

Племя в мужской своей части состоит из прадеда, 3 дедов, 12 внуков и некоторого числа правнуков. Отцов в 10 раз меньше, нежели сыновей. Какова общая численность мужчин в племени?

Решение

Задача окажется весьма простой, если сообразить, что человек может быть одновременно и отцом и сыном. Имея это в виду, мы поймем, что число всех отцов в племени равно [1]

$$1 + 3 + 12.$$

Число же всех сыновей (если правнуков x) выразится так:

$$3 + 12 + x.$$

Первых, мы знаем, в 10 раз меньше, чем вторых. Имеем уравнение:

$$10\,(1 + 3 + 12) = 3 + 12 + x,$$

т. е.

$$160 = x - 15,$$

откуда x = 145. Общая численность мужчин в племени 145 + 12 + 3 + 1 = 161.

104. МНИМАЯ НЕЛЕПОСТЬ

Задача

Вот задача, которая может показаться совершенно абсурдной:

Чему равно 84, когда 8 × 8 = 54?

Этот странный вопрос далеко не лишен смысла, и задача может быть решена помощью уравнений. Попробуйте расшифровать ее.

Решение

Вы догадались, вероятно, что числа, входящие в задачу, написаны не по десятичной системе, – иначе вопрос «чему равно 84» был бы нелеп. Пусть основание неизвестной системы счисления есть x. Число «84» означает тогда 8 единиц второго разряда и 4 единицы первого, т. е.

$$«84» = 8x + 4.$$

Число «54» означает $5x + 4$.

Имеем уравнение:

$$8 \times 8 = 5x + 4,$$

т. е. в десятичной системе

$$64 = 5x + 4,$$

откуда $x = 12$. Числа написаны по двенадцатиричной системе, и «84» = 8 × 12 + 4 = 100.

Значит «84» = 100, когда 8 × 8 = «54».

Подобным же образом решается и другая задача в этом роде:

Чему равно 100, когда 5 × 6 = 33?

Ответ: 81 (девятиричная система счисления).

105. УРАВНЕНИЕ ДУМАЕТ ЗА НАС

Если вы сомневаетесь в том, что уравнение бывает иной раз предусмотрительнее нас самих, решите следующую задачу:

Отцу 32 года, сыну 5 лет. Через сколько лет отец будет в 10 раз старше сына?

Обозначим искомый срок через x. Спустя x лет, отцу будет $32 + x$ лет, сыну $5 + x$. И так как отец должен тогда быть в 10 раз старше сына, то имеем уравнение:

$$(32 + x) = 10\,(5 + x).$$

Решив его, получаем $x = -2$.

«Через минус 2 года» означает: «два года назад». Когда мы составляли уравнение, мы не подумали о том, что возраст отца никогда в будущем не окажется в 10 раз превосходящим возраст сына, но что такое соотношение могло быть только в прошлом. Уравнение оказалось вдумчивее нас и напомнило о сделанном упущении.

106. КУРЬЕЗЫ И НЕОЖИДАННОСТИ

При решении уравнений мы наталкиваемся иногда на ответы, которые могут поставить в тупик малоопытного математика. Приведем несколько примеров.

I. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + y = 12 \\ x = 5 - \dfrac{y}{3} \end{cases}$$

Подставив в первое уравнение значение x из второго, имеем:

$$3\left(5 - \frac{y}{3}\right) + y = 12,$$

а после преобразований:

$$15 = 12.$$

У нас не определились значения ни x, ни y, зато мы узнали, что 15 = 12... Что это значит?

Это означает лишь, что чисел, удовлетворяющих данным уравнениям, не существует и что уравнения эти противоречат одно другому. В самом деле: умножив второе уравнение на 3 и перенеся у в левую часть, получим

$$3x + y = 15.$$

Одна и та же величина $(3x + y)$ согласно первому уравнению равна 12, согласно же второму 15. Это возможно было бы лишь, если 12 = 15, т. е. безусловно невозможно.

Подобное же недоразумение ожидает решающего следующую систему уравнений [1]

$$\begin{cases} x^2y^2 = 8 \\ xy = 4 \end{cases}$$

[1] Незадолго до смерти знаменитый американский изобретатель Эдисон пожелал поощрить денежной помощью (стипендией) самого сметливого юношу США. По его приглашению с разных концов республики были направлены к нему

Разделив первое уравнение на второе, получаем

$$xy = 2,$$

а сопоставляя сейчас полученное уравнение со вторым, видим, что

$$\begin{cases} xy = 4 \\ xy = 2 \end{cases}$$

т. е. 4 = 2. Чисел, удовлетворяющих этой системе, не существует. (Уравнения, которые, подобно сейчас рассмотренным, не имеют общих решений, называются несовместными.)

II. С иного рода неожиданностями встречаемся мы, решая задачи, подобные следующей:

Разность цифр двузначного числа 3. Если к этому числу прибавить 27, то получится число, отличающееся от искомого только порядком цифр. Что это за число?

Составляем уравнение. Если цифру десятков обозначим через x, то число единиц выразится через $x + 3$. Переводя задачу на язык алгебры, получим:

$$10x + (x + 3) + 27 = 10\,(x + 3) + x.$$

Сделав упрощения, приходим к равенству:

$$0 = 0.$$

Это равенство неоспоримо верно, но оно ничего не говорит нам о значении x. Значит ли это, что чисел, удовлетворяющих требованию задачи, не существует?

Напротив, это означает, что составленное нами уравнение есть тождество, т. е. что оно верно при любом значении неизвестного x. Действительно, легко убедиться, что указанным в задаче свойством обладает каждое двузначное число с разностью цифр 3:

$$14 + 27 = 41 \qquad 58 + 27 = 85$$
$$47 + 27 = 74 \qquad 36 + 27 = 63$$
$$25 + 27 = 52 \qquad 69 + 27 = 96$$

III. Найти трехзначное число, обладающее следующими свойствами:

1) цифра десятков 7;

2) цифра сотен на 4 меньше цифры единиц;

3) если цифры этого числа разместить в обратном порядке, то новое число будет на 396 больше искомого.

Составим уравнение, обозначив цифру сотен через x:

$$100x + 70 + x - 4 - [100\,(x - 4) + 70 + x] = 396.$$

Уравнение это после упрощений приводит к равенству

$$0 = 0.$$

Читатели уже знают, как надо толковать подобный результат. Он означает, что каждое трехзначное число, в котором первая цифра на 4 меньше третьей, увеличивается на 396, если цифры поставить в обратном порядке.

* * *

До сих пор мы рассматривали задачи, имеющие более или менее искусственный, книжный характер; их назначение – помочь приобрести навык в составлении и решении уравнений. Теперь вооруженные теоретически, займемся несколькими примерами задач практических – из области производства, обихода, военного дела, спорта.

107. В ПАРИКМАХЕРСКОЙ

Задача

Может ли алгебра понадобиться в парикмахерской? Оказывается, что такие случаи бывают. Мне пришлось убедиться в этом, когда однажды в парикмахерской подошел ко мне мастер с неожиданной просьбой:

– Не поможете ли нам разрешить задачу, с которой мы никак не справимся?

– Уж сколько раствора испортили из-за этого! – добавил другой.

– В чем задача? – осведомился я.

– У нас имеется два раствора перекиси водорода, 30-процентный и 3-х процентный. Нужно их смешать так, чтобы составился 12-процентный раствор. Не можем подыскать правильной пропорции...

Мне дали бумажку, и требуемая пропорция была отыскана.

Она оказалась очень простой. Какой именно?

Решение

Задачу можно решить и арифметически, но язык алгебры приводит здесь к цели проще и быстрее. Пусть для составления 12-процентной смеси требуется взять x граммов 3-х процентного раствора и y граммов 30-процентного. В первой порции берется тогда $0{,}03x$ граммов чистой перекиси водорода, во второй $0{,}3y$, а всего

$$0{,}03x + 0{,}3y.$$

При этом получается $x + y$ граммов раствора, в котором чистой перекиси $0{,}12\,(x + y)$. Имеем уравнение

$$0{,}03x + 0{,}3y = 0{,}12(x + y).$$

Умножив все члены уравнения на 100 и раскрыв скобки, получаем

$$3x + 30y = 12x + 12y,$$

откуда

$$18y = 9x \quad \text{и} \quad \frac{x}{y} = 2.$$

Значит, 3-х процентного раствора надо взять вдвое больше, чем 30-процентного.

Проверим. Возьмем два литра 3-х процентного раствора и 1 литр 30-процентного. Чистой перекиси мы будем тогда иметь

$$0{,}03 \times 2\,000 + 0{,}3 \times 1\,000 = 60 + 300 = 360 \textit{ куб. см.}$$

В трех литрах (3 000 *куб. см*) смеси окажется 360 *куб. см* перекиси: процентное содержание ее составляет

наиболее одаренные школьники по одному от каждого штата, и великий изобретатель во главе целой комиссии (куда входили, между прочим, «автомобильный король» Форд и знаменитый летчик Линдберг) подверг их испытанию, чтобы выделить «лучшего из лучших». Каждый юноша должен был ответить на ряд вопросов самого разнообразного характера и решить ряд задач. Одну из них мы и приводим здесь.

$$\frac{360}{3000} \times 100 = 12\%,$$

как и требовалось.

Мы имеем здесь пример, когда посредством уравнения решается вопрос, относящийся не к «числам», а к «отвлеченным отношениям величин».

108. ТРАМВАЙ И ПЕШЕХОД

Задача

Идя вдоль трамвайного пути, я заметил, что каждые 12 минут меня нагоняет трамвайный вагон, а каждые 4 минуты я сам встречаю трамвайный вагон. И я, и трамвай движемся с равномерной скоростью.

Через сколько минут один после другого покидают трамвайные вагоны свои конечные пункты?

Решение

Если вагоны покидают свои конечные пункты каждые x минут, то это значит, что в то место, где я встретился с одним из вагонов, через x минут приходит следующий вагон. Если он догоняет меня, то в оставшиеся $12 - x$ минут он должен пройти тот путь, который я успеваю пройти в 12 минут. Значит тот путь, который я прохожу в 1 минуту, трамвай проходит в $\frac{12 - x}{12}$ минут.

Если же трамвай идет мне навстречу, то он встретит меня через 4 минуты, а в оставшиеся $x - 4$ минуты он проходит тот путь, который я успел пройти в эти 4 минуты. Следовательно, тот путь, который я прохожу в 1 минуту, трамвай проходит в $\frac{x - 4}{4}$ минуты.

Получаем уравнение:

$$\frac{12 - x}{12} = \frac{x - 4}{4}$$

Отсюда $x = 6$. Вагоны отходят каждые 6 минут.

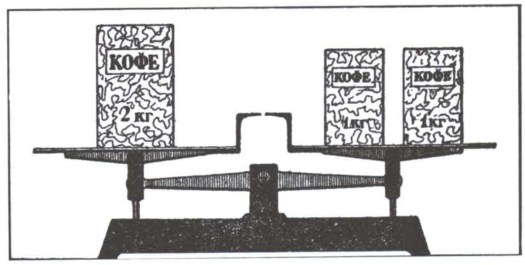
109. ДВЕ ЖЕСТЯНКИ КОФЕ

Задача

Две жестянки, наполненные кофе, имеют одинаковую форму и сделаны из одинаковой жести. Первая весит 2 килограмма и имеет в высоту 12 *см*; вторая весит 1 килограмм и имеет в высоту 9,5 *см*. Каков чистый вес кофе в жестянках?

Решение

Обозначим вес содержимого большей жестянки через x, меньшей – через y. Вес самих жестянок обозначим соответственно через z и t. Имеем уравнения:



$$\begin{cases} x + z = 2 \\ y + t = 1 \end{cases}$$

Так как веса содержимого полных жестянок относятся, как их объемы, т. е. как кубы их высот [1], то

$$\frac{x}{y} = \frac{12^3}{9{,}5^3} = 2{,}02 \text{ или } x = 2{,}02\,y.$$

Веса же пустых жестянок относятся, как их полные поверхности, т. е. как квадраты их высот. Поэтому

$$\frac{z}{t} = \frac{12^2}{9{,}5^2} = 1{,}69 \text{ или } z = 1{,}69t.$$

Подставив значения x и z в первое уравнение, получаем систему

$$\begin{cases} 2{,}02\,y + 1{,}69\,t = 2 \\ y + t = 1 \end{cases}$$

Решив ее, узнаем:

$$y = \frac{31}{33} = 0{,}94 \text{ или } t = 0{,}06.$$

И следовательно,

$$x = 1{,}9; \quad z = 0{,}1.$$

Вес кофе без упаковки: в большей жестянке 1,9 килограмма, в меньшей – 0,94 килограмма.

110. НА ПУТИ К ЗАВОДУ

Задача

Двое рабочих, живущих вместе и работающих на одном заводе, вышли из дому на свой завод, один на 5 минут раньше другого. Тот, который вышел раньше, обычно проходит путь от дома до завода в 30 минут. Его более молодой сожитель проходит то же расстояние в 20 минут. Через сколько времени он догонит старшего товарища?

Решение

Рабочий, делающий весь путь в 30 минут, проходит ежеминутно $\frac{1}{30}$ пути; его товарищ $\frac{1}{20}$. Если встреча произойдет через x минут после выхода второго, то первый в течение $5 + x$ минут пройдет долю

$$\frac{5 + x}{30} \text{ всего пути;}$$

[1] Пропорцией этой позволительно пользоваться лишь в том случае, когда стенки жестянок не слишком толсты (так как наружная и внутренняя поверхности жестянок, строго говоря, не подобны).

второй –

$$\frac{x}{20}.$$

Так как оба пройдут от дома до места встречи один и тот же путь, то

$$\frac{5+x}{30} = \frac{x}{20}.$$

откуда $x = 10$. Младший рабочий нагонит старшего через 10 минут после выхода из дому [1].

111. ВЕЧЕРИНКА

Задача

На вечеринке было 42 танцующих. Мария танцевала с семью танцорами, Ольга – с восемью, Вера – с девятью и так далее до Нины, которая танцевала со всеми танцорами. Сколько танцоров (мужчин) было на вечеринке?

Решение

Задача решается очень просто, если удачно выбрать неизвестное. Будем искать число не танцоров, а танцорок, которое обозначим через x:

1-я, Мария,	танцевала	с 6 + 1	танцорами
2-я, Ольга,	«	« 6 + 2	«
3-я, Вера,	«	« 6 + 3	«
x-я, Нина,	«	« 6 + x	«

Имеем уравнение

$$x + (6 + x) = 42,$$

откуда

$$x = 18,$$

а следовательно число танцоров –

$$42 - 18 = 24.$$

112. МОРСКАЯ РАЗВЕДКА

Задача первая

Разведчику (разведывательному кораблю), имеющему скорость 28 миль в час, дано задание обследовать район моря по курсу эскадры, т. е. в направлении ее движения, в расстоянии 70 миль. Скорость эскадры 15 миль (в час). Требуется определить, через сколько времени разведчик возвратится к эскадре [2].

Решение

Обозначим искомое число часов через x. За это время эскадра успела пройти $15x$ миль, разведывательный же корабль $28x$. Последнее судно прошло вперед 70 миль и часть этого пути обратно; эскадра же прошла остальную часть того же пути. Вместе они прошли путь в $28x + 15x$, равный 2×70. Имеем уравнение

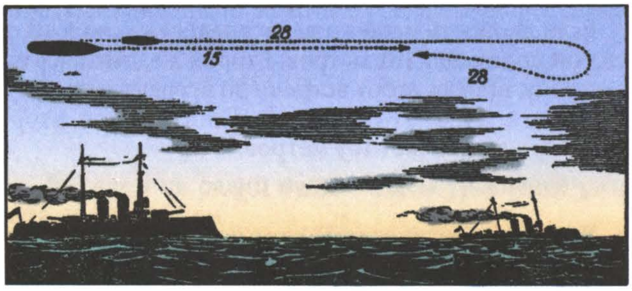
$$28x + 15x = 140,$$

откуда

$$x = \frac{140}{43} = 3 \text{ ч. } 15 \text{ м.}$$

[1] Задача имеет простое арифметическое решение.

[2] «Из заметок по тактической навигации», К. А. Мигаловский, 1926 (пояснения в скобках мои) Я. П.



Разведчик возвратится к эскадре через 3 часа 15 минут.

Задача вторая

Разведывательное судно получило приказ произвести разведку впереди эскадры по направлению ее движения. Через 3 часа судно это должно вернуться к эскадре. Спустя сколько времени после оставления эскадры разведывательное судно должно повернуть назад, если скорость его 25 узлов, а эскадры 15 узлов?

Решение

Пусть разведчик должен повернуть спустя x часов; значит, он удалялся от эскадры x часов, а шел навстречу ей $(3 - x)$ часов. Пока все корабли шли в одном направлении, разведчик успел за x часов удалиться от эскадры на разность пройденных ими путей, т. е. на

$$25x - 15x = 10x.$$

При возвращении разведчика он прошел путь навстречу эскадре $25(3 - x)$, сама же эскадра прошла $15(3 - x)$. Тот и другой прошли вместе $10x$. Следовательно,

$$25(3 - x) + 15(3 - x) = 10x,$$

откуда

$$x = 2\tfrac{2}{5}.$$

Разведчик должен изменить курс на обратный спустя 2 ч. 24 м. после того, как он покинул эскадру.

113. НА ВЕЛОДРОМЕ

Задача

По круговой дороге велодрома едут два велосипедиста с неизменными скоростями. Когда они едут в противоположных направлениях, то встречаются каждые 10 секунд; едучи же в одном направлении, они настигают друг друга каждые 170 секунд. Какова скорость каждого велосипедиста, если длина круговой дороги 170 *м*?

Решение

Если скорость первого велосипедиста x, то в 10 секунд он проезжает $10x$ метров. Второй же, двигаясь ему навстречу, проезжает от встречи до встречи остальную часть круга, т. е. $170 - 10x$ метров. Если скорость второго y, то это составляет $10y$ метров:

$$170 - 10x = 10y.$$

Если же велосипедисты едут навстречу друг другу, то в 170 секунд первый проезжает $170x$ метров, а второй $170y$ метров. Если первый едет быстрее второго, то от одной встречи до другой он проезжает на один круг больше второго, т. е.

$$170x - 170y = 170.$$

После упрощения этих уравнений получаем:

$$x + y = 17; \quad x - y = 1,$$

откуда

$$x = 9 \text{ м в секунду}; \quad y = 8 \text{ м в секунду}.$$

114. ЭСКАЛАТОР МЕТРО

Задача

На одной из станций московского метро человек пробежал по ступеням поднимающегося эскалатора до высоты 10 *м* и обратно, употребив на пробег в оба конца 73 секунды. В другой раз он проделал то же самое на спускающемся эскалаторе и употребил на это 4 мин. 22 сек.

Найти скорость подъема эскалатора, зная, что человек сбегал вниз по его ступеням на 35% быстрее, нежели взбегал вверх.

Решение

Обозначив скорость подъема эскалатора через x, а скорость взбегания человека по ступеням через y, составляем систему уравнений:

$$\frac{10}{x+y} + \frac{10}{1{,}35 - x} = 73$$

После преобразований получаем

$$\frac{23{,}5}{73} y = 1{,}35 y^2 + 0{,}35 xy - x^2;$$

$$\frac{23{,}5}{262} y = 1{,}35 y^2 - 0{,}35 xy - x^2;$$

Вычтя второе уравнение из первого, имеем

$$23{,}5 y \left(\frac{1}{73} - \frac{1}{262} \right) = 0{,}7 xy$$

или (так как y не равно нулю)

$$x = \frac{23{,}5}{0{,}7} \left(\frac{1}{73} - \frac{1}{262} \right) = 0{,}33.$$

Скорость подъема эскалатора равна 0,33 *м* в сек.

115. СОСТЯЗАНИЕ АВТОМОБИЛЕЙ

Задача

При автомобильных состязаниях одна из трех стартовавших одновременно машин, делавшая в час на 15 *км* меньше первой и на 3 *км* больше третьей, пришла к конечному пункту на 12 минут позже первой и на 3 минуты раньше третьей. Остановок в пути не было.

Требуется определить:

a) Как велик участок пути?

b) Как велика скорость каждой машины?

c) Какова продолжительность пробега каждой машины?

Решение

Хотя требуется определить 7 неизвестных величин, мы обойдемся при решении задачи только двумя: составим систему двух уравнений с двумя неизвестными.

Обозначим скорость второй машины через x. Тогда скорость первой выразится через $x + 15$, а третьей – через $x - 3$.

Рис. 6.

Длину участка обозначим буквой y. Тогда продолжительность пробега обозначится:

для первой машины через .... $\dfrac{y}{x+15}$

для второй « « .... $\dfrac{y}{x}$

для третьей « « .... $\dfrac{y}{x-3}$

Мы знаем, что вторая машина была в пути на 12 минут (т. е. на $1/5$ часа) дольше первой. Поэтому

$$\frac{y}{x} - \frac{y}{x+15} = \frac{1}{5}.$$

Третья машина была в пути на 3 минуты (т. е. на $1/20$ часа) больше второй. Следовательно,

$$\frac{y}{x-3} - \frac{y}{x} = \frac{1}{20}.$$

Первое уравнение преобразуем:

$$5y(x+15) - 5xy = x(x+15)$$

$$5xy + 75y - 5xy = x(x+15)$$

$$75y = x(x+15).$$

Второе уравнение также преобразуем:

$$20xy - 20y(x-3) = x(x-3)$$

$$20xy - 20xy + 60y = x(x-3)$$

$$60y = x(x-3).$$

Имеем систему

$$\begin{cases} 75y = x(x+15) \\ 60y = x(x-3). \end{cases}$$

Первое уравнение делим на второе, сокращая при этом на x и y (обе величины, мы знаем, не равны нулю). Получаем уравнение:

$$\frac{5}{4} = \frac{x+15}{x-3}.$$

или

$$5x - 15 = 4x + 60,$$

откуда

$$x = 75.$$

Зная x, находим у из уравнения

$$60y = x(x-3) = 75 \times 72, \quad y = 90.$$

Итак, скорости машин определены:

90 *км*, 75 *км*, 72 *км*.

Длина всего пути = 90 *км*.

Продолжительность пробегов:

первой машины $\frac{90}{90} = 1$ час.

второй « $\frac{90}{75} = 1$ ч. 12 м.

третьей « $\frac{90}{72} = 1$ ч. 15 м.

Таким образом все 7 неизвестных величин задачи определены.

116. СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ ЕЗДЫ

Задача

Автомобиль проехал расстояние между двумя городами со скоростью 30 *км* в час и возвратился со скоростью 20 *км* в час. Какова была средняя скорость его езды?

Решение

Обманчивая простота задачи вводит многих в заблуждение. Не вникнув в условия вопроса, вычисляют среднеарифметическое между 30 и 20, т. е. находят полусумму

$$30 + 20 = 25.$$

Это «простое» решение было бы правильно, если бы поездка в одну сторону и в обратном направлении длилась одинаковое время. Но ясно, что обратная поездка должна была отнять больше времени, чем езда туда, во столько раз, во сколько скорость езды туда (30 *км* в час) превышает скорость возвращения (20 *км* в час), т. е. в $^3/_2$ раза. Значит, со скоростью 30 *км* в час автомобиль двигался $^2/_3$ того промежутка времени, в течение которого он ехал со скоростью 20 км в час. Учтя это, мы поймем, что ответ 25 – неверен.

И действительно, уравнение дает другой ответ. Составить уравнение нетрудно, если ввести вспомогательное неизвестное – именно величину l расстояния между городами. Обозначив искомую среднюю скорость через x, составляем уравнение

$$\frac{2l}{x} = \frac{l}{30} + \frac{l}{20}.$$

Так как l не равно нулю, можем уравнение разделить на l; получаем:

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{30} + \frac{1}{20}.$$

После преобразований имеем:

$$1200 = 20x + 30x,$$

откуда $x = 24$.

Итак, правильный ответ не 25 *км* в час, а 24.

117. МАШИНЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Беседа об уравнениях в плане «Занимательной алгебры» не может пройти мимо машин, решающих уравнения (притом весьма трудные) автоматическим путем. Это не утопия, как «литературная» или «мыслительная» машины, рассмотренные в первой главе, и не миф, существующий лишь в умах легковерных людей, как мнимые шахматные автоматы. Машины для решения уравнений существуют на самом деле и автоматически находят корни таких трудных уравнений, как

$$x^9 + ax^8 + b = 0$$
$$x^9 + ax^7 + b = 0$$
$$x^5 + ax^4 + bx^3 + c = 0$$

Наш академик А. Н. Крылов [1] изобрел математическую машину, еще более удивительную: она справляется с уравнениями высшей математики (интегрирует дифференциальные уравнения).

Чтобы понять идею устройства подобных машин, вспомним, как решаются графически хотя бы уравнения первой степени. Возьмем для примера уравнение.

$$2x - 8 = 0.$$

Мы можем заменить его такой несложной «системой»

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ \quad\ \ y = 8 \end{cases}$$

Уравнения $y = 2x$ и $y = 8$ можно рассматривать как уравнения двух прямых линий; абсцисса точки их пересечения и будет искомое x (рис. 7). Легко представить себе, механический прибор, осуществляющий этот метод решения уравнений первой степени. Корни уравнения второй степени могут быть разысканы механическим прибором, осуществляющим пересечение параболы и прямой линии. Практически скорее и проще в этих случаях, конечно, находить корни вычислением, и

[1] В 1904 г. российский ученый академик А. Н. Крылов изобрел первую механическую вычислительную машину, решающую дифференциальные уравнения (применялась при проектировании кораблей) (прим. ред.).

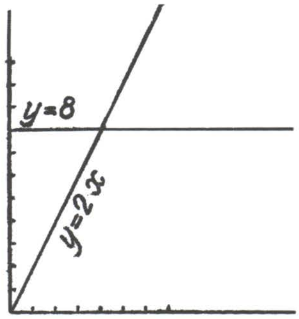


Рис. 7.

потому подобные приборы могли бы иметь разве лишь дидактическое значение. Иное дело уравнения более высоких степеней, вычисление корней которых представляет долгую и утомительную работу; здесь создание механического прибора вполне оправдывается практической потребностью.

На рис. 8 изображена машина для решения четырехчленных уравнений вида:

$$x^p + ax^m + bx^n + c = 0$$

3-й, 4-й и 5-й степеней. Объяснять подробности устройства этой машины было бы в нашей книге неуместно; укажу только, что корень отыскивается в ней путем пересечения пространственной кривой с плоскостью. Никаких зубчаток, никаких сложных передач в этой «машине» нет, так что лучше, пожалуй, называть

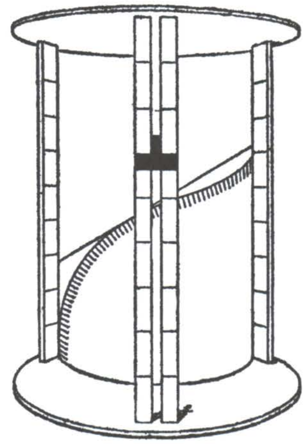


Рис. 8.

ее не машиной, а прибором или аппаратом. В ней три отвесных масштабных стойки, по одной из которых скользит диоптр (просверленная пластинка, рис. 8). Пространственная кривая (шкала x) нанесена на особом цилиндре. На делениях стоек отмечают коэфициенты a, b, c, причем две из этих пометок соединяются ниткой, а через диоптр третьей стойки замечают пометки тех точек кривой, которые отвечают местам ее пересечения с ниткой. Прибор этот изобретен проф. Мемке в Штуттгарте.

Человек не ограничивался только желанием «свалить» всю работу на механического помощника. Была еще и другая проблема: например, расширить способности так, чтобы вообще иметь возможность выполнять какие-либо операции, простому человеку недоступные, либо доступные, но выполняемые человеком с недостаточной точностью или быстротой.

На этом участке научной деятельности сразу же закипела работа, когда появилась соответствующая требованиям технология – точное машиностроение. Работа разделилась на два далеко неравных потока. Львиную долю усилий и ресурсов захватили военные и лишь малые средства достались обычной мирной жизни и благу обычного человека.

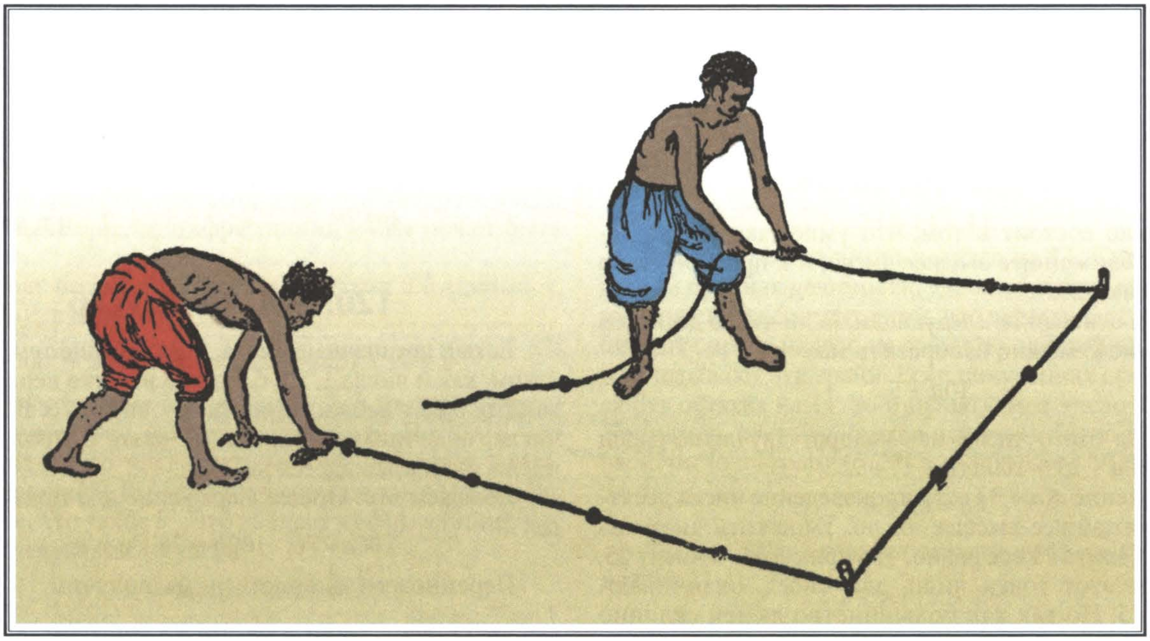
У военных сразу же наметился прорыв в создании механических счетно-решающих устройствах, которые по сути своей были механическими компьютерами. Единственно, в силу ограниченности возможностей, это были узкоспециализированные машины, решавшие, как правило, один-два класса задач. Летчики гордились механическими бомбовыми прицелами, которые позволяли быстро и весьма точно рассчитать момент сброса бомб, учитывая многочисленные параметры движения самолета, а также окружающей среды. Изобрел этот прицел, а вернее целое семейство прицелов, американский инженер нидерландского происхождения Карл Лукас Норден (1880–1965). Последняя модель прицела Нордена позволяла попадать в круг диаметром 30 метров с высоты более 9000 метров. Причем прицеливание производилось автоматически. Более того, прицел имел связь с автопилотом и помогал летчикам удерживать машину на требуемом режиме полета.

Карл Лукас Норден (1880–1965)

Бомбардир возле прицела Нордена

Для повседневной жизни самой известной из созданных устройств, пожалуй, стала счетная машина. Чтобы облегчить бесконечные расчеты астрономов, инженеров, статистиков и многих других специалистов, была изобретена механическая счетная машина. Их новые поколения имели цифровые клавиши, простой ввод значений в обычном порядке, а также теперь не надо было крутить ручку. Приводил в движение это чудо техники электродвигатель.

Люди старшего поколения еще застали эти совершенно необычные аппараты «на работе» у своих родителей. И если вы попадали в расчетный отдел, где находились хотя бы десять счетчиц, то по шуму и грохоту, издаваемому этими славными машинами, можно было подумать, что вы в цехе действующего завода.



Арифметика зачастую не в силах собственными средствами строго доказать правильность иных из ее утверждений. Ей приходится в таких случаях прибегать к обобщающим приемам алгебры. К подобным арифметическим положениям, обосновываемым алгебраически, принадлежат, например, многие правила сокращенного выполнения действий, любопытные особенности некоторых чисел, признаки делимости и др. Рассмотрению вопросов этого рода и посвящается настоящая глава.

118. МГНОВЕННОЕ УМНОЖЕНИЕ

Замечательный счетчик-виртуоз д-р Фред Браунс, затмивший славу своих предшественников и побивший все их рекорды, во многих случаях облегчает себе вычислительную работу, прибегая к несложным алгебраическим преобразованиям.

Например, он выполняет так:

$$988 \times 988 = (988 + 12) \times (988 - 12) + 12^2 =$$

$$= 1\,000 \times 976 + 144 = 976\,144.$$

Легко сообразить, что счетчик в этом случае пользуется следующим алгебраическим преобразованием:

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{a}^2.$$

Далее, умножение 986 × 997 выполняется Браунсом так:

$$986 \times 997 = (986 - 3) \times 1\,000 + 3 \times 14 = 983\,042.$$

На чем основан этот прием? Представим множители в виде:

$$(1000 - 14) \times (1000 - 3)$$

и перемножим эти двучлены по правилам алгебры: 1000 × 1000 – 1000 × 14 – 1000 × 3 + 14 × 3.

Делаем преобразования:

$$1000\,(1000 - 14) - 1000 \times 3 + 14 \times 3 =$$

$$= 1000 \times 986 - 1\,000 \times 3 + 14 \times 3 =$$

$$= 1000\,(986 - 3) + 14 \times 3.$$

Последняя строка и изображает прием немецкого счетчика.

Интересен применяемый им способ перемножения двух трехзначных чисел, у которых число десятков одинаково, а цифры единиц составляют в сумме 10. Например, умножение

$$783 \times 787$$

д-р Браунс выполняет так:

$$78 \times 79 = 6\,162; \quad 3 \times 7 = 21.$$

Результат 616 221.

Обоснование способа ясно из следующих преобразований:

$$(780 + 3)\,(780 + 7) =$$

$$= 780 \times 780 + 780 \times 3 + 780 \times 7 + 3 \times 7 =$$

$$= 780 \times 780 + 780 \times 10 + 3 \times 7 =$$

$$= 780\,(780 + 10) + 3 \times 7 = 780 \times 790 + 21 =$$

$$= 616\,200 + 21.$$

Другой прием для выполнения подобных умножений также практикуемый немецким виртуозом, проще:

$$783 \times 787 = (785 - 2)\,(785 + 2) = 785^2 - 4 =$$

$$= 616\,225 - 4 = 616\,221.$$

На практике мы можем с успехом пользоваться для устных выкладок формулой:

$$\boldsymbol{a}^2 = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}^2.$$

Например:

$$27^2 = (27 + 3)\,(27 - 3) + 3^2 = 729$$

$$63^2 = 66 \times 60 + 3^2 = 3\,969$$

$$18^2 = 20 \times 16 + 2^2 = 324$$

$$37^2 = 40 \times 34 + 7^2 = 1\,369$$

$$48^2 = 50 \times 46 + 2^2 = 2\,304$$

$$54^2 = 58 \times 50 + 4^2 = 2\,916.$$

Очень удобен также следующий способ быстрого возвышения в квадрат чисел, оканчивающихся на 5.

35^2; $3 \times 4 = 12$; Отв. 1 225.

65^2; $6 \times 7 = 42$; Отв. 4 225.

75^2; $7 \times 8 = 56$; Отв. 5 625.

Правило состоит в том, что умножают число десятков на ближайшее высшее число, и к произведению приписывают 25.

Прием основан на следующем. Если число десятков $\boldsymbol{a}$, то все число можно изобразить так

$$10\boldsymbol{a} + 5.$$

Квадрат этого числа, как квадрат двучлена, равен $100\boldsymbol{a}^2 + 100\boldsymbol{a} + 25 = 100\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a} + 1) + 25$.

Выражение $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a} + 1)$ есть произведение числа десятков на ближайшее высшее число. Умножить число на 100 и прибавить 25 все равно, что приписать к числу 25.

Прием этот годен лишь для чисел, оканчивающихся на 5. Но так как большинство людей склонно округлять конец числа до 5, то надобность в возвышении в квадрат подобных чисел возникает чаще, чем для прочих.

Из того же приема вытекает простой способ возвышать в квадрат числа, состоящие из целого и ½. Например:

$$\left(3\frac{1}{2}\right)^2 = 3{,}5^2 = 12{,}25 = 12\frac{1}{4}$$

$$\left(7\frac{1}{2}\right)^2 = 56\frac{1}{4}$$

$$\left(8\frac{1}{2}\right)^2 = 72\frac{1}{4} \quad \text{и т. п.}$$

119. ЦИФРЫ 1, 5 И 6

Вероятно, все заметили, что от перемножения ряда чисел, оканчивающихся единицей или пятеркой, получается число, оканчивающееся той же цифрой. Менее известно, что сказанное относится и к числу 6. Поэтому, между прочим, всякая степень числа, оканчивающегося на 6, также оканчивается шестеркой.

Например:

$$46^2 = 2\,116; \quad 46^3 = 97\,336.$$

Обосновать эту любопытную особенность цифр 1, 5 и 6 можно только алгебраическим путем. Рассмотрим ее для 6.

Числа, оканчивающиеся 6-ю, изображаются так:

$$10\boldsymbol{a} + 6,\ 10\boldsymbol{b} + 6 \quad \text{и т. д.,}$$

где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ могут быть любые целые числа.

Произведение двух таких чисел равно:

$$100\boldsymbol{ab} + 60\boldsymbol{b} + 60\boldsymbol{a} + 36 =$$

$$= 10(10\boldsymbol{ab} + 6\boldsymbol{b} + 6\boldsymbol{a}) + 30 + 6 =$$

$$= 10\,(10\boldsymbol{ab} + 6\boldsymbol{b} + 6\boldsymbol{a} + 3) + 6.$$

Как видим, произведение составляется из некоторого числа десятков и из цифры 6, которая, разумеется, должна оказаться на конце.

Тот же прием доказательства можно приложить к 1 и к 5.

Сказанное дает нам право утверждать, что, например,

336^{2567} оканчивается на 6,

815^{723} « « 5

491^{1732} « « 1 и т. п.

120. ЧИСЛА 25 И 76

Есть и двузначные числа, обладающие тем же свойством, как и числа 1, 5 и 6. Это 25 и, – что вероятно для многих будет неожиданностью, – число 76. Всякие два числа, оканчивающиеся на 76, дают в произведении число, оканчивающееся на 76.

Докажем это. Общее выражение для подобных чисел

$$100\boldsymbol{a} + 76; \quad 100\boldsymbol{b} + 76 \quad \text{и т. д.}$$

Перемножим два таких числа; получим

$$10\,000\boldsymbol{ab} + 7\,600\boldsymbol{b} + 7\,600\boldsymbol{a} + 5\,776 = 10\,000\boldsymbol{ab} +$$

$$+ 7\,600\boldsymbol{b} + 7\,600\boldsymbol{a} + 5\,700 + 76 =$$

$$= 100\,(100\boldsymbol{ab} + 76\boldsymbol{b} + 76\boldsymbol{a} + 57) + 76.$$

Положение доказано: произведение будет оканчиваться числом 76.

Отсюда следует, что всякая с т е п е н ь числа, оканчивающегося на 76, есть подобное же число:

$$376^2 = 141376; \quad 576^3 = 191\,102\,976 \quad \text{и т. п.}$$

Существуют и более длинные группы цифр, которые, находясь на конце чисел, сохраняются и в их произведении. Примером могут служить числа:

$$376; \ 625; \ 90\,625.$$

Например,

$$90\,625^2 = 8\,212\,890\,625.$$

Предоставляем читателю доказать это положение самостоятельно.

121. ДОПЛАТА

Старинная народная задача

Однажды в старые времена произошел такой случай. Двое прасолов [1] продали принадлежавший им гурт волов, получив при этом за каждого вола столько рублей, сколько в гурте было волов. На вырученные деньги купили стадо овец по 10 рублей за овцу и одного ягненка. При дележе поровну одному досталась лишняя овца, другой же взял ягненка и получил с компаньона соответствующую доплату. Как велика была доплата?

Решение

Задача не поддается прямому переводу «на алгебраический язык», для нее нельзя составить уравнения. Приходится решать ее особым путем, так сказать, по свободному математическому соображению. Но и здесь алгебра оказывает арифметике существенную помощь.

[1] Прасол – скупщик скота, птицы, рыбы для дальнейшей перепродажи (прим. ред.).

Стоимость всего стада в рублях есть точный квадрат, так как стадо приобретено на деньги от продажи n волов по n рублей за вола. Одному из компаньонов досталась лишняя овца, следовательно, число овец нечетное; нечетным, значит, является и число десятков в числе n^2. Какова же цифра единиц?

Можно доказать, что если в точном квадрате число десятков нечетное, то цифра единиц в нем может быть только 6.

Квадрат всякого числа из a десятков и b единиц, т. е. $(10a + b)^2$, равен

$$100a^2 + 20ab + b^2 = (10a^2 + 2ab) \times 10 + b^2.$$

Десятков в этом числе $10a^2 + 2ab$ да еще некоторое число десятков, заключающихся в b^2. Но $10a^2 + 2ab$ делится на 2, это число четное. Оно сделается нечетным, если в числе b^2 окажется нечетное число десятков. Вспомним, что такое b^2. Это квадрат цифры единиц, т. е. одно из следующих 10 чисел:

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.$$

Среди них нечетное число десятков имеют только 16 и 36 – оба оканчивающиеся на 6. Значит, точный квадрат

$$100a^2 + 20ab + b^2$$

может иметь нечетное число десятков только в том случае, если оканчивается на 6.

Теперь легко найти ответ на вопрос задачи. Ясно, что ягненок пошел за 6 рублей. Компаньон, которому он достался, получил, следовательно, на 4 рубля меньше другого. Чтобы уравнять доли, обладатель ягненка должен дополучить от своего компаньона 2 рубля.

Доплата равна 2 рублям.

122. ДЕЛИМОСТЬ НА 11

Алгебра весьма облегчает отыскание признаков, по которым можно заранее, не выполняя деления, установить, делится ли данное число на тот или иной делитель. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 – общеизвестны. Выведем признак делимости на 11; он довольно прост и практичен.

Каждое многозначное число N может быть в общем виде представлено так:

$$N = 10^n a + 10^{n-1} b + 10^{n-2} c + \ldots + 10^3 p + 10^2 u + 10 v + w.$$

Посмотрим, какие остатки получаются от деления отдельных слагаемых этого числа. Начнем с конца:

w – число, меньшее 11, дает в остатке, конечно, само себя, т. е. w.

$10 v = 11 v - v$. Мы можем сказать, что при делении на 11 это слагаемое дает отрицательный остаток $-v$:

$$10^2 u = 100u = 99u + u; \quad \text{остаток } u.$$

$103 p = 1000p = 1001p - p$. Так как 1001 делится на 11, то остаток равен $-p$.

Легко видеть, что остаток от деления N на 11 должен равняться алгебраической сумме всех этих остатков, т. е.

$$a - b + c - d + e - \ldots - p + u - v + w =$$
$$= (a + c + e + \ldots + u + w) - (b + d + \ldots + p + v).$$

Иными словами: надо из суммы всех цифр, стоящих на нечетных местах, вычесть сумму всех цифр, занимающих четные места; если в разности получится 0 либо число (положительное или отрицательное), кратное 11, то и испытуемое число кратно 11.

Испытаем, например, число 87 635 064

$$8 + 6 + 5 + 6 = 25$$
$$7 + 3 + 0 + 4 = 14$$
$$25 - 14 = 11.$$

Значит, данное число делится на 11. Существует и другой признак делимости, удобный для не очень длинных чисел. Он состоит в том, что испытуемое число разбивают справа налево на грани по две цифры в каждой и складывают эти грани. Если полученная сумма делится без остатка на 11, то и испытуемое число кратно 11. Например, пусть требуется испытать число 528. Разбиваем число на грани (5/28) и складываем обе грани

$$5 + 28 = 33.$$

Так как 33 делится без остатка на 11, то и число 528 кратно 11:

$$528 : 11 = 48.$$

Докажем этот признак делимости, например, для любого пятизначного и шестизначного числа.

Такие числа можно представить в виде

$$N = 10\,000\, x + 100y + z,$$

где x – число десятков тысяч в нашем числе, y – число сотен, z – число единиц (т. е. x, y, z – грани нашего числа, расчлененного, как было указано). Делаем следующие преобразования:

$$N = 9\,999x + x + 99y + y + z$$
$$N = (9\,999x + 99y) + (x + y + z).$$

Так как $9\,999x + 99y$ кратно 11, то для делимости на 11 числа N необходимо и достаточно, чтобы $x + y + z$ (т. е. сумма граней) была кратна 11 [1].

123. ДЕЛИМОСТЬ НА 19

Найти основание следующего признака делимости:

Число делится без остатка на 19, если половина числа его десятков, сложенная с цифрой единиц, кратна 19.

При нечетном числе десятков остаток от их деления на 2 (т. е. 10) прибавляется к единицам.

Решение

Всякое число N, можно представить в виде

$$N_1 = 10x + y,$$

где x – число десятков (не цифра в разряде десятков, а общее число целых десятков во всем числе), y – цифра единиц. Докажем сначала, что если при x четном (т. е. $x = 2z$) число

$$N_2 = \frac{x}{2} + y = z + y$$

кратно 19, то и $20z + y$ (т. е. N_1) кратно 19. Для этого составим разность $N_1 - N_2 = R$.

$$R = 20z + y - z - y = 19z,$$

[1] Не желая присваивать себе чужих заслуг, должен отметить, что изложенный признак делимости придуман моим сыном-школьником.

откуда
$$N_1 = N_2 + R = 19z + N_2.$$

Ясно, что если N_2 кратно 19, то и кратно тому же числу. Это мы и хотели доказать.

Рассмотрим теперь случай, когда число десятков x нечетное, т. е. равно $2z + 1$. Докажем, что число делится без остатка на 19, если число

$$N_3 = \frac{2z}{2} + 10 + y = z + y + 10$$

кратно 19. Составим разность:

$$N_1 - N_3 = 10\,(2z + 1) + y - z - y - 10 = R$$
$$R = 20z + 10 + y - z - y - 10 = 19z$$

Опять имеем
$$N_1 = 19z + N_3$$
равенство, подтверждающее правильность указанного признака делимости.

Покажем на примере, как им пользуются. Пусть требуется определить, делится ли на 19 число

47 045 881.

Применяем последовательно наш признак делимости:

$$\frac{4\,704\,588}{2} + 1 = 2\,352\,295$$
$$\frac{235\,228}{2} + 15 = 117\,629$$
$$\frac{11\,762}{2} + 9 = 5\,890$$
$$\frac{588}{2} + 10 = 304$$
$$\frac{30}{2} + 4 = 19$$

Так как 19 делится на 19 без остатка, то кратны 19 и числа

304, 5 890, 117629, 2352295, 47045881.

Итак, число наше делится на 19.

Нельзя сказать, чтобы этот признак делимости был практичен. Пожалуй, немногим больше времени отняло бы непосредственное испытание данного числа делением его на 19. Однако, лучшего признака делимости на 19 не найдено.

124. ПИФАГОРОВЫ ЧИСЛА

Задача

Удобный и очень точный способ, употребляемый землемерами для проведения на местности перпендикулярных линий, состоит в следующем. Пусть через точку A требуется к линии MN провести другую линию под прямым углом (рис. 9). Откладывают от A по направлению AM три раза какое-нибудь расстояние a. Затем завязывают на шнуре три узла, расстояния между которым равны $4a$ и $5a$. Приложив крайние узлы к точкам A и B, натягивают шнур за средний узел. Шнур расположится треугольником, в котором угол A прямой.

Этот древний способ, применявшийся еще тысячелетия назад строителями египетских пирамид, основан на том, что каждый треугольник, стороны которого относятся как 3 : 4 : 5, – прямоугольный, согласно общеизвестной теореме Пифагора:

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Вместо чисел 3, 4, 5 можно выбрать и другие «пифагоровы числа», которых существует бесчисленное множество. Например:

$5^2 + 12^2 = 13^2$;	$15^2 + 112^2 = 113^2$;
$7^2 + 24^2 = 25^2$;	$17^2 + 144^2 = 145^2$;
$8^2 + 15^2 = 17^2$;	$20^2 + 21^2 = 29^2$;
$9^2 + 40^2 = 41^2$;	$24^2 + 143^2 = 145^2$;
$11^2 + 60^2 = 61^2$;	$57^2 + 176^2 = 185^2$;
$13^2 + 84^2 = 85^2$;	$120^2 + 209^2 = 241^2$;

и т. д.

Рассматривая эти группы, убеждаемся, что в каждой из них есть четное число («четный катет»). Случайность ли это? Или все три пифагоровы числа не могут быть нечетными?

Решение

Станем рассуждать «от противного».

Допустим, что все три пифагоровы числа нечетные;

$$2x + 1; \quad 2y + 1; \quad 2z + 1.$$

Квадраты их:

$$(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$
$$(2y + 1)^2 = 4y^2 + 4y + 1$$
$$(2z + 1)^2 = 4z^2 + 4z + 1.$$

Сумма первых двух из этих чисел, например

$(2x + 1)^2 + (2y + 1)^2$, составляет

$$4x^2 + 4x + 1 + 4y^2 + 4y + 1 = 4x^2 + 4y^2 + 4x + 4y + 2,$$

т. е. число четное (кратное 2) и, очевидно, не может равняться нечетному числу $4z2 + 4z + 1$. Поэтому группы из нечетных пифагоровых чисел не существует.

Остается еще одна возможность: оба «катета» нечетные, а гипотенуза – «четная». Нетрудно доказать, что такая комбинация не существует. В самом деле: если «катеты» имеют вид

$$2x + 1 \text{ и } 2y + 1,$$

то сумма их квадратов равна

$$4x^2 + 4x +1 + 4y^2 + 4y + 1 = 4\,(x^2 + x + y^2 + y) + 2$$

т, е. представляет собою число, которое при делении на 4 дает в остатке 2. Между тем, квадрат всякого четного числа должен делиться на 4 без остатка. Значит, сумма квадратов двух нечетных чисел не может быть квадратом четного числа; иначе говоря, наши три числа – не пифагоровы.

Итак, мы должны заключить, что в группе пифагоровых чисел один из «катетов» необходимо должен быть четным. Эта задача соприкасается тесно с геометрией, но она все же по существу относится к свойствам чисел и, следовательно, должна быть рассматриваема, как арифметическая.

Пифагоровы числа обладают вообще рядом любопытных особенностей, которые мы перечисляем далее без доказательств:

1) Один из «катетов» должен быть кратным трем.

2) Один из «катетов» должен быть кратным четырем.

4) Одно из пифагоровых чисел должно быть кратно пяти.

Читатель может удостовериться в наличии этих свойств, просматривая приведенные выше примеры групп пифагоровых чисел.

125. ТЕОРЕМА СОФИИ ЖЕРМЕН

Вот задача, предложенная известной французской математичкой Жермен:

Доказать, что каждое число вида $a^4 + 4$ есть составное (если a не равно 1).

Решение

Доказательство вытекает из следующих преобразований:

$$a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - 4a^2 =$$

$$= (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 = (a^2 + 2 - 2a)\,(a^2 + 2 + 2a).$$

Число $a^4 + 4$ может быть, как мы убеждаемся, представлено в виде произведения двух множителей не равных ему самому и единице; иными словами, оно – составное.

126. СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА

Число так называемых простых чисел, т. е. целых чисел, не делящихся без остатка ни на какие другие целые числа, кроме единицы и самих себя, – бесконечно велико.

Начинаясь числами 1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31..., ряд их простирается без конца. Вклиниваясь между числами составными, они разбивают натуральный ряд чисел на более или менее длинные участки составных чисел. Какой длины бывают эти участки? Следует ли где-нибудь подряд, например, тысяча составных чисел, не прерываясь ни одним простым числом?

Можно доказать, – хотя это и кажется неправдоподобным, – что участки составных чисел между простыми бывают любой длины. Нет границы для длины таких участков: они могут состоять из тысячи, из миллиона, из триллиона и т. д. составных чисел.

Мы докажем это, если найдем общее выражение для ряда из n составных чисел, каждое из которых на единицу больше предыдущего. Для удобства придется в этом случае пользоваться условным символом $n!$, который обозначает произведение всех чисел от 1 до n включительно. Например $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$. Мы сейчас докажем, что ряд

$$[(n+1)! + 2],\ [(n+1)! + 3],\ [(n+1)! + 4] \ldots$$

$$\text{до } [(n+1)! + n + 1] \text{ включительно}$$

состоит из n последовательных составных чисел.

Числа эти идут непосредственно друг за другом в натуральном ряду, так как каждое следующее на 1 больше предыдущего. Надо доказать, однако, что все они – составные.

Первое число;

$$(n+1)! + 2 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \ldots \times (n+1) + 2 -$$

четное, так как оба его слагаемые содержат множитель 2. А всякое четное число, большее 2 – составное.

Второе число:

$$(n+1)! + 3 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \ldots (n+1) + 3$$

состоит из двух слагаемых, каждое из которых кратно 3. Значит и это число составное.

Третье число:

$$(n+1)! + 4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \ldots (n+1) + 4$$

делится без остатка на 4, так как состоит из слагаемых, кратных 4.

Подобным же образом устанавливаем, что следующее число:

$$(n+1)! + 5$$

кратно 5 и т. д. Иначе говоря, каждое число нашего ряда содержит множитель, отличный от единицы и его самого; оно является, следовательно, составным.

Если вы желаете написать например, пять последовательных составных чисел, вам достаточно в приведенное раньше общее выражение подставить вместо n число 5. Вы получаете ряд

722, 723, 724, 725, 726.

Но это не единственный ряд из 5 последовательных составных чисел. Есть и другие. Например

62, 63, 64, 65, 66.

Или еще меньшие числа:

24, 25, 26, 27, 28.

Попробуем теперь решить задачу:

Написать десять последовательных составных чисел.

Решение

На основании ранее сказанного устанавливаем, что первое из искомых десяти чисел есть

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots \times 10 \times 11 + 2 = 39\,816\,802.$$

Искомая серия чисел, следовательно, такова:

39 816 802, 39 816 803, 39 816 804 и т. д.

Однако, существуют серии из десяти гораздо меньших составных чисел. Так, можно указать на серию даже не из десяти, а из тринадцати составных последовательных чисел уже во второй сотне:

114, 115, 116, 117 и т. д. до 126 включительно.

127. ЧИСЛО ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Мы сейчас убедились, что практически всегда возможно найти ряд из любого числа последовательных составных чисел – из тысячи, из миллиона, из квадриллиона и т. д. Существование сколь угодно длинных серий последовательных чисел сплошь составных способно возбудить сомнение в том, действительно ли ряд простых чисел не имеет конца. Не лишним будет поэтому привести здесь доказательство бесконечности ряда простых чисел.

Доказательство это принадлежит гениальному основателю геометрии, древнегреческому математику Евклиду и входит в его знаменитые «Начала». Оно относится к разряду доказательств «от противного». Предположим, что ряд простых чисел конечен, и обозначим последнее простое число в этом ряду буквою N. Составим произведение

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \ldots N = N!$$

и прибавим к нему 1. Получим

$$N! + 1.$$

Число это не делится без остатка ни на одно из чисел, меньших, чем N, – всякий раз получится остаток 1. Но, быть может, оно делится на какое-нибудь число, большее, чем N? Что же это, однако, может быть за делитель? Конечно, не простое число, так как простых чисел, больших нежели N, не существует (мы ведь из этого исходим). Значит, оно составное, разлагающееся на множители. Но среди этих множителей должно непременно быть меньшее N (потому что разлагаемое число меньше $N!$), а мы уже знаем, что $N! + 1$ не делится ни на одно из чисел, меньших N, – следовательно, не может делиться и на их произведение или на число, содержащее множителем хотя бы одно из них.

Итак, нельзя было принять, что ряд простых чисел конечен: предположение это приводит к противоположному заключению. Какую бы длинную серию последовательных составных чисел мы ни встретили в ряду натуральных чисел, мы можем быть убеждены, что за нею найдется еще бесконечное множество простых чисел.

128. ОТВЕТСТВЕННЫЙ РАСЧЕТ

В вычислительной практике встречаются такие чисто арифметические выкладки, выполнение которых без помощи облегчающих методов алгебры чрезвычайно затруднительно. Пусть требуется, например, найти результат таких действий:

$$\frac{2}{1 + \dfrac{1}{90\,000\,000\,000}}.$$

(Вычисление это необходимо для того, чтобы установить, вправе ли современная техника пользоваться прежним законом сложения скоростей, не считаясь с теми изменениями, которые внесены в механику теорией относительности. Согласно старой механике, скорость тела, участвующего в двух одинаково направленных движениях, каждое со скоростью 1 ***км*** в секунду, равна 2 ***км*** в секунду. Новое же учение дает для этой скорости выражение, приведенное выше. На сколько же разнятся эти результаты? Уловима ли разница для тончайших измерительных приборов? Для выяснения этого важного вопроса и приходится выполнить такое вычисление.)

Сделаем это вычисление двояко: сначала обычным арифметическим путем, а затем покажем, как получить результат приемами алгебры. Достаточно одного взгляда на приведенные далее длинные ряды цифр, чтобы убедиться в неоспоримых преимуществах алгебраического способа.

Прежде всего преобразуем нашу «многоэтажную» дробь:

$$\frac{2}{1 + \dfrac{1}{90\,000\,000\,000}} = \frac{180\,000\,000\,000}{90\,000\,000\,001}.$$

$$\begin{array}{r|l}
180\,000\,000\,000 & 90\,000\,000\,001 \\ \cline{2-2}
\underline{90\,000\,000\,001} & 1{,}999\,999\,999\,977 \\
899\,999\,999\,990 & \\
\underline{810\,000\,000\,009} & \\
899\,999\,999\,810 & \\
\underline{810\,000\,000\,009} & \\
899\,999\,998\,010 & \\
\underline{810\,000\,000\,009} & \\
899\,999\,980\,010 & \\
\underline{810\,000\,000\,009} & \\
899\,999\,800\,010 & \\
\underline{810\,000\,000\,009} & \\
899\,998\,000\,010 & \\
\underline{810\,000\,000\,009} & \\
899\,980\,000\,010 & \\
\underline{810\,000\,000\,009} & \\
899\,800\,000\,010 & \\
\underline{810\,000\,000\,009} & \\
898\,000\,000\,010 & \\
\underline{810\,000\,000\,009} & \\
880\,000\,000\,010 & \\
\underline{810\,000\,000\,009} & \\
700\,000\,000\,010 & \\
\underline{630\,000\,000\,007} & \\
70\,000\,000\,003 &
\end{array}$$

Произведем теперь деление числителя на знаменатель.

Вычисление, как видите утомительное, кропотливое; в нем легко запутаться и ошибиться. Между тем, для решения задачи важно в точности знать, на котором именно месте обрывается ряд девяток и начинается серия других цифр.

Сравните теперь, как коротко справляется с тем же расчетом алгебра. Она пользуется следующим приближенным равенством: если $\boldsymbol{a}$ весьма малая дробь, то

$$\frac{1}{1 + \boldsymbol{a}} \approx 1 - \boldsymbol{a},$$

где знак $\approx$ означает «приближенно равно».

Убедиться в справедливости этого утверждения очень просто: сравним делимое (1) с произведением делителя на частное

$$1 = (1 + \boldsymbol{a})\,(1 - \boldsymbol{a}),$$

т. е.

$$1 = 1 - a^2.$$

Так как a – весьма малая дробь (например, 0,001), то a2 еще меньшая дробь (0,000001), и ею можно пренебречь.

Применим сказанное к нашему расчету[1]:

$$\frac{2}{1+\frac{1}{90\,000\,000\,000}} = \frac{2}{1+\frac{1}{9\times10^{10}}} =$$

$$= 2 - 0{,}222\ldots \times 10-10 = 2 - 0{,}0000000000222\ldots =$$

$$= 1{,}99999999999777\ldots$$

Мы пришли к тому же результату, что и раньше, но гораздо более коротким и надежным путем.

(Читателю вероятно интересно знать, каково значение полученного результата в поставленной нами задаче из области механики. Он показывает, что уклонение от старого закона сложения скоростей хотя и существует, но ни в коем случае не может быть обнаружено; оно сказывается на одиннадцатой цифре определяемого числа, а самые точные измерения длины не идут далее 7-й цифры, в технике же ограничиваются 3 – 4 цифрами. Мы вправе поэтому утверждать без всяких оговорок, что новая, эйнштейнова, механика практически ничего не меняет в современной технике.)

129. КОГДА БЕЗ АЛГЕБРЫ ПРОЩЕ

Наряду со случаями, когда алгебра оказывает арифметике существенные услуги, бывают и такие, когда вмешательство алгебры вносит лишь ненужное осложнение. Истинное знание математики состоит в умении так распоряжаться математическими средствами, чтобы избирать всегда самый прямой и надежный путь, не считаясь с тем, относится ли метод решения задачи к арифметике, алгебре, геометрии и т. д. Полезно будет поэтому рассмотреть случай, когда привлечение алгебры способно лишь запутать решающего. Поучительным примером может служить следующая задача:

Найти наименьшее из всех тех чисел, которые при делении

на 2 дают в остатке 1
« 3 « « « 2
« 4 « « « 3
« 5 « « « 4
« 6 « « « 5
« 7 « « « 6
« 8 « « « 7
« 9 « « « 8

Решение

Задачу эту предложили мне со словами: «Как вы решили бы такую задачу? Здесь слишком много уравнений, не выпутаться из них».

[1] Мы пользуемся далее приближенным равенством:

$$\frac{A}{1+a} \approx A\,(1-a).$$

Ларчик просто открывается; никаких уравнений, никакой алгебры для решения задачи не требуется, – она решается несложным арифметическим рассуждением.

Прибавим к искомому числу единицу. Какой остаток даст оно тогда при делении на 2? Остаток 1 + 1 = 2; другими словами – число разделится на 2 без остатка.

Точно так же разделится оно без остатка и на 3, на 4, на 5, на 6, на 7, на 8 и на 9. Наименьшее из таких чисел есть

$$9 \times 8 \times 7 \times 5 = 2\,520,$$

а искомое число – 2519, что нетрудно проверить испытанием.

130. В ПОМОЩЬ ГЕОМЕТРИИ

Задача

Не менее часто приходит алгебра и на помощь геометрии. Из многочисленных относящихся сюда примеров рассмотрим только один – задачу о круглом биллиарде.

Круглых биллиардов, кажется, не бывает; но если бы какой-нибудь усердный любитель этой игры вздумал изготовить его себе, он мог бы практически решить следующую поучительную задачу:

В a сантиметрах от центра круглого биллиарда, радиус которого R, находится шар (рис. 10). Его хотят пустить так, чтобы, отскочив три раза от борта, он

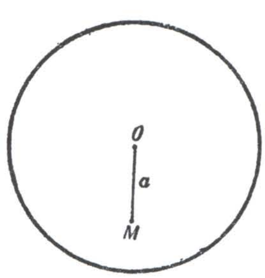


Рис. 10.

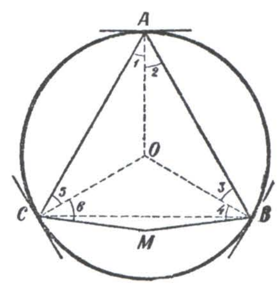


Рис. 11.

прошел вновь через место, откуда вышел. В каком направлении или к какой точке борта надо его пустить?

Решение

Напомню прежде всего, что упругий шар отскакивает от преграды под углом, равным углу падения (имеются в виду углы между направлением движения и перпендикуляром к плоскости преграды). Напомню также, что перпендикуляром к кривой в данной точке считается перпендикуляр к касательной, проведенной в этой точке.

Рассмотрим теперь рис. 11, на котором обозначен путь шара. Радиусы OB, OA и OC перпендикулярны к касательным и делят углы B, A, C пополам:

$$\angle 1 = \angle 2$$
$$\angle 3 = \angle 4$$
$$\angle 5 = \angle 6$$

Перегнем чертеж по радиусу OA так, чтобы левая часть фигуры легла на правую. AC пойдет по AB, и точка C окажется в B, так как они обе расположены на окружности. Соединив C с B, получаем равнобедренный треугольник BAC. Далее

$$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5 = \angle 6.$$

Следовательно

$$\angle 5 + \angle 6 = \angle 3 + \angle 4$$

или

$$\angle ACM = \angle ABM$$

откуда

$$\angle MBC = \angle MCB$$

Значит, $MC = MB$, и точка M лежит на продолжении радиуса AO.

Установив это, обратимся к рис. 12. Радиус CO – биссектор; он делит основание AM треугольника AMC

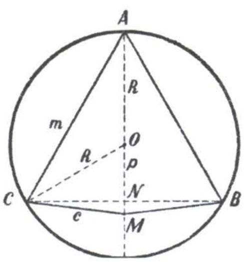


Рис. 12.

на части AO и OM, пропорциональные сторонам CA и CM:

$$\frac{AO}{OM} = \frac{CA}{CM} = \frac{m}{c}$$

Так как OM (расстояние шара от центра) дано и равно a, а $AO = R$, то можно написать

$$\frac{R}{a} = \frac{m}{c}.$$

Далее, из треугольника COM:

$$c^2 = R^2 + a^2 - 2ap$$

Из треугольника COA:

$$m^2 = R^2 + R^2 + 2Rp = 2R^2 + 2Rp.$$

Из пропорции

$$\frac{R}{a} = \frac{m}{c}$$

имеем

$$\frac{c^2}{m^2} = \frac{a^2}{R^2}$$

Подставив вместо c^2 и m^2 сейчас найденные выражения, получаем:

$$\frac{R^2 + a^2 - 2ap}{2R^2 + 2Rp - 2ap} = \frac{a^2}{R^2}$$

Делаем преобразования:

$$R^4 + a^2R^2 - 2apR^2 = 2a^2R^2 + 2a^2pR$$

$$R^3 + a^2R - 2apR = 2a^2R + 2a^2p$$

$$R^3 + a^2R = 2ap(a + R)$$

$$R(R^2 - a^2) = 2ap(a + R)$$

$$R(R - a) = 2ap$$

$$p = \frac{R(R - a)}{2a}.$$

Отсюда вытекает способ нахождения точки B борта биллиарда, куда должен быть направлен шар. Отрезок p можно, как видим, построить (или вычислить). Определив p, откладываем его от центра круга по диаметру, проведенному через точку M, и восставляем в точке N перпендикуляр до пересечения с окружностью, т. е. с бортом биллиарда. Точка пересечения и есть искомая точка B.

Установим, при каком условии задача имеет решение. Оно существует, очевидно, лишь в том случае, если отрезок p меньше радиуса, т. е.

$$\frac{R(R - a)}{2a} < R,$$

откуда легко найти, что

$$a > \frac{R}{3}$$

Значит, если шар отстоит от центра биллиарда менее, чем на ⅓ радиуса, задача не имеет решения: пустить шар требуемым образом невозможно.

Софи Жермен (1776–1831)

Софи Жермен (1776–1831) была совершенно необыкновенной женщиной своего времени. Она ни в чем не уступала «сильному полу», а по многим позициям далеко обгоняла своего среднего современника. Софи с детства влюбилась в математику и достигла в ней незаурядных успехов. Ее любимыми книгами были «История математики» Монтюкла и «Арифметические исследования» Гаусса. Первый автор был французским математиком и историком математики, а также членом Национального института (1795) и Берлинской академии наук (1755).

Второй автор Карл Фридрих Гаусс и вовсе был одним из величайших математиков от «сотворения мира», «королем всех математиков». Интересно отметить, что впоследствии Софи защитила Гаусса во время оккупации французами Геттингена, где тот жил. Написав письмо знакомому генералу, она уговорила его позаботиться о судьбе великого немца.

Представьте себе состояние бедных родителей, пришедших в ужас от совершенно не «женских» увлечений своего ребенка. Однако, надо отдать им должное. С течением времени, осознав, что увлечение математикой вполне серьезно, семья всю жизнь Софи помогала ей деньгами. И Софи имела возможность продолжать заниматься математикой. Постепенно она стала признанным специалистом своего дела. Софи вступила в переписку с такими выдающимися учеными своего времени, как Лагранж и обожаемый ею Гаусс, который впоследствии стал опекать талантливую женщину. Он помог ей консультациями в конкурсе Парижской академии наук, где Жермен была присуждена премия за исследования в области теории упругих колебаний. А перед этим, в 1808 г., Софи Жермен получила премию Академии наук за работу, в которой исследовала колебания тонких пластин.

В 1830 г. за год до смерти, Софи становится почетным доктором наук Геттингенского университета.

131. ПОКУПКА ШЛЯПЫ

Задача

Вы должны уплатить за купленную в магазине шляпу 19 руб. У вас одни лишь трехрублевки, у кассира – только пятирублевки. Можете ли вы, при наличии таких денег, расплатиться с кассиром и как именно?

Вопрос задачи сводится к тому, чтобы узнать, сколько должны вы дать кассиру трехрублевок, чтобы, получив сдачу пятирублевками, уплатить 19 рублей. Неизвестных в задаче два – число (x) трехрублевок и число (y) пятирублевок. Но можно составить только одно уравнение

$$3x - 5y = 19.$$

Хотя одно уравнение с двумя неизвестными имеет бесчисленное множество решений, это все же не значит, что задача наша неразрешима. Ведь вполне достаточно в данном случае найти хотя бы одно решение. Вот почему алгебра разработала метод решения подобных «неопределенных» уравнений. Заслуга введения их в алгебру принадлежит первому европейскому представителю этой науки, знаменитому математику древности Диофанту, отчего такие уравнения часто называют «диофантовыми».

Решение

На приведенном ранее примере покажем, как следует решать подобные уравнения.

Надо найти значения x и y в уравнении

$$3x - 5y = 19.$$

зная при этом, что x и y – числа целые и положительные (вспомним, что это – числа кредитных билетов).

Уединим то неизвестное, коэффициент которого меньше, т. е. член $3x$; получим:

$$3x = 19 + 5y,$$

откуда

$$x = \frac{19}{3} + \frac{5y}{3} = 6\frac{1}{3} + 1\frac{2}{3}y = 6 + y + \frac{1 + 2y}{3}.$$

Так как x, 6 и y – числа целые, то равенство может быть верно лишь при условии, что $\frac{1 + 2y}{3}$ есть также целое число. Обозначим его буквою t. Тогда

$$x = 6 + y + t$$

где

$$t = \frac{1 + 2y}{3},$$

и значит

$$3t = 1 + 2y; \quad 2y = 3t - 1.$$

Из последнего уравнения определяем y:

Так как y и t – числа целые, то и $\frac{t - 1}{2}$ должно быть некоторым целым числом t_1. Следовательно,

$$y = t + t_1$$

причем

$$t_1 = \frac{t - 1}{2}.$$

откуда

$$2t1 = t - 1 \quad \text{и} \quad t = 2t1 + 1.$$

Значение $t = 2t_1 + 1$ подставляем в предыдущие равенства:

$$y = t + t_1 = (2t_1 + 1) + t_1 = 3t_1 + 1;$$

$$x = 6 + y + t = 6 + (3t_1 + 1) + (2t_1 + 1) = 8 + 5t_1.$$

Итак, для x и y мы нашли выражения:

$$x = 8 + 5t_1,$$

$$y = 3t_1 + 1.$$

Числа x и y, мы знаем, не только целые, но и положительные, т. е. большие чем 0. Следовательно,

$$8 + 5t_1 > 0$$

$$3t_1 + 1 > 0$$

Из этих неравенств находим:

$$5t_1 > -8 \quad \text{и} \quad t_1 > -\frac{8}{5};$$

$$3t_1 > -1 \quad \text{и} \quad t_1 > -\frac{1}{3}.$$

Этим величина t_1 ограничивается; она больше чем $-\frac{1}{3}$ (и значит, подавно больше $-\frac{8}{5}$). Но так как t_1 число целое, то для него возможны лишь следующие значения:

$$t_1 = 0, 1, 2, 3, 4,...$$

Соответствующие значения для x и y таковы:

$$x = 8 + 5t_1 = 8, 13, 18, 23\ldots$$

$$y = 3t_1 + 1 = 1, 4, 7, 10\ldots$$

Теперь мы установили, как может быть произведена уплата:
вы либо платите 8 трехрублевок, получая одну пятирублевку сдачи:

$$8 \times 3 - 5 = 19,$$

либо платите 13 трехрублевок, получая сдачи 4 пятирублевки:

$$13 \times 3 - 4 \times 5 = 19$$

и т. д.

Теоретически задача имеет бесчисленный ряд решений, практически же число решений ограничено, так как ни у покупателя, ни у кассира нет бесчисленного множества кредитных билетов. Если, например, у каждого всего по 10 билетов, то расплата может быть произведена только одним способом: выдачей 8 трехрублевок и получением 5 рублей сдачи. Как видим, неопределенные уравнения практически могут давать вполне определенные пары решений.

Возвращаясь к нашей задаче, предлагаем читателю, в качестве упражнения, самостоятельно решить ее вариант, а именно, – рассмотреть случай, когда у покупателя только пятирублевки, а у кассира только трехрублевки. В результате получите такой ряд решений:

$$x = 5, 8, 11\ldots$$

$$y = 2, 7, 12\ldots$$

Действительно:

$$5 \times 5 - 2 \times 3 = 19$$

$$8 \times 5 - 7 \times 3 = 19$$

$$11 \times 5 - 12 \times 3 = 19.$$

Мы могли бы получить эти результаты также и из готового уже решения основной задачи, воспользовавшись простым алгебраическим приемом. Так как давать пятирублевки и получать трехрублевки все равно, что «получать отрицательные пятирублевки» и «давать отрицательные трехрублевки», то новый вариант задачи решается тем же уравнением, которое мы составили для основной задачи:

$$3x - 5y = 19$$

при условии, что x и y – числа отрицательные. Поэтому из равенств

$$x = 8 + 5t_1$$

$$y = 3t_1 + 1$$

мы, зная, что $x < 0$ и $y < 0$, выводим:

$$8 + 5t_1 < 0$$

$$3t_1 + 1 < 0$$

и, следовательно,

$$t_1 < -\frac{8}{5}.$$

Принимая $t_1 = -2, -3, -4$ и т. д., получаем из предыдущих формул следующие значения для x и y:

$t_1 = -2$	-3	-4
$x = -2$	-7	-12
$y = -5$	-8	-11

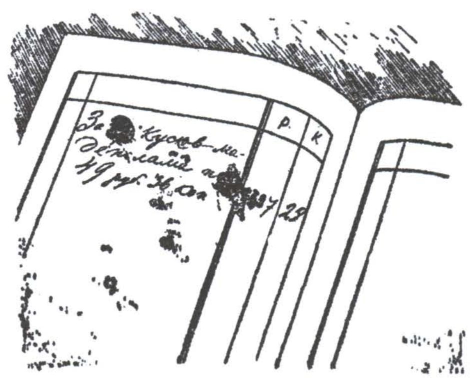
Первая пара решений, $x = -2$, $y = -5$, означает, что покупатель «платит минус 2 трехрублевки» и «получает минус 5 пятирублевок», т. е. в переводе на обычный язык – платит 5 пятирублевок и получает сдачи 2 трехрублевки. Подобным же образом истолковываем и прочие решения.

132. РЕВИЗИЯ КООПЕРАТИВА

Задача

При ревизии торговых книг кооператива одна из записей оказалась залитой чернилами и имела такой вид (рис. 13):

За . . . . . кусков мадеполама [1]
*по 49 р. 36 к. кусок . . . . *** 7 р. 28 к.*



Невозможно было разобрать число проданных кусков, но было несомненно, что число это не дробное; в вырученной сумме можно было различить только последние три цифры, да установить еще, что перед ними были три каких-то других цифры.

Может ли ревизионная комиссия по этим следам установить запись?

Решение

Обозначим число кусков через x. Вырученная сумма выразится в копейках через

$$4\,936\,x.$$

[1] Мадаполам – сорт хлопчатобумажной ткани (прим. ред.).

Число, выражаемое тремя залитыми цифрами в записи денежной суммы, обозначим через y. Это, очевидно, число тысяч копеек, а вся сумма в копейках изобразится так:

$$1\,000y + 728.$$

Имеем уравнение:

$$4\,936x = 1\,000y + 728,$$

или, после сокращения на 8,

$$617x - 125y = 91.$$

В этом уравнении x и y – числа целые, и притом y не больше 999, так как более чем из трех цифр оно состоять не может. Решаем уравнение, как раньше было указано:

$$125y = 617x - 91$$

$$y = 5x - 1 + \frac{34 - 8x}{125} = 5x - 1 + \frac{2\,(17 - 4x)}{125} =$$

$$= 5x - 1 + 2t.$$

(Здесь мы приняли $\frac{617}{125} = 5 - \frac{8}{125}$, так как нам выгодно иметь возможно меньшие остатки.)

Дробь $$\frac{2\,(17 - 4x)}{125}$$
где есть целое число, а так как 2 не делится на 125, то $\frac{17 - 4x}{125}$ должно быть целым числом, которое мы и обозначили через t.

Далее из уравнения

$$\frac{17 - 4x}{125} = t$$

имеем

$$x = 4 - 31t + \frac{1 - t}{4} = 4 - 31t + t_1 \quad ,$$

где

$$t_1 = \frac{1 - t}{4},$$

и, следовательно,

$$4t_1 = 1 - t; \quad t = 1 - 4t_1$$
$$x = 125t_1 - 27, \quad y = 617t_1 - 134\text{[1]}.$$

Мы знаем, что

$$100 \le y < 1000.$$

Следовательно,

$$100 \le (617t_1 - 134) < 1000,$$

откуда

$$t_1 \ge \frac{234}{617} \quad \text{и} \quad t_1 \ge \frac{1\,134}{617}$$

или

$$0{,}4 < t_1 < 1{,}8.$$

[1] Обратите внимание на то, что коэффициенты при t_1 равны коэффициентам при x и y в исходном уравнении $617x - 125y = 91$, причем у одного из коэффициентов при t_1 знак обратный. Это не случайность: можно доказать, что так должно быть всегда.

Очевидно, для t_1 существует только одно целое значение:

$$t_1 = 1,$$

и тогда $x = 98$, $y = 483$: было отпущено 98 кусков на сумму 4 837 р. 28 к. Запись восстановлена.

133. ПОКУПКА ПОЧТОВЫХ МАРОК

Задача

Требуется на 1 рубль купить 20 штук почтовых марок – 15-копеечных, 5-копеечных и копеечных. Сколько окажется марок каждого достоинства?

Решение

В этом случае у нас имеется два уравнения с тремя неизвестными

$$15x + 5y + z = 100$$
$$x + y + z = 20,$$

где x – число марок 15-копеечных, y – пятикопеечных, z – копеечных. Вычтя из первого уравнения второе, получим одно уравнение с двумя неизвестными

$$14x + 4y = 80.$$

Делим все члены на 4:

$$7 \times \frac{x}{2} + y = 20.$$

Очевидно $\frac{x}{2}$ число целое. Обозначим его через t.

Имеем $$7t + y = 20;$$
$$y = 20 - 7t, \quad x = 2t.$$

Подставляем выражения для x и y во второе из исходных уравнений:

$$2t + 20 - 7t + z = 20;$$

имеем $$z = 5t.$$

Так как $x > 0$, $y > 0$ и $z > 0$, то нетрудно установить границы для t

$$0 < t < 2\frac{6}{7},$$

откуда заключаем, что для t возможны только два целых значения

$$t = 1 \text{ и } t = 2,$$

Соответствующие значения x, y, z таковы:

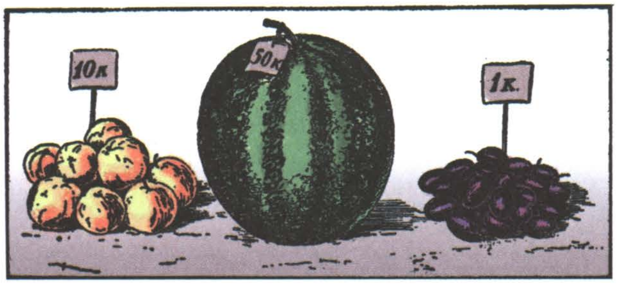
$t =$	1	2
$x =$	2	4
$y =$	13	6
$z =$	5	10

Проверка

$$2 \times 15 + 13 \times 5 + 5 = 100$$
$$4 \times 15 + 6 \times 5 + 10 = 100$$

Итак, покупка марок может быть произведена только двумя способами.

Следующая задача в том же роде.



134. ПОКУПКА ФРУКТОВ

Задача

На 5 руб. куплено 100 штук разных фруктов. Цены на фрукты в кооперативе таковы:

арбузы, штука .... 50 к.
яблоки « .... 10 «
сливы « .... 1 «

Сколько фруктов каждого рода было куплено?

Решение

Обозначив число арбузов через x, яблок через y и слив через z, составляем два уравнения:

$$\begin{cases} 50x + 10y + z = 500 \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

Вычтя из первого второе, имеем

$$49x + 9y = 400.$$

Дальнейший ход решения таков:

$$y = \frac{400 - 49x}{9} = 44 - 5x + \frac{4(1 - x)}{9} = 44 - 5x + 4t;$$

$$t = \frac{1 - x}{9}; \quad x = 1 - 9t;$$

$$y = 44 - 5(1 - 9t) + 4t = 39 + 49t.$$

Из неравенств

$$1 - 9t > 0 \quad \text{и} \quad 39 + 49t > 0$$

устанавливаем, что

$$\frac{1}{9} > t > -\frac{39}{49}$$

и, следовательно, $t = 0$. Поэтому

$$x = 1, \quad y = 39.$$

Подставив эти значения x и y во второе уравнение, определяем $z = 60$.

Итак, куплен был 1 арбуз, 39 яблок и 60 слив. Других комбинаций быть не может.

135. ОТГАДАТЬ ДЕНЬ РОЖДЕНИЯ

Задача

Уменье решать неопределенные уравнения дает возможность выполнить следующий математический фокус.

Вы предлагаете товарищу умножить число даты его рождения на 12, а номер месяца – на 31. Он сообщает вам сумму обоих произведений, и вы вычисляете по ней дату рождения.

Если, например, товарищ ваш родился 9 февраля, то он выполняет следующие выкладки:

$$9 \times 12 = 108 \qquad 2 \times 31 = 62$$

$$108 + 62 = 170.$$

Это последнее число, 170, он сообщает вам, и вы определяете задуманную дату. Как?

Решение

Задача сводится к решению неопределенного уравнения

$$12x + 31y = 170$$

в целых и положительных числах, причем число месяца x не больше 31, а номер месяца y не больше 12. Решаем:

$$6x + 31 \times \frac{y}{2} = 85$$

$$6x + 31t = 85, \quad y = 2t,$$

$$x = \frac{85 - 31t}{6} = 14 - 5t + \frac{1 - t}{6} = 14 - 5t + t_1$$

Зная, что $31 \geq x > 0$ и $12 \geq y > 0$, находим границы для t_1:

$$-\frac{5}{6} \leq t_1 \leq \frac{22}{31}$$

Следовательно,

$$t_1 = 0; \quad x = 9; \quad y = 2.$$

Дата рождения 9-е число второго месяца, т. е. 9 февраля. Теоретически можно доказать, что какая бы дата ни отгадывалась, уравнение имеет всегда только одно решение, т. е. фокус удается без отказа.

136. ПРОДАЖА КУР

Старинная задача

Три сестры пришли на рынок с курами. Одна принесла для продажи 10 кур, другая 16, третья 26. До полудня они продали часть своих кур по одной и той же цене. После полудня, опасаясь, что не все куры будут проданы, они понизили цену и распродали оставшихся кур снова по одинаковой цене. Домой все трое вернулись с одинаковой выручкой: каждая сестра получила от продажи 35 рублей.

По какой цене продавали они кур до и после полудня?

Решение

Обозначим число кур, проданных каждой сестрой до полудня, через x, y, z. Во вторую половину дня они продали $10 - x$, $16 - y$, $26 - z$. Цену до полудня обозначим через m, после полудня – через n. Для ясности сопоставим эти обозначения:

	Число кур			Цена
До полудня	x	y	z	m
После полудня ..	$10 - x$	$16 - y$	$26 - z$	n

Первая сестра выручила: $mx + n\,(10 - x)$; следовательно, $mx + n\,(10 - x) = 35$,

вторая –

$my + n\,(16 - y)$; следовательно, $my + n\,(16 - y) = 35$,

третья –

$mz + n\,(26 - z)$; следовательно, $mz + n\,(26 - z) = 35$.

Преобразуем эти три уравнения; получаем:

$$\begin{cases} (m-n)\,x + 10n = 35 \\ (m-n)\,y + 16n = 35 \\ (m-n)\,z + 26n = 35. \end{cases}$$

Вычтя из третьего уравнения первое, затем второе, получим последовательно

$$\begin{cases} (m-n)\,(z-x) + 16n = 0 \\ (m-n)\,(z-y) + 10n = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (m-n)\,(x-z) = 16n \\ (m-n)\,(y-z) = 10n. \end{cases}$$

Делим первое из этих уравнений на второе:

Так как x, y, z – числа целые, то и разности $x - z$, $y - z$ тоже целые числа. Поэтому для существования равенства

$$\frac{x-z}{8} = \frac{y-z}{5}$$

необходимо, чтобы $x - z$ делилось на 8, а $y - z$ на 5. Следовательно

откуда

$$x = z + 8t$$
$$y = z + 5t$$

Так как $x < 10$, то

$$z + 8t < 10.$$

При целых и положительных z и t последнее неравенство удовлетворяется только в одном случае: когда $z = 1$, и $t = 1$. Подставив эти значения в уравнения

$$x = z + 8t \quad \text{и} \quad y = z + 5t,$$

находим $x = 9$, $y = 6$.

Теперь, обращаясь к уравнениям

$$mx + n\,(10 - x) = 35,$$
$$my + n\,(16 - y) = 35,$$
$$mz + n\,(26 - z) = 35$$

и подставив в них значения x, y, z, узнаем цены, по каким продавались куры

$$m = 3\tfrac{3}{4}\ \text{руб.}; \quad n = 1\tfrac{1}{4}\ \text{руб.}$$

Итак, куры продавались до полудня по 3 руб. 75 коп., после полудня по 1 руб. 25 коп.

137. ДВА ЧИСЛА И ЧЕТЫРЕ ДЕЙСТВИЯ

Задача

Предыдущую задачу, которая привела к трем уравнениям с пятью неизвестными, мы решили не по общему образцу, а по свободному математическому соображению. Точно так же будем решать и следующие задачи, приводящие к неопределенным уравнениям второй степени.

Вот первая из них.

Над двумя целыми числами сделаны были следующие 4 действия:

1) их сложили;
2) вычли из большего меньшее;
3) перемножили;
4) разделили большее на меньшее.

Полученные результаты сложили – составилось 243. Найти эти числа.

Решение

Если большее число x, меньшее y, то

$$x + y + x - y + xy + \frac{x}{y} = 243.$$

Делаем следующие преобразования:

$$2x + xy + \frac{x}{y} = 243$$
$$2xy + xy^2 + x = 234\,y$$
$$x\,(2y + y^2 + 1) = 234y.$$

Но $(2y + y^2 + 1) = (y + 1)^2$. Поэтому

$$x = \frac{243y}{(y+1)^2}.$$

Чтобы x было целое число, знаменатель $(y + 1)^2$ должен быть одним из делителей числа 243 (потому что y не может делиться на $y + 1$). Зная, что $243 = 3 \times 9^2 = 27 \times 3^2$, заключаем, что $(y + 1)^2 = 9^2$ или 3^2, а $y = 8$ или 2.

Тогда

$$x = \frac{243 \times 8}{81}, \quad \text{или} \quad \frac{243 \times 2}{9}$$

Итак, искомые числа – 24 и 8 или 52 и 2.

138. КАКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНИК?

Задача

Стороны прямоугольника выражаются целыми числами. Какой длины должны они быть, чтобы сумма их численно равнялась площади прямоугольника?

Решение

Обозначив стороны прямоугольника через x и y, составляем уравнение

$$2x + 2y = xy$$

Преобразуем его:

$$x\,(y - 2) = 2y$$

$$x = \frac{2y}{y-2} = \frac{2}{1 - \frac{2}{y}}$$

Чтобы x было числом положительным, необходимо иметь

$$1 - \frac{2}{y} > 0 \quad \text{и, следовательно,} \quad y > 2.$$

Итак, y должно быть больше 2. Это условие необходимо, чтобы x было положительным, но еще недостаточно. Заметим, что

$$x = \frac{2y}{y-2} = \frac{2(y-2)+4}{y-2} = 2 + \frac{4}{y-2}$$

Так как x должно быть целым числом, то и выражение $\frac{4}{y-2}$ должно быть целым числом. Но при $y > 2$ это возможно лишь, если $y = 3$, 4 или 6. Соответствующие значения x будут 6, 4, 3.

Итак, искомая фигура есть либо прямоугольник со сторонами 3 и 6, либо квадрат со сторонами 4.

139. ДВА ДВУЗНАЧНЫХ ЧИСЛА

Задача

Числа 46 и 96 обладают любопытной особенностью: их произведение не меняет своей величины, если переставить их цифры.

Действительно,

$$46 \times 96 = 4416 = 64 \times 69.$$

Требуется установить, существуют ли еще другие пары двузначных чисел с тем же свойством. Как разыскать их все?

Решение

Обозначив цифры искомых чисел через x и y, z и t, составляем уравнение

$$(10x + y)(10z + t) = (10y + x)(10t + z).$$

Раскрыв скобки, получаем после упрощений

$$xz = yt,$$

где x, z, y, t – целые числа, меньшие 10. Для разыскания решений составляем из 9 цифр все пары с равными произведениями

$$1 \times 4 = 2 \times 2 \qquad 2 \times 8 = 4 \times 4$$
$$1 \times 6 = 2 \times 3 \qquad 2 \times 9 = 3 \times 6$$
$$1 \times 8 = 4 \times 2 \qquad 3 \times 8 = 4 \times 6$$
$$1 \times 9 = 3 \times 3 \qquad 4 \times 9 = 6 \times 6$$
$$2 \times 6 = 3 \times 4$$

Всех равенств 9. Из каждого можно составить одну или две искомых группы чисел. Например, из равенства $1 \times 4 = 2 \times 2$ составляем одно решение:

$$12 \times 42 = 21 \times 24.$$

Из равенства $1 \times 6 = 2 \times 3$ находим два решения:

$$12 \times 63 = 21 \times 36; \quad 13 \times 62 = 31 \times 26.$$

Таким образом разыскиваем следующие 14 решений:

$$12 \times 42 = 21 \times 24 \qquad 23 \times 96 = 32 \times 69$$
$$12 \times 63 = 21 \times 36 \qquad 24 \times 63 = 42 \times 36$$
$$12 \times 84 = 21 \times 48 \qquad 24 \times 84 = 42 \times 48$$
$$13 \times 62 = 31 \times 26 \qquad 26 \times 93 = 62 \times 39$$
$$13 \times 93 = 31 \times 39 \qquad 34 \times 86 = 43 \times 68$$
$$14 \times 82 = 41 \times 28 \qquad 36 \times 84 = 63 \times 48$$
$$23 \times 64 = 32 \times 46 \qquad 46 \times 96 = 64 \times 69$$

140. ОБМЕН ЧАСОВЫХ СТРЕЛОК

Задача

Биограф и друг знаменитого физика А. Эйнштейна, небезызвестный математик А. Мошковский[1], желая однажды развлечь своего приятеля во время болезни, предложил ему задачу, относящуюся к рассматриваемому нами отделу алгебры (рис. 14).

«Возьмем, – сказал Мошковский, – положение стрелок в 12 часов. Если бы в этом положении большая и малая стрелки обменялись местами, они дали бы все же правильные показания. Но в другие моменты, – например, в 6 часов, взаимный обмен стрелок привел бы к абсурду, к положению, какого на правильно идущих часах быть не может: минутная стрелка не может стоять на 6, когда часовая показывает 12. Возникает вопрос:

Когда и как часто стрелки часов занимают такие положения, что замена одна другой дает новое положение, тоже возможное на правильных часах?

– Да, – ответил Эйнштейн, – это вполне подходящая задача для человека, вынужденного из-за болезни оставаться в постели: достаточно интересная и не слишком легкая. Боюсь только, что развлечение продлится недолго: я уже напал на путь к решению.

И приподнявшись на постели, он несколькими штрихами набросал на бумаге схему, изображающую условия задачи. Для решения ему понадобилось не больше времени, чем мне на формулировку задачи. Получилось неопределенное уравнение, которое он решил в целых числах».

Как же решается эта задача?

Решение

Будем измерять расстояния стрелок по кругу циферблата от точки, где цифра 12, в 60-х долях окружности.

Так как минутная стрелка обходит полный круг в час, а часовая успевает в то же время пройти только $^1/_{12}$ часть круга, то каждое деление, составляющее $^1/_{60}$ круга, минутная стрелка проходит в 1 минуту, а часовая – в 12 минут.

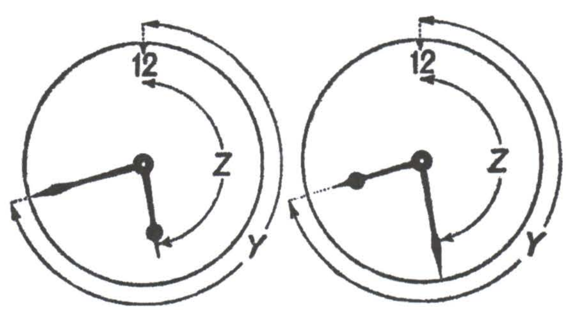


Рис. 14.

Пусть одно из требуемых положений стрелок наблюдалось в x часов y минут (рис. 14). Минутная стрелка находится от цифры 12 в y делениях, часовая – на некотором расстоянии в z делений. Установим зависимость между x, y и z. Так как от 12 прошло x часов,

[1] Александр Мошковский (1851-1934) немецко–польский писатель, издатель, популяризатор науки (прим. ред.).

то минутная стрелка сделала x полных оборотов и еще y делений, т. е. в итоге продвинулась на $60x + y$ делений. Часовая стрелка, движущаяся в 12 раз медленнее, прошла 12-ю долю от $60x + y$, значит ее расстояние (z делений) от цифры 12 составляет

$$z = \frac{60x + y}{12}$$

Когда стрелки обменяются местами, часы будут показывать новое число x_1 часов и z минут, причем часовая стрелка будет отстоять от цифры 12 на y делений. Это расстояние y должно равняться

$$y = \frac{60x_1 + z}{12}$$

Имеем систему двух уравнений с 4 неизвестными

$$\begin{cases} z = \dfrac{60x + y}{12} \\ y = \dfrac{60x_1 + z}{12} \end{cases}$$

в которых x и x_1 целые числа от 0 до 11[1]. Чтобы найти эти значения неизвестных, выразим z и y через x и x_1 Получим

$$y = \frac{60(x + 12x_1)}{143}$$

$$z = \frac{60(x_1 + 12x)}{143}$$

В этих двух выражениях x и x_1 целые числа часов; они могут меняться от 0 до 11.

$$x = 0, 1, 2, 3, \ldots 11$$
$$x_1 = 0, 1, 2, 3, \ldots 11.$$

Давая x и x_1 эти значения, мы определим все требуемые моменты. Так как каждое из 12 значений x можно сопоставлять с каждым из 12 значений x_1, то, казалось бы, что число всех решений равно $12 \times 12 = 144$. Но в действительности оно равно 143, потому что при $x = 0$, $x_1 = 0$ и при $x = 11$, $x_1 = 11$ получается, одно и то же положение стрелок.

При $x = 0$, $x_1 = 0$ имеем

$$z = 0, y = 0,$$

т. е. часы показывают 12.

Всех возможных положений мы рассматривать не станем; возьмем лишь два примера.

$$x = 1, \qquad x_1 = 1,$$

$$y = \frac{60 \times 13}{143} = 5\,\frac{5}{11};$$

$$z = 5\,\frac{5}{11},$$

т. е. часы показывают 1 ч. $5\,{}^5/_{11}$ мин., и притом стрелки встречаются; их положение, конечно, может быть обменено (как и при всех других встречах стрелок).

[1] Значения $x = 12$, $x_1 = 12$ практически равнозначащие $x = 0$, $x_1 = 0$.

Второй пример:

$$x = 5, \qquad x_1 = 8,$$

$$y = \frac{60\,(5 + 12 \times 8)}{143} = 42{,}3$$

$$z = \frac{60\,(8 + 12 \times 5)}{143} = 28{,}5$$

Соответствующие моменты: 5 ч. 42,3 мин. и 8 ч. 28,5 мин.

Число решений, мы знаем, 143. Чтобы найти все точки циферблата, которые дают требуемые положения стрелок, надо окружность циферблата разделить на 143 равные части: получим 143 точки, являющиеся искомыми. В промежуточных точках требуемые положения стрелок невозможны.

Первоначальным автором этой задачи является известный французский математик Ш. Лезан[1], прославившийся у нас талантливой книжкой «Начатки математики». Задача была опубликована им во французском «Журнале элементарной математики» в 1882 г.

141. СТО ТЫСЯЧ ЗА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Одна задача из области неопределенных уравнений приобрела в последние десятилетия громкую известность, так как за правильное ее решение завещано целое состояние: 100 000 немецких марок!

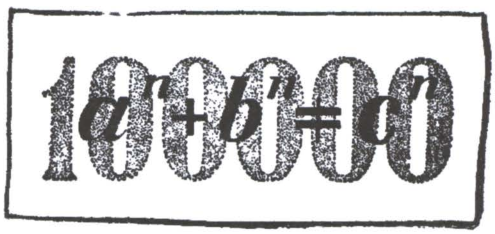


Рис. 15.

Задача состоит в том, чтобы доказать следующее положение, носящее название теоремы, или «великого предложения», Ферма:

> сумма одинаковых степеней двух целых чисел не может быть тою же степенью какого-либо третьего числа. Исключение составляет лишь вторая степень, для которой это возможно.

Иначе говоря, надо доказать, что уравнение

$$x^n + y^n = z^n$$

неразрешимо в целых числах для $n > 2$ (рис. 15).

Поясним сказанное. Довольно легко подобрать, сколько угодно пар чисел, сумма вторых степеней которых также есть вторая степень. Простейший при-

[1] Лезан Шарль Анж (1841-1920) французский математик (прим. ред.).

мер: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Но попробуйте составить аналогичный пример для третьих степеней: ваши поиски останутся тщетными [1].

Тот же неуспех ожидает вас и при подыскании примеров для четвертой, пятой, шестой и т. д. степеней. Это и утверждает «великое предложение Ферма».

Что же требуется от соискателей премии? Они должны доказать это положение. Дело в том, что теорема Ферма еще не доказана и висит, так сказать, в воздухе.

Прошло свыше двух столетий с тех пор, как она высказана, но математикам не удалось до сих пор найти ее доказательства. Величайшие математики трудились над этой проблемой, – однако, в лучшем случае им удавалось доказать теорему лишь для того или иного отдельного показателя или для групп показателей, – необходимо же найти общее доказательство для всякого целого показателя.

Замечательно, что неуловимое доказательство теоремы Ферма, по-видимому, однажды уже было найдено, но затем вновь утрачено. Автор теоремы, гениальный математик XVII в. Пьер Ферма[2], утверждал, что ее доказательство ему известно. Свое «великое предложение» он записал (как и ряд других теорем из теории чисел) в виде заметки на полях сочинения Диофанта, сопроводив его такой припиской:

«Я нашел поистине удивительное доказательство этого предложения, но здесь мало места, чтобы его привести».

Ни в бумагах великого математика, ни в его дружеской переписке, нигде вообще в другом месте следов этого доказательства найти не удалось.

Последователям Ферма пришлось идти самостоятельным путем. Вот результаты этих усилий: Эйлер (в 1770 г.) доказал теорему Ферма для третьей степени; для пятой степени [3] ее доказал Лежандр (в 1825 г.), для седьмой – Ламе и Лебег (1839). В 1849 г. Куммер доказал теорему для обширной группы степеней и между прочим – для всех показателей меньше ста. Эти последние работы далеко выходят за пределы той области математики, какая знакома была Ферма, и становится загадочным, как мог последний разыскать общее доказательство своего «великого предложения» [4].

[1] Любопытно, однако, что сумма кубов трех целых чисел может быть кубом четвертого целого числа, как, например, в ряду следующих четырех чисел:

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3.$$

[2] Ферма (1603–1665) не был профессионалом-математиком. Юрист по образованию, советник парламента, он занимался математическими изысканиями лишь между делом. Это не помешало ему сделать ряд чрезвычайно важных открытий, которых он, впрочем, не публиковал, а по обычаю той эпохи сообщал в письмах к своим ученым друзьям: к Паскалю, Декарту, Гюйгенсу, Робервалю и др.

[3] Для составных показателей особого доказательства не требуется: эти случаи сводятся к случаям с первоначальными показателями.

[4] Теорема Ферма доказана в 1994 году Эндрю Уайлсом (прим. ред.).

Завещание, сделавшее теорему Ферма столь популярной, оставлено в 1907 году на имя геттингенской академии наук. Вот текст соответствующего объявления этой академии, опубликованного 27 июня 1908 г.

«Согласно завещанию, оставленному на наше имя покойным доктором Павлом Вольфскелем [5] в Дармштадте, объявляется премия в 100 000 марок тому, кому раньше всех удастся найти доказательство «великой теоремы Ферма». Д-р Вольфскель обращает внимание на то, что Ферма высказал утверждение, что уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет целых решений для всех нечетных простых показателей. Теорема Ферма должна быть доказана либо в самой общей форме, либо в форме дополнения к исследованиям Куммера, – но во всяком случае для всех показателей n, для которых теорема вообще имеет место.

Премия учреждается на следующих условиях:

Геттингенской академии наук принадлежит право свободно решить, кому должна быть присуждена премия. Никаких рукописей, имеющих отношение к соисканию премии, она не принимает; она рассматривает только такие математические сочинения, которые появились в журналах или выпущены отдельными книгами, имеющимися в продаже. Академия предлагает авторам подобных сочинений прислать ей 5 печатных экземпляров.

Академия слагает с себя ответственность за нерассмотрение работ, о которых она не была осведомлена, а также за недоразумения, могущие возникнуть из-за того, что истинный автор работы (или части ее) остался академии неизвестным.

Присуждение премии последует не ранее двух лет с момента появления сочинения, достойного премии. В течение этого срока все германские и иные математики могут высказаться по поводу правильности предложенного решения.

Акт о присуждении премии не может быть оспариваем. Если к 13 сентября 2007 года премия не будет присуждена, то никаких притязаний на нее предъявлено быть не может».

К объявлению геттингенской академии, которое приведено здесь с несущественными пропусками, интересно присоединить замечания, сделанные по этому поводу знаменитым германским математиком Ф. Клейном, ныне умершим: «Со времени первого опубликования завещания Вольфскеля в геттингенскую академию поступило уже несколько сот так называемых «доказательств» теоремы Ферма, и надо думать, что после официального объявления о премии число их значительно возрастет. При этом число подлинных математиков, участвующих в соискании, весьма незначительно. Большая часть решений поступает от инженеров, учащихся, учителей и т. д. И ни один из соискателей не вступил на путь исследований, основанных на теории чисел, – путь, который во всяком случае имел в виду завещатель. Очевидно, желание овладеть 100 000 марок гораздо более распространено, чем интерес к глубоким соотношениям в области современной математики.

При таком положении дела, очевидно, невозможно и даже бесполезно для академии вступать в переписку

[5] Пауль Вольфскель (1856-1906) немецкий промышленник (прим. ред.).

с отдельными соискателями по поводу ошибочности их доказательств. Академия выступит только тогда, когда ей будет доставлено правильное доказательство. Пока же она молчит, до сих пор, следовательно, правильное решение еще не предложено».

Какие ошибки возможны в поисках этого неуловимого доказательства, показывает случай с выдающимся немецким математиком Ф. Линдеманом.

В 1909 году он выпустил сочинение, в котором предложены были им два доказательства теоремы Ферма. Его готовы были уже считать лауреатом премии, как выяснилось, что в ход его выкладок вкрались ошибки: в одном месте – ошибочная подстановка, в другом – простая описка (показатель 6, вместо 5). Ошибки были обнаружены одним из русских математиков.

Необычайный в науке трюк выкинули немецкие математики Дюринги – отец и сын. Незадолго до империалистической войны они печатно объявили, что доказательство теоремы Ферма ими найдено, но... они не желают его оглашать. Излишне добавлять, что подобные заявления никем не могут быть приняты серьезно.

Как бы то ни было, премия до сих пор никому не присуждена; только из процентов, наросших на завещанный капитал, была выдана некоторая сумма двум математикам за их работы, относящиеся к рассматриваемой проблеме.

Впрочем, завещатель, очевидно, и не ожидал быстрого разрешения поставленной задачи: завещание предусматривает столетний срок существования премии [1].

Среди читателей «Занимательной алгебры» нашлось немало таких, которые пытались разрешить задачу Ферма. К сожалению, они лишь увеличили и без того богатую коллекцию неправильных доказательств «великого предложения». Наиболее распространенная ошибка состояла в следующем: равенство $x^n + y^n = z^n$ преобразовывалось в такое, одна часть которого алгебраически разлагается на множители, содержащиеся в другой части. Насколько такой прием недоказателен, видно хотя бы из того, что, пользуясь им, легко «доказать» невозможность существования пифагоровых чисел, т. е. доказать неразрешимость в целых числах уравнения

$$x^2 + y^2 = z^2$$

В самом деле: представив его в виде

$$x^2 - z^2 = -y^2,$$

видим, что левая часть равенства делится на $x + z$ и на $x - z$, в то время как правая не делится на эти выражения. Но разве отсюда следует неразрешимость в целых числах уравнения $x^2 + y^2 = z^2$? Ряд примеров, приведенных на стр. 88, служит ответом на этот вопрос.

В заключение небезынтересно отметить, что уравнение

$$x^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{1}{n}} = z^{\frac{1}{n}}$$

легко разрешается в целых и положительных числах для всякого целого n. Возьмем для примера $n = 5$. Тогда понадобится найти корни уравнения:

$$x^{\frac{1}{5}} + y^{\frac{1}{5}} = z^{\frac{1}{5}} \quad \text{, или} \quad \sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y} = \sqrt[5]{z} \ ;$$

выбрав для x и y пятые степени любых чисел, например, приравняв $x = 2^5$, $y = 3^5$, получаем для $\sqrt[5]{z}$ значение $\sqrt[5]{2^5} + \sqrt[5]{3^5} = 5$; откуда $z = 5^5$. Уравнение превращается в тождество:

$$32^{\frac{1}{5}} + 243^{\frac{1}{5}} = 3125^{\frac{1}{5}}.$$

Интересующимся историей и современным состоянием задачи Ферма можно рекомендовать брошюру А. Я. Хинчина «Великая теорема Ферма». Написанная специалистом брошюра эта предполагает у читателя лишь элементарные знания из математики.

[1] В настоящее, время в связи с послевоенной инфляцией марки, премия Вольфскеля потеряла свою ценность.

Александр Мошковский (1851–1934)

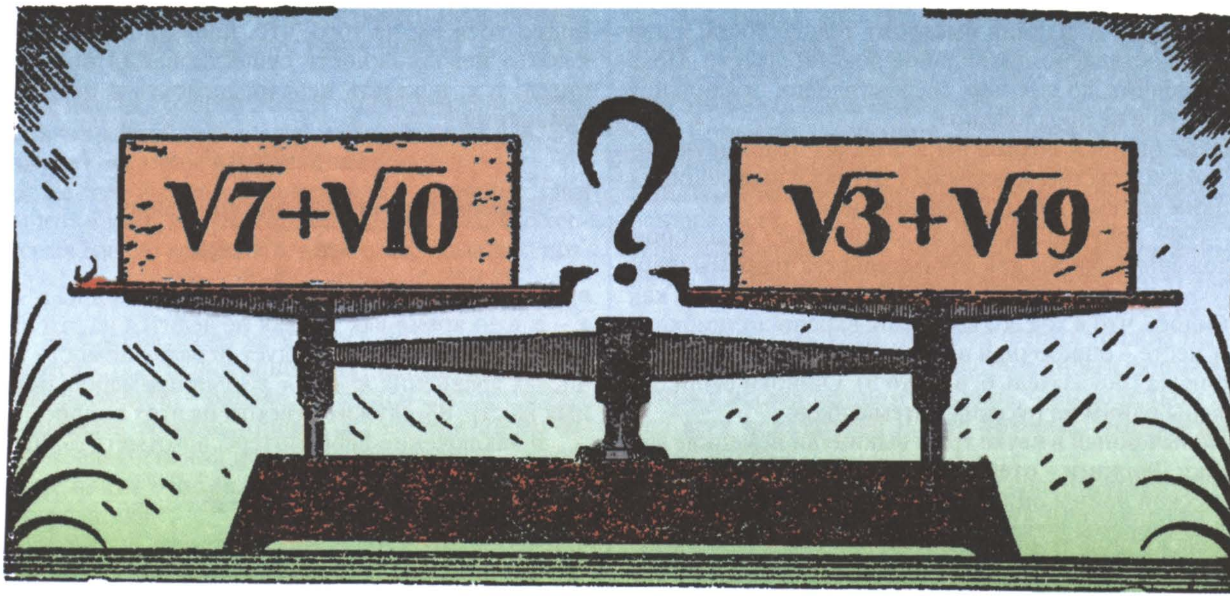
Александр Мошковский (1851–1934) — немецкий писатель, журналист, издатель и популяризатор науки.

Он стал известен благодаря своим литературным талантам. Получив хорошее образование, юный писатель отправился из родного Бреслау на поиски счастья в Берлин, где основал собственное дело – юмористический журнал «Веселые страницы».

Со временем Александр стал известным человеком в немецкой столице. Он дружил со многими выдающимися учеными, литераторами и музыкантами. Среди них особое место заняла дружба с физиком Альбертом Эйнштейном, с которым он проводил долгие часы в беседах на научные темы. В результате этого общения появилась на свет замечательная книга Мошковского, которая довольно популярна и в настоящее время. Эта книга называется «Эйнштейн. Взгляд на мир его мыслей». В ней писатель пытается показать миру богатый внутренний мир великого Эйнштейна, его совершенно особый склад ума.

Кроме этого Мошковский писал сатиру и юмор, ставил свои собственные пьесы, которые имели определенный успех у публики. И даже изобрел свой собственный вид юмористической рецензии на различные события в музыкальной жизни Берлина.

Особое место в творчестве Александра Мошковского занимает научно-фантастическая повесть «Острова мудрости» («Die Inseln der Weisheit»). Написанная явно не без влияния идей Дж.Свифта и его Гулливера, она предсказывает будущее настолько точно, что вызывает восхищение острым умом и проницательностью автора. В этой повести писатель описывает картины будущего Земли, где победило высокоразвитое и высокотехнологичное общество. Он показывает повсеместное применение автоматизации, мобильную связь: телефоны, факсы, развитие информационных технологий. В числе технических новинок Мошковский описал даже голографию.



142. ШЕСТОЕ ДЕЙСТВИЕ

Сложение и умножение имеют по одному обратному действию, которое называется вычитанием и делением. Пятое математическое действие – возвышение в степень – имеет два обратных: разыскание основания и разыскание показателя. Разыскание основания есть шестое математическое действие и называется извлечением корня. Нахождение показателя – седьмое действие – называется логарифмированием. Причину того, что возвышение в степень имеет два обратных действия, в то время как сложение и умножение – только по одному, понять нетрудно: разыскание каждого из чисел, участвующего в сложении и умножении, производится одинаковыми приемами, но разыскание основания степени и ее показателя выполняется совершенно различным образом.

Шестое действие, извлечение корня, обозначается знаком √ . Не все знают, что это – видоизменение латинской буквы *r* начальной в слове, означающем «корень». Было время (XVI в.), когда знаком корня служила не строчная, а прописная буква *R*, а рядом с ней ставилась первая буква латинских слов «квадратный» (*q*) или кубический (*c*), чтобы указать, какой именно корень требуется извлечь [1]. Например, писали

R.q. 4352

вместо нынешнего обозначения

$$\sqrt{4\,352}$$

Если прибавить к этому, что в ту эпоху еще не вошли в общее употребление нынешние знаки для плюса и минуса, а вместо них писали буквы ***p.*** и ***m.***, и что наши скобки заменяли знаками └ ┘, то станет ясно, какой необычный для современного глаза вид должны были иметь тогда алгебраические выражения.

Вот пример из книги старинного математика Бомбелли (1572 г.)

R.c. └***R.q.*** 4 352 ***p.*** 16┘ ***m. R. c.***└***R. q.*** 4 352 ***m.*** 16┘ .

Мы написали бы то же самое иными знаками:

$$\sqrt[3]{\sqrt{4\,352}+16}-\sqrt[3]{\sqrt{4\,352}-16}.$$

Кроме обозначения $\sqrt[n]{a}$, теперь употребляется для того же действия еще и другое, $a^{\frac{1}{n}}$, весьма удобное в смысле обобщения: оно наглядно подчеркивает, что каждый корень есть не что иное, как степень, показатель которой – дробное, число. Оно предложено было замечательным голландским математиком XVI в. Стевином [2].

143. НАКИДКИ

Задача

Чтобы показать, как может возникнуть извлечение корня даже высоких степеней в практическом обиходе, рассмотрим следующую задачу.

Товар, прежде чем дойти до потребителя, прошел восемь учреждений, каждое из которых накидывало одинаковое число процентов к той цене, по какой само получало. В результате потребителю пришлось приобретать товар с надбавкой в 100% к первоначальной цене.

Сколько процентов накидывало каждое учреждение?

Решение

Если первоначальная цена товара ***a***, и каждое учреждение накидывало ***x*** процентов, то второе учреждение платило за товар

[1] В учебнике математики Магницкого [3], по которому обучались у нас в течение всей первой половины XVIII в., вовсе нет особого знака для действия извлечения корня.

[2] Симон Стевин (1548-1620) голландский математик.

[3] Леонтий Филиппович Магницкий (1669-1739) русский математик и педагог (прим. ред.).

$$a + a \times \frac{x}{100} = a\left(1 + \frac{x}{100}\right);$$

третье учреждение получило товар за цену

$$a\left(1 + \frac{x}{100}\right) + a\left(1 + \frac{x}{100}\right)\frac{x}{100} =$$

$$= a\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 + \frac{x}{100}\right) = a\left(1 + \frac{x}{100}\right)^2.$$

Таким же образом мы найдем, что четвертое учреждение приобрело товар по цене

$$a\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 + \frac{x}{100}\right) = a\left(1 + \frac{x}{100}\right)^3.$$

Восьмое – по цене

$$a\left(1 + \frac{x}{100}\right)^7.$$

А до потребителя, после восьмой накидки, товар дошел по цене

$$a\left(1 + \frac{x}{100}\right)^8.$$

Из условия задачи известно, что окончательная цена была выше первоначальной на 100%, т. е. равнялась $2a$; следовательно,

$$a\left(1 + \frac{x}{100}\right)^8 = 2a \quad \text{и} \quad \left(1 + \frac{x}{100}\right)^8 = 2,$$

откуда

$$1 + \frac{x}{100} = \sqrt[8]{2}.$$

Чтобы вычислить $\sqrt[8]{2}$, представим этот корень в виде

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$$

и вычислим последовательно:

$$\sqrt{2} = 1{,}41; \qquad \sqrt{1{,}41} = 1{,}19; \qquad \sqrt{1{,}19} = 1{,}09;$$

Значит,

$$1 + \frac{x}{100} = 1{,}09 \text{ и } x = 9.$$

Каждое учреждение накидывало 9%.

144. ИЗ ЗАДАЧ ЭДИСОНА

Задача

Твердое знание алгебры предполагает уверенное обращение с радикалами, прочные навыки в безошибочном их преобразовании. На практике это – умение целесообразно преобразовывать сложные выражения, содержащие радикалы, приводя их к более простому виду, весьма важно, – и недаром в числе вопросов, предложенных Эдисоном юным соискателям его стипендии [1], мы находим довольно сложную задачу этого рода.

[1] См. примечание на стр. 78-79.

Вот она:

Упростить выражение

$$\frac{\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1}}{\sqrt{x+1}+1} \times$$

$$\times \left[\frac{(\sqrt{x+1}+1)\,\frac{1}{2}\,(x+1)^{-\frac{1}{2}} - (\sqrt{x+1}-1)\,\frac{1}{2}\,(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{x+1}+1)^2}\right]$$

Решение

Займемся сначала числителем дроби, заключенной в скобки. Вынеся за скобки

$$\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}},$$

получим:

$$\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{x+1}+1-\sqrt{x+1}+1) =$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\,(x+1)^{-\frac{1}{2}} = (x+1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Дробь, стоящую впереди квадратных скобок, представим в виде

$$\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}$$

и умножим числитель и знаменатель этой дроби на ее числитель.

$$\frac{(\sqrt{x+1}+1)^2}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{(\sqrt{x+1}+1)^2}{(\sqrt{x+1})^2-1} = \frac{(\sqrt{x+1}+1)^2}{x}.$$

Мы привели первоначальное выражение к виду:

$$\frac{(\sqrt{x+1}+1)^2}{x} \times \frac{(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{x+1}+1)^2}.$$

После сокращения и несложного преобразования оно упрощается в

$$\frac{1}{x\sqrt{x+1}}.$$

145. ЧТО БОЛЬШЕ?

Задача первая

Что больше: $\sqrt[5]{5}$ или $\sqrt{2}$?

Эту и следующие задачи требуется решить, не вычисляя значения корней.

Решение

Возвысив оба выражения в 10-ю степень, получаем

$$(\sqrt[5]{5})^{10} = 5^2 = 25 \qquad (\sqrt{2})^{10} = 2^5 = 32,$$

так как 32 > 25, то

$$\sqrt{2} > \sqrt[5]{5}.$$

Задача вторая

Что больше: $\sqrt[4]{4}$ или $\sqrt[7]{7}$?

Решение

Возвысив оба выражения в 28-ю степень, получаем

$$(\sqrt[4]{4})^{28} = 4^7 = 2^{14} = 2^7 \times 2^7 = 128^2$$

$$(\sqrt[7]{7})^{28} = 7^4 = 7^2 \times 7^2 = 49^2.$$

Так как $128^2 > 49^2$, то и

$$\sqrt[4]{4} > \sqrt[7]{7}.$$

Задача третья

Что больше: $\sqrt{7} + \sqrt{10}$ или $\sqrt{3} + \sqrt{19}$?

Решение

Возвысив оба выражения в квадрат, получаем:

$$(\sqrt{7} + \sqrt{10})^2 = 17 + 2\sqrt{70}$$

$$(\sqrt{3} + \sqrt{19})^2 = 22 + 2\sqrt{57}.$$

Уменьшим оба выражения на 17; у нас останется:

$$2\sqrt{70} \quad \text{и} \quad 5 + 2\sqrt{57}.$$

Возвышаем эти выражения в квадрат. Имеем:

$$280 \text{ и } 253 + 20\sqrt{57}.$$

Отняв по 253, сравниваем

$$27 \text{ и } 20\sqrt{57}.$$

Так как $\sqrt{57}$ больше 7, то $20\sqrt{57} > 27$ и, следовательно,

$$\sqrt{3} + \sqrt{19} > \sqrt{7} + \sqrt{10}.$$

146. РЕШИТЬ ОДНИМ ВЗГЛЯДОМ

Задача

Взгляните внимательнее на уравнение $x^{x^3}=3$ и скажите, чему равен x.

Решение

Каждый, хорошо освоившийся с алгебраическими символами, сообразит, что

$$x = \sqrt[3]{3}$$

В самом деле

$$x^3 = (\sqrt[3]{3})^3 = 3.$$

Но если

$$x^3 = 3$$

то

$$x = \sqrt[3]{3}$$

Для кого это «решение одним взглядом» является непосильным, тот может облегчить себе поиски неизвестного следующим образом:

Пусть

$$x^3 = y$$

Тогда

$$x = \sqrt[3]{y}$$

и уравнение получает вид

$$(\sqrt[3]{y})^y = 3.$$

Ясно, что $y = 3$ и, следовательно,

$$x = \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{3}.$$

147. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПАРАДОКСЫ

Задача первая

Шестое математическое действие дает возможность разыгрывать настоящие алгебраические комедии и фарсы на такие сюжеты, как $2 \times 2 = 5$, $2 = 3$ и т. п. Юмор подобных математических представлений кроется в том, что ошибка – довольно элементарная – несколько замаскирована и не сразу бросается в глаза. Исполним две пьесы этого комического репертуара из области алгебры.

Первая:

$$2 = 3.$$

На сцене сперва появляется неоспоримое равенство:

$$4 - 10 = 9 - 15.$$

В следующем «явлении» к обеим частям равенства прибавляется по равной величине $6\frac{1}{4}$:

$$4 - 10 + 6\tfrac{1}{4} = 9 - 15 + 6\tfrac{1}{4}.$$

Дальнейший ход комедии состоит в преобразованиях:

$$2^2 - 2 \times 2 \times \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 3^2 - 2 \times 3 \times \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2.$$

Извлекая из обеих частей равенства квадратный корень, получают

$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}.$$

Прибавляя по $\frac{5}{2}$ к обеим частям, приходят к нелепому равенству

$$2 = 3.$$

В чем же кроется ошибка?

Решение

Ошибка проскользнула в следующем заключении: из того, что

$$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2.$$

был сделан вывод, что

$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}.$$

Но из того, что квадраты равны, вовсе не следует, что равны первые степени. Ведь $(-5)^2 = 5^2$, но -5 не равно 5. Квадраты могут быть равны и тогда, когда первые степени разнятся знаками. В нашем примере мы имеем именно такой случай

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

но $-\frac{1}{2}$ не равно $\frac{1}{2}$.

Задача вторая

Другой алгебраический фарс (рис. 16)

$$2\times 2=5$$

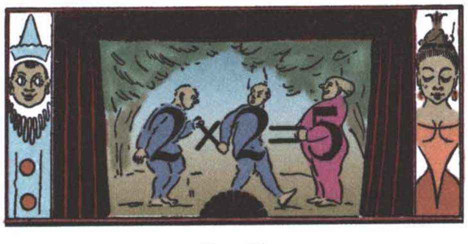


Рис. 16.

разыгрывается по образцу предыдущего и основан на том же трюке. На сцене появляется не внушающее сомнения равенство

$$16-36=25-45.$$

Прибавляются равные числа

$$16-36+20\tfrac{1}{4}=25-45+20\tfrac{1}{4}$$

и делаются следующие преобразования

$$4^2-2\times 4\times\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2=5^2-2\times 5\times\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2$$

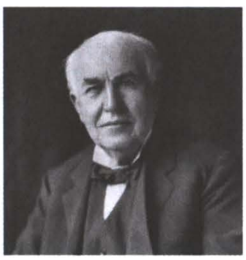
Затем, помощью того же незаконного заключения переходят к финалу:

$$4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2}.$$

$$4=5$$

$$2\times 2=5$$

Эти комические случаи должны предостеречь малоопытного математика от неосмотрительных операций с уравнениями, содержащими неизвестное под знаком корня.



Томас Алва Эдисон (1847–1931)

Томас Алва Эдисон (1847–1931) — величайший американский изобретатель и предприниматель. Обладатель свыше 4000 патентов на различные технические изобретения, из которых почти 1100 патентов были получены им в США. Чтобы понять, насколько изобретатель был гениален, достаточно сказать, что он изобрел фонограф, усовершенствовал телеграф, телефон, киноаппаратуру, разработал свою собственную электрическую лампу накаливания, которая, что весьма важно, стала коммерчески успешной. Здесь мы особо ярко видим другую грань его таланта. Эдисон был блестящим организатором и предпринимателем. Ему принадлежит первенство в использовании слова «алло» («hello») для начала разговора по телефону.

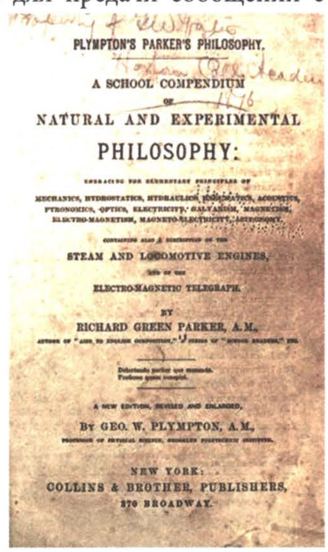
Предками Томаса были мельники из Голландии, которые в числе первых переселенцев приплыли в Америку около 1730 г. Отец Эдисона Самуэль – сын мельника, женился на дочери священника Нэнси. Теперь мы можем видеть насколько плодотворным был этот союз.

С раннего детства Томас был увлечен наукой. Свою первую научную книгу известного преподавателя, а так же историка и писателя, Ричарда Грина Паркера под названием «Натуральная и экспериментальная философия» он прочел.... в 9 лет. Книга содержала в себе описание все научных и технических достижений, известных в XIX в. Кроме того, она изобиловала описаниями научных опытов и экспериментов, которые лежали в основе этих открытий. Практически все из них юный Эдисон повторил самостоятельно, тем самым удовлетворяя жажду практической науки, овладевшую им.

Будучи подростком и вынужденный помогать матери зарабатывать деньги, торгуя овощами, Томас никогда не прекращал интересоваться научными достижениями. Он перепробовал множество специальностей, пока наконец, не стал издателем собственной газеты, которая распространялась в поездах. В это время Эдисон начинает проявлять большой интерес к электричеству и ему повезло: он получил возможность обучиться специальности телеграфиста бесплатно.

Проработав несколько лет по специальности Томас стал специалистом высокого класса с вполне неплохим окладом. Теперь ему стало хватать денег на его опыты и научные книги. Он знакомится с трудами М. Фарадея и параллельно изобретает. За усовершенствованную модель телеграфного аппарата для предачи сообщений с биржи он получает премию в 40 тыс. долларов от Общества «Голд энд Стокк телеграф компани», а жалование к тому времени уже составляет 300 долларов в месяц.

Этот момент становится переломным в судьбе ученого. Он начинает строить свою собственную лабораторию, которая со временем превратилась в гигантскую корпорацию «Дженерал электрик». Позже будут и лампы накаливания, и новый телеграф, и фонограф, и кинетоскоп для показа движущихся картинок, и всемирная слава. В 1928 году Эдисон был награжден высшей наградой США — Золотой медалью Конгресса.


PLYMPTON'S PARKER'S PHILOSOPHY.

A SCHOOL COMPENDIUM OF NATURAL AND EXPERIMENTAL PHILOSOPHY:

STEAM AND LOCOMOTIVE ENGINES,

ELECTRO-MAGNETIC TELEGRAPH.

BY RICHARD GREEN PARKER, A.M.,

A NEW EDITION, REVISED AND ENLARGED,

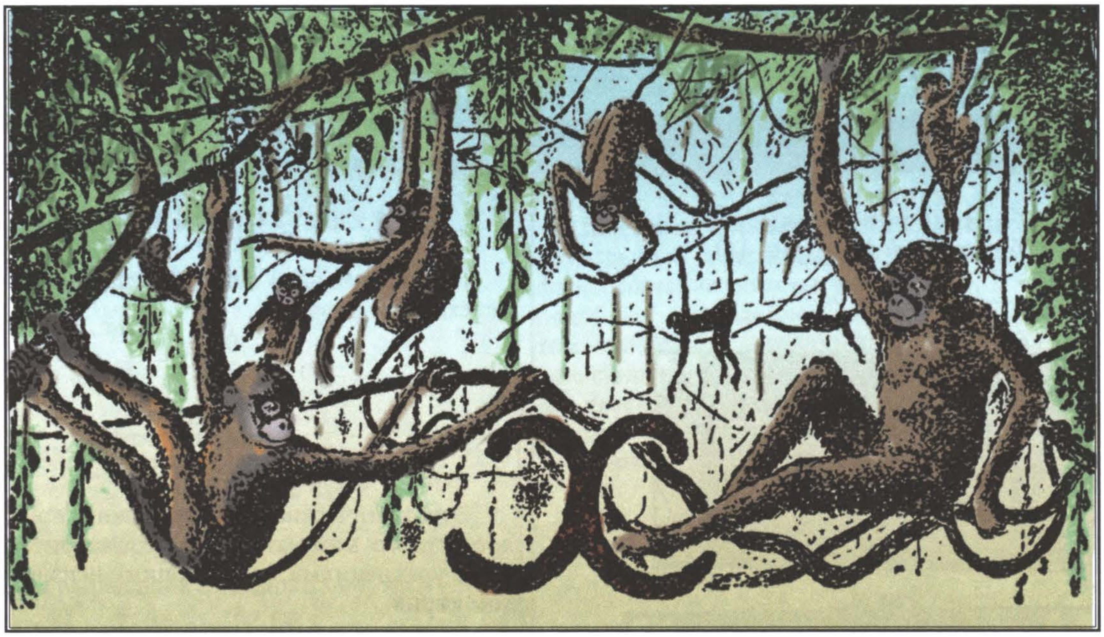
BY GEO. W. PLYMPTON, A.M.,

NEW YORK:

COLLINS & BROTHER, PUBLISHERS,

370 BROADWAY.

«Натуральная и экспериментальная философия» Ричарда Грина Паркера. Титульный лист.



148. РУКОПОЖАТИЯ

Задача

Любую задачу, приводящую к уравнению первой степени, можно решить и без уравнения, по свободному соображению. Иное дело – задачи, приводящие к уравнению второй степени: справиться с ними приемами арифметики удается очень редко, даже если задача и вовсе не сложна. Пусть читатель попытается арифметически решить, например, такую задачу.

Участники заседания обменялись рукопожатиями, и кто-то подсчитал, что всех рукопожатий было 66. Сколько человек явилось на заседание?

Решение

Алгебраически задача решается весьма просто. Каждый из x участников пожал $x - 1$ рук. Значит, всех рукопожатий должно было быть $x(x - 1)$; но надо принять во внимание, что когда Иванов пожимает руку Петрова, то и Петров пожимает руку Иванова; эти два рукопожатия следует считать за одно. Поэтому число пересчитанных рукопожатий вдвое меньше, нежели $x(x - 1)$. Имеем уравнение

$$\frac{x(x-1)}{2} = 66$$

или, после преобразований,

$$x^2 - x - 132 = 0$$

откуда

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 528}}{2}$$

$$x_1 = 12; \quad x_2 = -11.$$

Так как отрицательное решение (–11 человек) в данном случае лишено реального смысла, мы его отбрасываем и сохраняем только первый корень: в заседании участвовало 12 человек.

Арифметически решить эту задачу можно лишь соответствующим подбором множителей числа 132: ряд проб приведет к числам 12×11.

149. ПЧЕЛИНЫЙ РОЙ

Задача

В древней Индии распространен был своеобразный вид спорта – публичное соревнование в решении головоломных задач. Индусские математические руководства имели отчасти целью служить пособием для подобных состязаний на первенство в умственном спорте. «По изложенным здесь правилам, – пишет составитель одного из таких учебников, – мудрый может придумать тысячу других задач. Как солнце блеском своим затмевает звезды, так и ученый человек затмит славу другого в народных собраниях, предлагая и решая алгебраические задачи». В подлиннике это высказано поэтичнее, так как вся книга написана стихами. Задачи тоже облекались в форму стихотворений. Приведем одну из них в прозаической передаче.

Пчелы, в числе, равном квадратному корню из половины всего их роя, сели на куст жасмина, оставив позади себя $^8/_9$ роя. И только одна пчелка из того же роя кружится возле лотоса, привлеченная жужжанием подруги, неосторожно попавшей в западню сладко пахнущего цветка. Сколько всех пчел в рое?

Решение

Для устного решения задача не легка; она приводит к квадратному уравнению и потому не поддается разрешению арифметическими приемами. Если обозначить искомую численность роя через x, то уравнение имеет вид

$$\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8}{9}x + 2 = x.$$

Мы можем придать ему более простой вид, введя вспомогательное неизвестное

$$y = \sqrt{\frac{x}{2}}\ .$$

Тогда $x = 2y^2$ и уравнение получится такое:

$$y + \frac{16y2}{9} + 2 = 2y^2, \text{ или } 2y^2 - 9y - 18 = 0.$$

Решив его, получаем два значения для y:

$$y_1 = 6; \quad y_2 = -\frac{3}{2}.$$

Соответствующие значения для x:

$$x_1 = 72; \quad x_2 = 4{,}5.$$

Так как число пчел должно быть целое и положительное, то удовлетворяет задаче только первый корень: рой состоял из 72 пчел. Проверим:

$$\sqrt{\frac{72}{2}} + \frac{8}{9} \times 72 + 2 = 6 + 64 + 2 = 72.$$

150. СТАЯ ОБЕЗЬЯН

Задача

Другую индусскую задачу я имею возможность привести в стихотворной передаче, так как ее перевел автор превосходной книжечки «Кто изобрел алгебру?» Вас. Ив. Лебедев:

На две партии разбившись,
Забавлялись обезьяны.
Часть восьмая их в квадрате
В роще весело резвилась;
Криком радостным двенадцать
Воздух свежий оглашали.
Вместе сколько, ты мне скажешь
Обезьян там было в роще?

Решение

Если общая численность стаи x, то

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x,$$

откуда

$$x_1 = 48, \quad x_2 = 16.$$

Задача имеет два положительных решения: в стае могло бы быть или 48 животных или 16. Оба ответа вполне удовлетворяют задаче.

151. ПРЕДУСМОТРИТЕЛЬНОСТЬ УРАВНЕНИЙ

В рассмотренных случаях полученными двумя решениями уравнений мы распоряжались различно, в зависимости от условия задачи. В первом случае мы отбросили отрицательный корень, как не отвечающий содержанию задачи; во втором отказались от дробного и отрицательного корня. В третьей задаче, напротив, воспользовались обоими корнями. Существование второго решения является иной раз полной неожиданностью не только для решившего задачу, но даже и для придумавшего ее. Приведем пример, когда уравнение оказывается словно предусмотрительнее того, кто его составил.

Мяч брошен вверх со скоростью 25 *м* в секунду. Через сколько секунд он будет на высоте 20 *м* над землей?

Решение

Для тел, брошенных вверх, при отсутствии сопротивления воздуха, механика устанавливает следующее соотношение между высотою поднятия (h), начальной скоростью (v), ускорением тяжести (g) и числом секунд поднятия (t):

$$h = vt - \frac{gt^2}{2}.$$

Сопротивлением воздуха мы можем в данном случае пренебречь, так как при незначительных скоростях оно не столь велико, а мы за строгой точностью не гонимся. Ради упрощения расчетов примем g равным не 9,8 *м*, а 10 *м* (ошибка всего в 2%). Подставив в приведенную формулу значения h, v и g, получаем уравнение:

$$20 = 25t - \frac{10t^2}{2},$$

а после упрощения

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

Решив уравнение, имеем

$$t_1 = 1, \text{ и } t_2 = 4.$$

Мяч будет на высоте 20 *м* дважды: через 1 секунду и через 4 секунды.

Это может, пожалуй, показаться невероятным и, не вдумавшись, мы готовы второе решение отбросить. Но так поступить было бы ошибкой! Второе решение имеет полный смысл; мяч должен действительно дважды побывать на высоте 20 *м*: раз при подъеме и вторично– при обратном падении. Легко рассчитать, что мяч при начальной скорости 25 *м* в секунду должен лететь вверх 2,5 секунды и залететь на высоту 31,25 *м*. Достигнув через 1 секунду высоты 20 *м*, мяч будет подниматься еще 1,5 *сек.*, затем столько же времени опускаться вниз снова до уровня 20 *м* и, спустя секунду, достигнет земли.

152. ЗАДАЧА ЭЙЛЕРА

Стендаль в «Автобиографии» рассказывает следующее о годах своего учения:

«Я нашел у него (учителя математики) Эйлера и его задачи о числе яиц, которые крестьянка несла на рынок... Это было для меня открытием. Я понял, что значит пользоваться орудием, называемым алгеброй. Но, черт возьми, никто мне об этом ничего не говорил...»

Вот эта задача из «Введения в алгебру» Эйлера, произведшая на ум молодого Стендаля столь сильное впечатление.

Две крестьянки принесли на рынок вместе 100 яиц, одна больше, нежели другая; обе выручили одинаковые суммы. Первая сказала тогда второй: «Будь у меня твои яйца, я выручила бы 15 крейцеров». Вторая ответила: «А будь твои яйца у меня, я выручила бы за них $6\frac{2}{3}$ крейцера». Сколько яиц было у каждой?

Решение

Пусть у первой крестьянки x яиц, у второй $100 - x$. Если бы первая имела $100 - x$ яиц, она выручила бы, мы знаем, 15 крейцеров. Значит, первая крестьянка продала яйца по цене

$$\frac{15}{100 - x}$$

Таким же образом находим, что вторая крестьянка продавала яйца по цене

$$6\frac{2}{3} : x = \frac{20}{3x}.$$

Теперь определяется действительная выручка каждой крестьянки:

первой:
$$x \times \frac{15}{100 - x} = \frac{15x}{100 - x};$$

второй
$$(100 - x) \times \frac{20}{3x} = \frac{20(100 - x)}{3x}.$$

Так как выручки обеих одинаковы, то

$$\frac{15x}{100 - x} = \frac{20(100 - x)}{3x}.$$

После преобразований имеем:

$$x^2 + 160x - 8\,000 = 0,$$

откуда
$$x_1 = 40; \quad x_2 = -200.$$

Отрицательный корень в данном случае не имеет смысла; у задачи только одно решение: первая крестьянка принесла 40 яиц, вторая 60.

Задача может быть решена еще другим, более кратким способом. Этот способ гораздо остроумнее, но зато и отыскать его значительно труднее.

Предположим, что вторая крестьянка имела в k раз больше яиц, чем первая. Выручили они одинаковые суммы; это значит, что первая крестьянка продавала свои яйца в k раз дороже, чем вторая. Если бы перед торговлей они поменялись яйцами, то первая крестьянка имела бы в k раз больше яиц, чем вторая, и продавала бы их в k раз дороже. Это значит, что она выручила бы в k^2 больше денег, чем вторая. Следовательно, имеем:

$$k^2 = 15 : 6\frac{2}{3} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4};$$

отсюда
$$k = \frac{3}{2}.$$

Теперь остается 100 яиц разделить в отношении 3 : 2. Легко находим, что первая крестьянка имела 40, а вторая 60 яиц.

153. ГРОМКОГОВОРИТЕЛИ

Задача

На площади установлено 5 громкоговорителей, разбитые на две группы: в одной 2, в другой 3 аппарата. Расстояние между группами 50 *м*. Где надо стать, чтобы звуки обеих групп доносились с одинаковой силой?

Решение

Если расстояние искомой точки от меньшей группы обозначим через x, то расстояние ее от большей группы выразится через $50 - x$ (рис. 17). Зная, что сила звука ос-

Рис. 17.

лабевает пропорционально квадрату расстояния, имеем уравнение:

$$\frac{2}{3} = \frac{x^2}{(50 - x)^2},$$

которое после упрощения приводится к виду

$$x^2 + 200x - 5\,000 = 0.$$

Решив его, получаем два корня

$$x_1 = 22{,}5$$

$$x_2 = -222{,}5$$

Положительный корень прямо отвечает на вопрос задачи: точка равной слышимости расположена в 22,5 *м* от группы из двух громкоговорителей и, следовательно, в 27,5 м от группы трех аппаратов.

Но что означает отрицательный корень уравнения? Имеет ли он смысл?

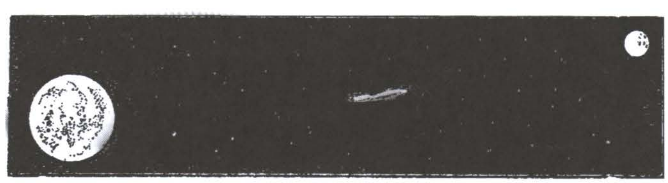
Безусловно. Знак минус означает, что вторая точка равной слышимости лежит в направлении, противоположном тому, которое принято было за положительное при составлении уравнения.

Отложив от местонахождения двух аппаратов в требуемом направлении 222,5 *м*, найдем точку, куда звуки обеих групп громкоговорителей доносятся с одинаковой силой. От группы из трех аппаратов точка эта отстоит в 222,5 + 50 = 272,5 *м*.

Итак, нами разысканы две точки равной слышимости из тех, что лежат на прямой, соединяющей источники звука. Других таких точек на этой линии нет, – но они имеются вне ее. В подробных курсах геометрии доказывается, что геометрическое место точек, удовлетворяющих требованию нашей задачи, есть окружность, проведенная через обе сейчас найденные точки, как через концы диаметра. Окружность эта ограничивает участок, как видим, довольно обширный, внутри которого слышимость группы двух громкоговорителей пересиливает слышимость группы трех аппаратов; а за пределами круга наблюдается обратное явление.

154. АЛГЕБРА ЛУННОГО ПЕРЕЛЕТА

Рассмотренная сейчас задача о громкоговорителях находится в неожиданно близкой связи с проблемой перелета на Луну на ракетном корабле. Многие высказывают опасения, не окажется ли чересчур трудным



делом метко попасть в такую маленькую мишень на небе: ведь поперечник Луны усматривается нами под углом всего в полградуса. Ближайшее рассмотрение вопроса выясняет, что цель предприятия будет достигнута, если ракете удастся перелететь через точку равного притяжения Земли и Луны, – дальше ракетный корабль уже неизбежно должен двигаться к Луне под действием ее притяжения. Разыщем эту точку равного притяжения.

По закону Ньютона, сила взаимного притяжения двух тел прямо пропорциональна произведению притягивающихся масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Если масса Земли M, а расстояние ракеты от нее x, то сила, с какою Земля притягивает каждый грамм массы ракеты, выразится через

$$\frac{Mk}{x^2}$$

где k – сила взаимного притяжения одного грамма одним граммом на расстоянии в 1 *см*.

Сила, с какой Луна притягивает каждый грамм ракеты в той же точке, равна

$$\frac{mk}{(l-x)^2},$$

где m – масса Луны, а l – ее расстояние от Земли (ракета предполагается находящейся между Землей и Луной на прямой линии, соединяющей их центры). Задача требует, чтобы

$$\frac{Mk}{x^2} = \frac{mk}{(l-x)^2}$$

или

$$\frac{M}{m} = \frac{x^2}{l^2 - 2lx + x^2}$$

Отношение $\frac{M}{m}$ равно – как известно из астрономии – 81,6; подставив, имеем:

$$\frac{x^2}{l^2 - 2lx + x^2} = 81{,}6,$$

откуда

$$80{,}6x^2 - 163{,}2lx + 81{,}6l^2 = 0.$$

Решив уравнение относительно x, получаем

$$x_1 = 0{,}9l; \quad x_2 = 1{,}11l$$

Как и в задаче о громкоговорителях, мы приходим к заключению, что на линии Земля – Луна существуют две искомые точки, – две точки, где ракета должна одинаково притягиваться обоими светилами; одна на 0,9 расстояния между ними, считая от центра Земли, другая – на 1,11 того же расстояния. Так как расстояние l между центрами Земли и Луны = 384 000 км, то одна из искомых точек отстоит от Земли на 342 000 км, другая – на 426 000 км.

Но мы знаем (см. предыдущую задачу), что тем же свойством обладают и все точки окружности, проходящей через найденные две точки как через концы диаметра. Если будем вращать эту окружность около линии, соединяющей центры Земли и Луны, то она опишет шаровую поверхность, все точки которой будут удовлетворять требованиям задачи.

Диаметр этого шара равен, как легко сообразить,

$$0{,}1l + 0{,}11l = 0{,}21l = 80\,000 \text{ км}.$$

Если ракета очутится внутри этого шара (обладая не слишком значительной скоростью), она неизбежно

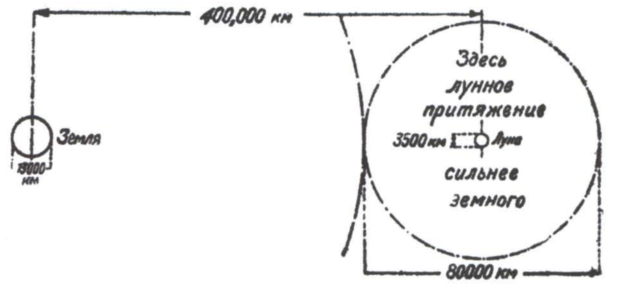


Рис. 18.

должна будет упасть на поверхность Луны, так как сила лунного притяжения в этой области превозмогает силу притяжения Земли.

Мишень, в которую должна попасть ракета, мы видим, гораздо больше, чем можно думать. Она занимает на небе не полградуса, а – как показывает несложный геометрический расчет – около 12°. Это значительно облегчает задачу звездоплавателей [1].

На этот раз уравнение оказалось словно прозорливее того, кто его составлял. Приступая к задаче, разве думали вы, что земное притяжение сильнее лунного не только впереди Луны, но и позади нее? Алгебраический анализ неожиданно раскрыл вам это обстоятельство и помог в точности разграничить сферы влияния обоих светил.

155. «ТРУДНАЯ ЗАДАЧА»

Картина Богданова-Бельского «Трудная задача» известна многим, но мало кто из видевших эту картину вникал в содержание той «трудной задачи», которая на ней изображена. Состоит она в том, чтобы устным счетом быстро найти результат вычисления:

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}$$

Задача в самом деле нелегкая. С нею, однако, хорошо справлялись ученики того учителя, который с сохранением портретного сходства изображен на картине, именно С. А. Рачинского, профессора естественных наук, покинувшего университетскую кафедру, чтобы сделаться рядовым учителем сельской школы. Талантливый педагог культивировал в своей школе устный счет, основанный на виртуозном использовании свойств чисел. Числа 10, 11, 12, 13 и 14 обладают любопытной особенностью:

[1] На подробностях проектов лунных перелетов мы здесь, конечно, останавливаться не можем. Интересующиеся этой проблемой найдут ее изложение и разбор связанных с ней математических вопросов в моей книге «Межпланетные путешествия», изд. 9-е, 1934.

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2.$$

Так как 100 + 121 + 144 = 365, то легко рассчитать в уме, что воспроизведенное на картине выражение равно 2.

Алгебра дает нам средство поставить вопрос об этой интересной особенности ряда чисел более широко: единственный ли это ряд из пяти последовательных чисел сумма квадратов первых трех из которых равна сумме квадратов двух последних?

Решение

Обозначив первое из искомых чисел через x, имеем уравнение:

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = (x+3)^2 + (x+4)^2.$$

Удобнее, однако, обозначить через x не первое, а второе из искомых чисел. Тогда уравнение будет иметь более простой вид:

$$(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2 + (x+3)^2.$$

Раскрыв скобки и сделав упрощения, получаем:

$$x^2 - 10x - 11 = 0,$$

откуда

$$x = 5 \pm \sqrt{25 + 11};\quad x_1 = 11;\quad x_2 = -1.$$

Существуют, следовательно два ряда чисел, обладающих требуемым свойством: ряд Рачинского

10, 11, 12, 13, 14

и ряд

−2, −1, 0, 1, 2.

В самом деле

$$(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 = 1^2 + 2^2.$$

156. СУММА КУБОВ

Задача

С рассмотренной сейчас задачей сходна следующая. Найти четыре таких последовательных числа, куб последнего из которых равен сумме кубов трех предыдущих.

Решение

В этом случае уравнение получается более простого вида, если через x обозначить первое из искомых чисел:

$$x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 = (x+3)^3.$$

Раскрыв скобки и сделав приведение, получаем:

$$x^3 - 6x - 9 = 0.$$

Мы имеем уравнение третьей степени, которое однако, можно привести к квадратному. Для этого представим его в виде

$$x^3 - 9x + 3x - 9 = 0.$$

и преобразуем так:

$$x(x^2 - 9) + 3(x - 3) = 0$$
$$x(x + 3)(x - 3) + 3(x - 3) = 0$$
$$(x - 3)[x(x + 3) + 3] = 0$$
$$(x - 3)(x^2 + 3x + 3) = 0$$

Произведение двух множителей может равняться нулю, когда один из них или оба равны нулю, т. е когда

$$x - 3 = 0, \quad \text{или} \quad x^2 + 3x + 3 = 0.$$

Из первого уравнения следует, что $x = 3$: это один корень кубического уравнения. Два другие найдем, решив уравнение

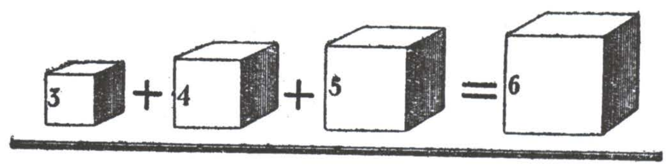
$$x^2 + 3x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{3}.$$

Так как квадратный корень из отрицательного числа есть величина мнимая, то два последних корня приходится отбросить. Задача, следовательно, имеет только одно решение, а именно 3, 4, 5 и 6:

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3.$$

Это означает, между прочим, что куб, ребро которого 6 *см* равновелик сумме трех кубов, ребра которых равны 3 см, 4 см и 5 см – соотношение, которое, по преданию, весьма занимало Платона.



Задача

Найти три последовательных числа, отличающиеся тем свойством, что квадрат среднего на 1 больше произведения двух остальных.

Решение

Если первое из искомых чисел x, то уравнение имеет вид:

$$(x+1)^2 = x(x+2) + 1.$$

Раскрыв скобки, получаем

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2x + 1,$$

или 0 = 0, – равенство, из которого нельзя определить величину x. Это показывает, что составленное нами равенство есть тождество; оно справедливо при любом значении входящей в него буквы, а не при некоторых лишь, как в случае уравнения. Значит, всякие три последовательных числа обладают требуемым свойством. В самом деле, возьмем наугад числа

17, 18, 19.

Мы убеждаемся, что

$$18^2 - 17 \times 19 = 324 - 323 = 1.$$

Необходимость такого соотношения выступает нагляднее, если обозначить через x второе число. Тогда получим равенство

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1),$$

т. е. очевидное тождество.

158. ДВА ПОЕЗДА

Задача

Два железнодорожных пути скрещиваются под прямым углом. К месту скрещения одновременно мчатся по этим путям два поезда: один со станции, находящейся в 40 км от скрещения, другой – со станции в 50 км от того же места скрещения. Первый делает в минуту 800 *м*, второй – 600 *м*.

Через сколько минут, считая с момента отправления, паровозы были в наименьшем взаимном расстоянии? И как велико это расстояние?

Решение

Эта и следующие задачи принадлежат к весьма интересному роду задач на разыскание наибольшего или

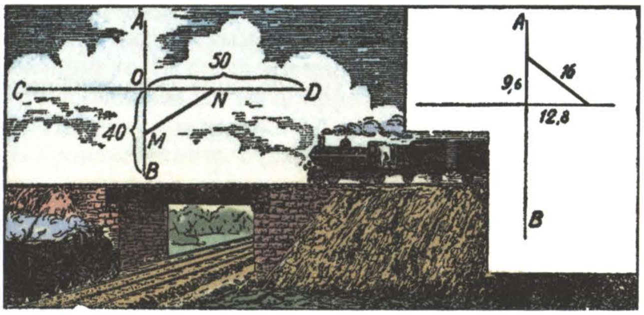


Рис. 20 и 21.

наименьшего значения некоторой величины. Они могут быть решены различными приемами, один из которых мы сейчас покажем.

Начертим схему движения поездов нашей задачи. Пусть прямые AB и CD – скрещивающиеся пути (рис. 20). Станция B расположена в 40 *км* от точки скрещения O, станция D – в 50 *км* от нее. Предположим, что спустя x минут паровозы будут в кратчайшем взаимном расстоянии друг от друга $MN = m$. Поезд, вышедший из B, успел к этому моменту пройти путь $BM = 0{,}8x$, так как его минутная скорость равна 800 *м* = 0,8 *км*. Следовательно, $OM = 40 - 0{,}8x$. Точно так же найдем, что $ON = 50 - 0{,}6x$. По теореме Пифагора

$$MN = m = \sqrt{\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2} = \sqrt{(40 - 0{,}8x)^2 + (50 - 0{,}6x)^2}.$$

Возвысив в квадрат обе части уравнения

$$m = \sqrt{(40 - 0{,}8x)^2 + (50 - 0{,}6x)^2}.$$

и сделав упрощения, получаем

$$x^2 + 124x + 4\,100 - m^2 = 0.$$

Решив это уравнение относительно x, имеем

$$x = 62 \pm \sqrt{m^2 - 256}.$$

Так как x – число протекших минут – не может быть мнимым, то $m^2 - 256$ должно быть величиной положительной, или, в крайнем случае, равняться нулю. Последнее соответствует наименьшему значению m, и тогда

$$m^2 = 256, \quad \text{т. е.} \quad m = 16.$$

Очевидно, что меньше 16-ти m быть не может, – иначе x становится мнимым. А если m2 – 256 = 0, то x = 62.

Итак, паровозы окажутся всего ближе друг к другу через 62 мин., и взаимное их удаление тогда будет 16 *км*.

Определим, как они в этот момент расположены. Вычислим длину OM; она равна

$$40 - 62 \times 0{,}8 = -9{,}6.$$

Знак минус означает, что паровоз пройдет за скрещение на 9,6 *км*. Расстояние же ON равно

$$50 - 62 \times 0{,}6 = 12{,}8,$$

т. е. второй паровоз не дойдет до скрещения на 12,8 км. Расположение паровозов показано на рис. 21. Как видим, оно вовсе не то, какое мы представляли себе до решения задачи. Уравнение оказалось достаточно терпимым и, несмотря на неправильную схему, дало правильное решение. Нетрудно понять, откуда эта терпимость: она обусловлена алгебраическими правилами знаков.

159. ГДЕ УСТРОИТЬ ПОЛУСТАНОК?

Задача

В стороне от прямолинейного участка железнодорожного пути, в 20 км от него, лежит селение B (рис. 22). Где надо устроить полустанок C, чтобы проезд от A до B

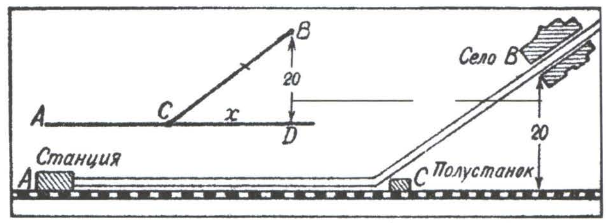


Рис. 22.

по железной дороге AC и по шоссе CB отнимал возможно меньше времени? Скорость движения по железной дороге 0,8 *км* в минуту, по шоссе – 0,2 *км*.

Решение

Обозначим расстояние AD (от A до основания перпендикуляра BD и AD) через a, CD через x. Тогда $AC = AD - CD = a - x$, а $CB = \sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{x^2 + 20^2}$. Время, в течение которого поезд проходит путь AC, равно

$$\frac{AC}{0{,}8} = \frac{a - x}{0{,}8}$$

Время прохождения пути CB по шоссе равно

$$\frac{CB}{0{,}2} = \frac{\sqrt{x^2 + 20^2}}{0{,}2}$$

А общая продолжительность переезда из A в B равна

$$\frac{a - x}{0{,}8} + \frac{\sqrt{x^2 + 20^2}}{0{,}2}$$

Эта сумма, которую обозначим через m, должна быть наименьшей.

Уравнение

$$\frac{a - x}{0{,}8} + \frac{\sqrt{x^2 + 20^2}}{0{,}2} = m$$

представляем в виде

$$-\frac{x}{0{,}8} + \frac{\sqrt{x^2 + 20^2}}{0{,}2} = m - \frac{a}{0{,}8}$$

Умножим на 0,8, имеем

$$-x + 4\sqrt{x^2 + 20^2} = 0{,}8\,m - a$$

Обозначив 0,8 $m - a$ через k и освободив уравнение от радикала, получаем квадратное уравнение

$$15x^2 - 2kx + 6\,400 - k^2 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{k \pm \sqrt{16k^2 - 96\,000}}{15}$$

Так как $k = 0{,}8\,m - a$, то при наименьшем значении m достигает наименьшей величины и k, и наоборот. Но, чтобы x было вещественным, $16k^2$ должно быть не меньше 96 000. Значит, наименьшая величина для $16k^2$ есть 96 000. Поэтому m становится наименьшим, когда

$$16k^2 = 96\,000$$

откуда

$$k = \sqrt{6\,000}\,.$$

и следовательно,

$$x = \frac{k \pm 0}{15} = \frac{\sqrt{6\,000}}{15} = 5{,}16.$$

Полустанок должен быть устроен приблизительно в 5 *км* от точки D, какова бы ни была длина $a = AD$.

Но, разумеется, наше решение имеет смысл только для случаев, когда $x < a$, так как, составляя уравнение, мы считали выражение $a - x$ за число положительное.

Если $x = a = 5{,}16$, то полустанка вообще строить не надо; придется ехать прямо на станцию. Так же нужно поступать и в случаях, когда расстояние a короче 5,16 *км*.

На этот раз мы оказываемся предусмотрительнее, нежели уравнение. Если бы мы слепо доверились уравнению, нам пришлось бы в рассматриваемом случае построить полустанок за станцией, – что было бы явной нелепостью: никто не минует станции, когда спешит попасть на поезд. Случай поучительный, показывающий, что при пользовании математическим орудием надо с должной осмотрительностью относиться к получаемым результатам: логика реальной действительности не всегда полностью совпадает с логикой того математического уравнения, в которое мы облекаем жизненные явления.

160. КАК ПРОВЕСТИ ШОССЕ?

Задача

Из приречного города A надо направлять грузы в пункт B, расположенный на a километров ниже по реке и в d километрах от берега (рис. 23). Как провести шоссе от B к реке, чтобы провоз грузов из A и B обходился возможно дешевле?

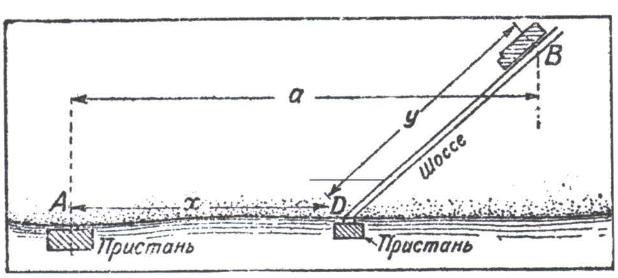


Рис. 23.

Провозная плата с тонно-километра по реке вдвое меньше чем по шоссе.

Решение

Обозначим расстояние AD через x, длину DB шоссе – через y, длину AC – через a, BC – через d.

Так как провоз по шоссе вдвое дороже, чем по реке, то сумма

$$x + 2y$$

должна быть, согласно требованию задачи, наименьшая. Обозначим это наименьшее значение через m. Имеем уравнение

$$x + 2y = m.$$

Но $x = a - DC$, а $DC = \sqrt{y^2 - d^2}$; наше уравнение получает вид:

$$a - \sqrt{y^2 - d^2} + 2y = m$$

или по освобождении от радикала,

$$3y^2 + 4(a - m)y + (a - m)^2 + d^2 = 0.$$

Решаем его:

$$y = -\frac{2}{3}(a - m) \pm \frac{\sqrt{(a - m)^2 - 3d^2}}{3}\,.$$

Чтобы y было вещественным, $(a - m)^2$ должно быть не меньше $3d^2$. Наименьшее значение $(a - m)^2$ равно $3d^2$, и тогда

$$m - a = d\sqrt{3}\,; \quad y = \frac{2(m - a) + 0}{3} = \frac{2d\sqrt{3}}{3}$$

$\sin BDC = d : y$, т. е.

$$d : \frac{2d\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Но угол, синус которого равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$, заключает 60°.

Значит, шоссе надо провести под углом в 60° к реке, – каково бы ни было расстояние AC.

Здесь наталкиваемся снова на ту же особенность, с которой мы встретились в предыдущей задаче. Решение имеет смысл только при определенном условии. Если пункт расположен так, что шоссе, проведенное под углом в 60° к реке, пройдет по ту сторону города A, то решение неприложимо; в таком случае надо непосредственно связать пункт B с городом A шоссе, вовсе не пользуясь рекой для перевозки.

161. КОГДА ПРОИЗВЕДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕЕ?

Для решения многих задач «на максимум и минимум», т. е. на разыскание наибольшего и наименьшего значений переменной величины, можно успешно пользоваться одной алгебраической теоремой, с которой мы сейчас познакомимся. Рассмотрим задачу:

На какие две части надо разбить данное число, чтобы произведение их было наибольшее?

Решение

Пусть данное число a и одна из частей, на которые мы разбили наше число, есть x. Произведение обеих частей обозначим через m:

$$x(a-x)=m.$$

Чтобы определить, при каком значении x величина m наибольшая, решим это уравнение относительно x

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4m}}{2}$$

Наибольшая величина $4m$ есть a^2, т. е.

$$4m=a^2;\ \text{тогда}\ m=\frac{a^2}{4}\quad\text{и}\quad x=\frac{a}{2}$$

Итак, число надо разделить пополам: произведение двух чисел, сумма которых неизменна, будет наибольшим тогда, когда эти числа равны между собой.

Рассмотрим тот же вопрос для трех чисел.

На какие три части надо разбить данное число, чтобы произведение их было наибольшее?

Решение

При решении этой задачи будем опираться на предыдущую. Пусть три части, на которые разбито данное число, – x, y, z; само же число обозначим через a.

Имеем

$$x+y+z=a.$$

Допустим, что x и y не равны между собой. Если каждое из них заменим их полусуммой $\frac{x+y}{2}$, то сумма трех множителей не изменится.

$$\frac{x+y}{2}+\frac{x+y}{2}+z=x+y+z=a.$$

Но мы уже знаем, что произведение равных множителей, при неизменной сумме, больше произведения неравных, т. е.

$$\frac{x+y}{2}\times\frac{x+y}{2}>xy.$$

Поэтому

$$\frac{x+y}{2}\times\frac{x+y}{2}\times z>xyz.$$

Вообще, если среди множителей xyz есть хотя бы два неравных, то можно подобрать числа, которые, не меняя общей суммы, дадут произведение большее, чем xyz. И только при равенстве множителей произвести такой замены нельзя: произведение трех равных множителей, при неизменной сумме, наибольшее.

Подобным же образом можно доказать эту теорему и для четырех множителей, для пяти и т. д. Рассмотрим теперь более общий случай.

Найти, при каких значениях x и y выражение x^py^q наибольшее, если $x+y=a$.

Решение

Надо найти, при каком значении x выражение

$$x^p(a-x)^q$$

достигает наибольшей величины.

Умножим это выражение на число $\frac{1}{p^pq^q}$.

Получим новое выражение

$$\frac{x^p}{p^p}\ \frac{(a-x)^q}{q^q},$$

которое, очевидно, достигает наибольшей величины тогда же, когда и первоначальное.

Представим сейчас полученное выражение в виде:

$$\underbrace{\frac{x}{p}\times\frac{x}{p}\times\frac{x}{p}\times\ldots\times}_{p\ \text{раз}}\ \underbrace{\frac{a-x}{q}\times\frac{a-x}{q}\times\frac{a-x}{q}\times\ldots}_{q\ \text{раз}}$$

Сумма всех множителей этого выражения равна

$$\underbrace{\frac{x}{p}+\frac{x}{p}+\frac{x}{p}+\ldots+}_{p\ \text{раз}}\ \underbrace{\frac{a-x}{q}+\frac{a-x}{q}+\frac{a-x}{q}+\ldots}_{q\ \text{раз}}$$

т. е. величине постоянной.

На основании ранее доказанного (см. выше на этой стр.) заключаем, что произведение

$$\frac{x}{p}\times\frac{x}{p}\times\frac{x}{p}\times\ldots\times\frac{a-x}{q}\times\frac{a-x}{q}\times\frac{a-x}{q}\times\ldots$$

достигает максимума при равенстве всех его отдельных множителей, т. е. когда

$$\frac{x}{p}=\frac{a-x}{q}.$$

Зная, что $a-x=y$, получаем, переставив члены, пропорцию

$$\frac{x}{y}=\frac{p}{q}.$$

Итак, произведение x^py^q при постоянстве суммы $x+y$ достигает наибольшей величины тогда, когда

$$x:y=p:q.$$

Таким же образом можно доказать, что произведения

$$x^py^qz^r,\ x^py^qz^rt^u\ \text{и т. п.}$$

при постоянстве сумм $x+y+z$, $x+y+z+t$ и т. д. достигают наибольшей величины тогда, когда

$$x:y:z=p:q:r,\quad x:y:z:t=p:q:r:u\quad\text{и т. д.}$$

162. КОГДА СУММА НАИМЕНЬШАЯ?

Читатель, желающий испытать свои силы на доказательстве полезных алгебраических теорем, пусть докажет сам следующие положения:

1. Сумма двух чисел, произведение которых неизменно, становится наименьшей, когда эти числа равны.

Например, для произведения 36: $4+9=13$; $3+12=15$; $2+18=20$; $1+36=37$; и наконец $6+6=12$.

2. Сумма нескольких чисел, произведение которых неизменно, становится наименьшей, когда эти числа равны.

Например, для произведения 216: $3+12+6=21$; $2+18+6=24$; $9+6+4=19$, между тем как

$$6+6+6=18.$$

* * *

На ряде примеров покажем, как применяются на практике эти теоремы.

163. БРУС НАИБОЛЬШЕГО ОБЪЕМА

Задача

Из цилиндрического бревна надо выпилить прямоугольный брус наибольшего объема. Какой формы должно быть его сечение (рис. 24)?

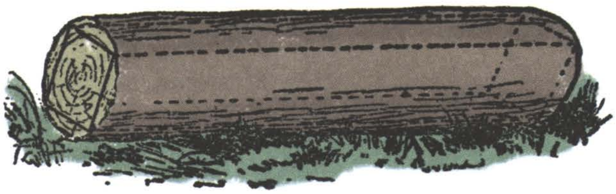


Рис. 24.

Решение

Если стороны прямоугольного сечения x и y, то по теореме Пифагора

$$x^2 + y^2 = d^2$$

где d – диаметр бревна. Объем бруса наибольший, когда площадь его сечения наибольшая, т. е. когда xy достигает наибольшей величины. Но если xy наибольшая, то наибольшим будет и произведение x^2y^2. Так как сумма $x^2 + y^2$ неизменна, то произведение x^2y^2 наибольшее, когда $x^2 = y^2$, или $x = y$.

Итак, сечение бруса должно быть квадратное.

164. ДВА ЗЕМЕЛЬНЫХ УЧАСТКА

Задачи

1. Какой формы должен быть прямоугольный участок данной площади, чтобы длина ограничивающей его изгороди была наименьшая?

2. Какой формы должен быть прямоугольный участок, чтобы при данной длине изгороди площадь его была наибольшая?

Решения

1. Форма прямоугольного участка определяется соотношением его сторон x и y. Площадь участка со сторонами x и y равна xy, а длина изгороди $2x + 2y$. Длина изгороди будет наименьшей, если $x + y$ достигнет наименьшей величины.

При постоянном произведении xy сумма $x + y$ наименьшая в случае равенства $x = y$. Следовательно, искомый прямоугольник – квадрат.

2. Если стороны прямоугольника x и y, то длина изгороди $2x + 2y$, а площадь xy. Это произведение будет наибольшим тогда же, когда и произведение $4xy$, т. е. $2x \times 2y$; последнее же произведение при постоянной сумме его множителей $(2x + 2y)$ становится наибольшим при $2x = 2y$, т. е. когда участок имеет форму квадрата.

К известным нам из геометрии свойствам квадрата мы можем, следовательно, прибавить еще следующее: из всех прямоугольников он обладает наименьшим периметром при данной площади и наибольшей площадью при данном периметре.

165. БУМАЖНЫЙ ЗМЕЙ

Задача

Змею, имеющему вид сектора, желают придать такой фасон, чтобы он вмещал в данном периметре наибольшую площадь. Какова должна быть форма сектора?

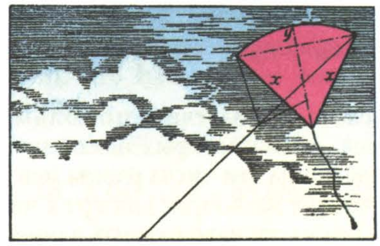


Рис. 25.

Решение

Уточняя требование задачи, мы должны разыскать, при каком соотношении длины дуги сектора и его радиуса площадь его достигает наибольшей величины при данном периметре.

Если радиус сектора x, а дуга y, то его периметр l и площадь S выразятся так (рис. 25):

Величина S достигает максимума при том же значении x, как и произведение $2x(l - 2x)$, т. е. учетверенная площадь. Так как сумма множителей $2x + (l - 2x) = l$, т. е. величина постоянная, то произведение их наибольшее когда $2x = l - 2x$, откуда

$$x = \frac{l}{4}; \quad y = l - 2 \times \frac{l}{4} = \frac{l}{2}.$$

Итак, сектор при данном периметре замыкает наибольшую площадь в том случае, когда его радиус составляет половину дуги (т. е. длина его дуги равна сумме радиусов, или длина кривой части его периметра равна длине прямолинейной). Угол сектора равен 115° – двум радианам. Каковы летные качества такого широкого змея, – вопрос другой, рассмотрение которого в нашу задачу не входит.

165. ПОСТРОЙКА ДОМА

Задача

На месте разрушенного дома, от которого уцелела одна стена, желают построить новый. Длина уцелевшей стены – 12 м. Площадь нового дома должна равняться 112 кв. м. Хозяйственные условия работы таковы:

1) ремонт погонного метра стены обходится в 25% стоимости кладки новой;

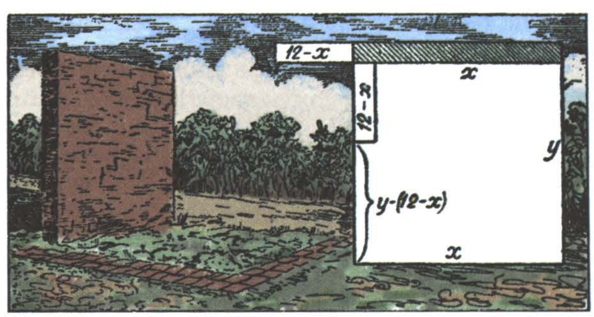


Рис. 26.

2) разбор погонного метра старой стены и кладка из полученного материала новой стены стоит 50% того, во что обходится постройка погонного метра стены из нового материала.

Как при таких условиях наивыгоднейшим образом использовать уцелевшую стену?

Решение

Пусть от прежней стены сохраняется x метров, а остальные $12 - x$ метров разбираются, чтобы из полученного материала возвести заново часть стены нового дома (рис. 26). Если стоимость кладки погонного метра стены из нового материала равна a, то ремонт x метров старой стены будет стоить $\frac{ax}{4}$; возведение участка длиною $12 - x$ обойдется $\frac{a(12-x)}{2}$; прочей части этой стены $a[y - (12 - x)]$, т. е. $a(y + x - 12)$; третьей стены ax, четвертой ay. Вся работа обойдется

$$\frac{ax}{4} + \frac{a(12-x)}{2} + a(y + x - 12) + ax + ay = \frac{a(7x+8y)}{4} - 6a.$$

Последнее выражение достигает наименьшей величины тогда же, когда и сумма

$$7ax + 8ay.$$

Мы знаем, что площадь дома xy равна 112; следовательно,

$$7ax \times 8ay = 112 \times 56a^2,$$

При постоянном произведении сумма $7ax + 8ay$ достигает наименьшей величины тогда, когда

$$7ax = 8ay,$$

откуда

$$y = \frac{7}{8}x.$$

Подставив это выражение для y в уравнение

$$xy = 112,$$

имеем

$$\frac{7}{8}x^2 = 112, \quad x = \sqrt{128} = 11{,}3.$$

А так как длина старой стены 12 *м*, то подлежит разборке только 0,7 *м* этой стены.

166. ЖЕЛОБ НАИБОЛЬШЕГО СЕЧЕНИЯ

Задача

Прямоугольный металлический лист (рис. 27) надо согнуть желобом с сечением в форме равнобокой трапеции. Это можно сделать различными способами, как видно из рис. 28. Какой ширины должны быть боковые полосы, и под каким углом они должны быть отогнуты, чтобы сечение желоба имело наибольшую площадь (рис. 29)?

Решение

Пусть ширина листа l. Ширину отгибаемых боковых полос обозначим через x, а ширину дна желоба через y. Введем еще одно неизвестное z, значение которого ясно из рис. 29.

Площадь S трапеции, представляющей сечение желоба равна

$$S = \frac{(z + y + z) + y}{2}\sqrt{x^2 - z^2} = \sqrt{(y + z)^2(x^2 - z^2)}.$$

Задача свелась к определению тех значений x, y, z, при которых величина S достигает наибольшей величины; при этом сумма $2x + y$ (т. е. ширина листа) сохраняет постоянную величину l. Делаем преобразования:

$$S^2 = (y + z)^2(x + z)(x - z).$$

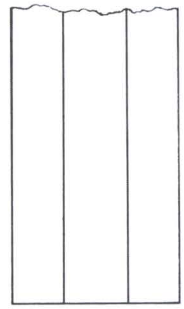


Рис. 27.

S^2 становится наибольшим при тех же значениях x, y, z, как и $3S^2$, последнее же достигает максимума одновременно с выражением

$$(y + z)(y + z)(x + z)(3x - 3z).$$

Сумма этих четырех множителей

$$y + z + y + z + x + z + 3x - 3z = \\ = 2y + 4x = 2l,$$

т. е. неизменна. Поэтому произведение наших четырех множителей максимально, когда они равны между собой, т. е.

$$y + z = x + z \qquad y + z = 3x - 3z.$$

Из первого уравнения имеем

$$y = x,$$

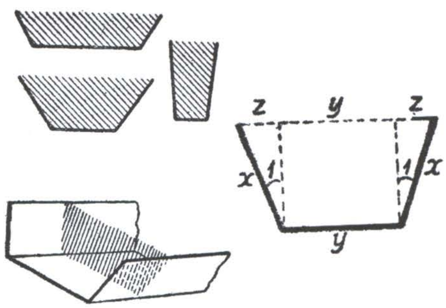


Рис. 28 и 29.

а так как $y + 2x = l$, то

$$x = y = \frac{l}{3}.$$

Из второго уравнения находим

$$z = \frac{x}{2} = \frac{l}{6}.$$

Далее, так как катет z равен половине гипотенузы x (рис. 29), то противолежащий этому катету угол равен 30°, а угол наклона боков желоба ко дну равен

$$90 + 30 = 120°.$$

Итак, желоб будет иметь наибольшее сечение, когда грани его согнуты в форме трех смежных сторон правильного шестиугольника.

167. ВОРОНКА НАИБОЛЬШЕЙ ВМЕСТИМОСТИ

Задача

Из жестяного круга нужно изготовить коническую часть воронки. Для этого в круге вырезают сектор и остальную часть круга свертывают конусом (рис. 30).

Сколько градусов должно быть в дуге сектора, чтобы конус получился наибольшей вместимости?

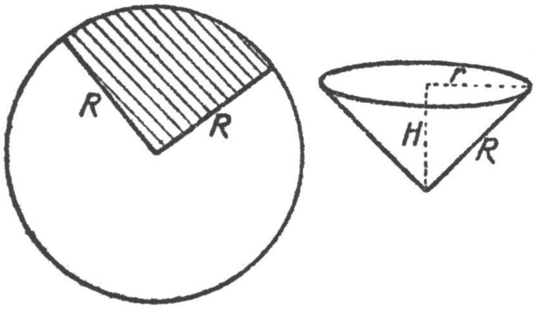


Рис. 30.

Решение

Длину дуги той части круга, которая свертывается в конус, обозначим через x (в линейных мерах). Следовательно, образующей конуса будет радиус R жестяного круга, а окружность основания будет равна x. Радиус r основания конуса определяем из равенства

$$2\pi = x; \quad r = \frac{x}{2\pi}.$$

Высота H конуса равна (по теореме Пифагора) (рис. 30)

$$H = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}};$$

Объем V этого конуса равен

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 H = \frac{\pi}{3}\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}.$$

Это выражение достигает наибольшей величины одновременно с выражением

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \sqrt{R^2 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}$$

и его квадратом

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^4 \left[R^2 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right].$$

Так как

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + R^2 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = R^2$$

есть величина постоянная, то (на основании доказанного на стр. 178) последнее произведение имеет максимум при том значении x, когда

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 : \left[R^2 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right] = 2 : 1,$$

откуда

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = 2R^2 - 2\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2,$$

$$3\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = 2R^2 \qquad \text{и} \qquad x = \frac{2\pi}{3} R\sqrt{6} = 5{,}14R.$$

В градусах дуга $x = 294°$ и, значит, дуга вырезаемого сектора должна содержать 66°.

168. САМОЕ ЯРКОЕ ОСВЕЩЕНИЕ

Задача

На какой высоте над столом должно находиться пламя свечи, чтобы всего ярче освещать лежащую на столе монету?

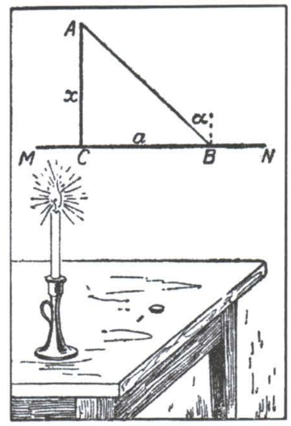


Рис. 31.

Решение

Может показаться, что для достижения наилучшего освещения надо поместить пламя возможно ниже. Это неверно: при низком положении пламени лучи падают очень отлого. Поднять свечу так, чтобы лучи падали круто, – значит удалить источник света. Наиболее выгодна в смысле освещения, очевидно, некоторая средняя высота пламени над столом. Обозначим ее через x (рис. 31). Расстояние BC монеты B от основания C перпендикуляра, проходящего через пламя A, обозначим через a. Если яркость пламени i, то освещенность монеты, согласно законам оптики, выразится так:

$$\frac{i}{AB^2}\cos\alpha = \frac{i\cos\alpha}{(\sqrt{a^2 + x^2})^2} = \frac{i\cos\alpha}{a^2 + x^2},$$

где α – угол падения пучка лучей AB, Так как

$$\cos\alpha = \cos A = \frac{x}{AB} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

то освещенность равна

$$\frac{i}{a^2 + x^2} \times \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{ix}{(a^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Это выражение достигает максимума при том же значении x, как и его квадрат, т. е.

$$\frac{i^2 x^2}{(a^2 + x^2)^{3}}$$

Множитель i^2, как величину постоянную, опускаем, а остальную часть исследуемого выражения преобразуем так:

$$\frac{x^2}{(a^2 + x^2)^3} = \frac{1}{(a^2 + x^2)^2}\left(1 - \frac{a^2}{x^2 + a^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{x^2 + a^2}\right)^2 \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + a^2}\right),$$

потому что

$$1 - \frac{a^2}{x^2 + a^2} = \frac{x^2}{x^2 + a^2}.$$

Преобразованное выражение достигает максимума одновременно с выражением

$$\left(\frac{a^2}{x^2 + a^2}\right)^2 \times \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + a^2}\right),$$

так как введенный постоянный множитель a^2 не влияет на то значение x, при котором произведение достигает максимума. Замечая, что сумма первых степеней этих множителей

$$\frac{a^2}{x^2 + a^2} + 1 - \frac{a^2}{x^2 + a^2} = 1,$$

т. е, величина постоянная, заключаем, что рассматриваемое произведение становится наибольшим, когда

$$\frac{a^2}{x^2 + a^2} : \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + a^2}\right) = 2 : 1.$$

Имеем уравнение

$$a^2 = 2x^2 + 2a^2 - 2a^2.$$

Решив это уравнение, находим:

$$x^2 = \frac{a}{\sqrt{2}} = 0{,}71a.$$

Монета освещается всего ярче, когда источник света находится на высоте 0,71 расстояния от проекции источника до монеты.

Знание этого соотношения помогает при устройстве наилучшего освещения рабочего места.

Леонард Эйлер (1707–1783)

Леонард Эйлер (1707–1783) – швейцарский математик и механик, создавший фундамент современной науки. Это был настолько великий и разносторонний человек, что нашим современникам даже сложно понять, как он один мог сделать столь глубокий научный вклад в такие дисциплины, как математический анализ, дифференциальная геометрия, теория чисел, приближенные вычисления, небесная механика, математическая физика, оптика, баллистика, кораблестроение, теория музыки, всего не перечесть! Так же он глубоко изучал медицину, химию, ботанику, воздухоплавание, множество европейских и древних языков. В течении своей плодотворной жизни Леонард Эйлер выпустил в свет более 850 научных работ, в которых дал последующим поколениям ученых практически все необходимые инструменты для анализа и рассчетов во всех областях механики.

Леонард родился в 1707 г., в Базеле, на северо-западе Швейцарии. Его отцом был протестантский пастор Пауль Эйлер, который учился математике у Якоба Бернулли, другого выдающегося швейцарца – блестящего математика, основателя математического анализа и теории вероятностей. Видимо эти обстоятельства проявились на юном Леонарде, который рано обнаружил математические способности. Учась в лицее, он получил щедрый дар: младший брат Якоба, выдающийся математик того времени, профессор Иоганн Бернулли взял под свою опеку юное дарование и, снабдив Леонарда книгами, занимался с ним математикой дополнительно по субботам. В 19 лет Эйлер уже практически дорос до профессорской кафедры Базельского университета, написав работу «Диссертация по физике о звуке» для участия в конкурсе. Однако, несмотря на то, что работа была оценена положительно, все-таки слишком юный возраст соискателя смутил комиссию.

В силу очень большой конкуренции и малого числа вакансий в швейцарских университетах, многие сверстники Леонарда искали возможности работать за пределами Швейцарии. В один прекрасный день зимы 1726-27 гг., Эйлер получил весть, которая во многом определила его дальнейшую жизнь. Сыновья Бернулли младшего Даниил и Николай, с которыми Леонардо подружился в отрочестве, уехавшие искать свое счастье за границу, прислали Леонардо приглашение на работу в Россию, где в это время учреждалась Академия наук. Вакансий было очень много. Таким образом Эйлер последовал за своими соотечественниками, ранее обосновавшимися в Петербурге. Там он получил должность помощника профессора на кафедре физиологии с окладом в 200 рублей в год, за что и благодарил в письме, сохранившемся до сих пор, первого президента Академии саксонского немца Лаврентия Блюментроста.

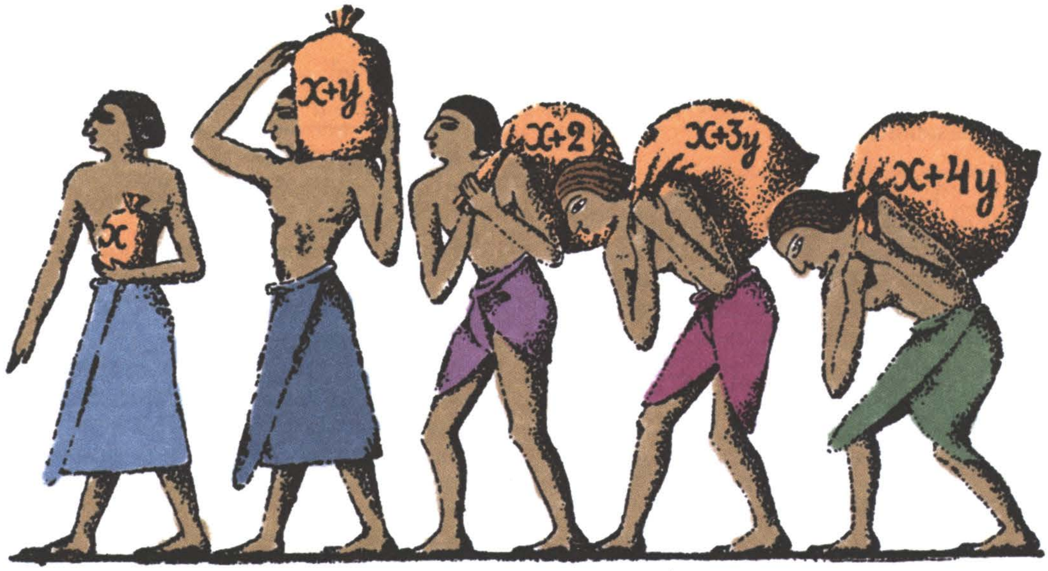
В Петербурге жизнь Эйлера была насыщена научной работой до предела. К 1733 г. он занял освободившуюся после уехавшего домой Даниила Бернулли, кафедру математики, став академиком и профессором. Единственное его отличие от предшественника заключалось в том, что он получал оклад 600 рублей в год, что было ровно в два раза меньше, чем у Даниила. Попутно заметим, что русский язык Леонард выучил за один год....

В это время на молодого академика свалили практически все, что только было можно. Эйлер занимался вопросами картографии, кораблестроения, помогал с рассчетами артиллеристам, работал над пожарными насосами и всевозможными руководствами. В это время он написал 90 крупных научных работ. Его заставляли даже составлять гороскопы...

За время пребывания в России Эйлер, кроме всего прочего, оставил после себя целую плеяду учеников, впоследствии ставшими выдающимися учеными. Среди них можно назвать академика математики С. К. Котельникова и академика-астронома С. Я. Румовского.

Однако, наступивший период «охлаждения» русских царей к наукам и наступившее запустение в Академии, заставило Эйлера в 1741 г. уехать в Пруссию, в Берлин, где он провел следующие 25 лет своей жизни. Там он издает порядка 260 научных работ и руководит кафедрой, обсерваторией и многими другими подразделениями.

Но к 1766 г. натянутые отношение с королем пруссии Фридрихом II, а так же под напором «выгодных предложений» из России, теперь уже на своих условиях, Эйлер с семьей возвращается в Петербург, где и работал до самой смерти в 1783 г.



169. ДРЕВНЕЙШАЯ ПРОГРЕССИЯ

Задача

Древнейшая задача на прогрессии – не вопрос о вознаграждении изобретателя шахмат, насчитывающий за собою двухтысячелетнюю давность, а гораздо более старая задача о делении хлеба, которая записана в знаменитом египетском папирусе Ринда. Папирус этот, разысканный Риндом полвека назад, составлен около 2 000 лет до нашей эры и является списком с другого, еще более древнего математического сочинения, относящегося, быть может, к третьему тысячелетию до нашей эры. В числе арифметических, алгебраических и геометрических задач этого документа имеется такая (приводим ее в вольной передаче):

Сто мер хлеба разделить между пятью людьми так, чтобы второй получил на столько же больше первого, на сколько третий получил больше второго, четвертый больше третьего и пятый больше четвертого. Кроме того, двое первых должны получить в 7 раз меньше трех остальных. Сколько нужно дать каждому?

Решение

Очевидно, количества хлеба, полученные участниками раздела, составляют возрастающую арифметическую прогрессию. Пусть первый ее член x, разность y. Тогда

доля первого x
« второго .... $x + y$
« третьего .... $x + 2y$
« четвертого .... $x + 3y$
« пятого .... $x + 4y$.

На основании условий задачи составляем следующие два уравнения:

$$\begin{cases} x + (x + y) + (x + 2y) + (x + 3y) + (x + 4y) = 100 \\ 7\,[x + (x + y)] = (x + 2y) + (x + 3y) + (x + 4y). \end{cases}$$

После упрощений первое уравнение получает вид:

$$x + 2y = 20,$$

а второе:

$$11x = 2y.$$

Решив эту систему, имеем

$$x = 1\frac{2}{3}; \qquad y = 9\frac{1}{6}.$$

Значит, хлеб должен быть разделен на следующие части:

$$1\frac{2}{3}; \quad 10\frac{5}{6}; \quad 20; \quad 29\frac{1}{6}; \quad 38\frac{1}{3}.$$

170. АЛГЕБРА НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ

Несмотря на пятидесятивековую древность этой задачи на прогрессии, в нашем школьном обиходе прогрессии появились сравнительно недавно. В учебнике Магницкого, изданном двести лет назад и служившем целых полвека основным руководством для школьного обучения, прогрессии хотя и имеются, но общих формул, связывающих входящие в них величины между собою, в нем не дано. Сам составитель учебника не без затруднений справлялся поэтому с такими задачами.

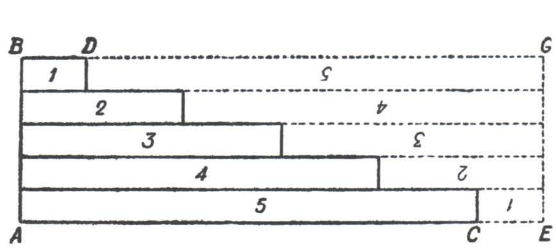


Рис. 32.

Между тем, формулу суммы членов арифметической прогрессии легко вывести простым и наглядным приемом с помощью клетчатой бумаги. На такой бумаге любая арифметическая прогрессия изображается ступенчатой фигурой. Например, фигура ABC на рис. 32 изображает прогрессию:

2; 5; 8; 11; 14.

Чтобы определить сумму ее членов, дополним чертеж до прямоугольника *ABGE*. Получим две равные фигуры *ABDC* и *DGEC*. Площадь каждой из них изображает сумму членов нашей прогрессии. Значит, двойная сумма прогрессии равна площади прямоугольника *ABGE*, т. е.

$$(AC + CE) \times AB.$$

Но $AC + CE$ изображает сумму 1-го и 5-го членов прогрессии; AB – число членов прогрессии. Поэтому двойная сумма

$$2S = (\text{сумма крайних членов}) \times (\text{число членов})$$

или

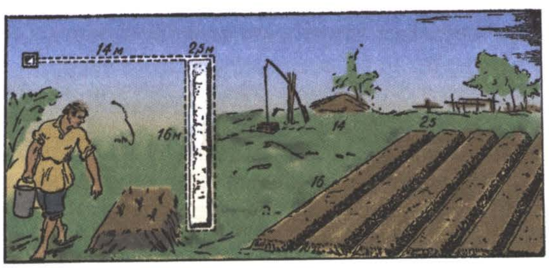
$$S = \frac{(\text{первый+ последний член}) \times (\text{число членов})}{2}.$$

170. ПОЛИВКА ОГОРОДА

Задача

В огороде 30 грядок, каждая длиною 16 *м* и шириною 2,5 *м*. Поливая грядки, огородник приносит ведра с водою из колодца, расположенного в 14 *м* от края огорода (рис. 33), и обходит грядки по меже, причем воды, приносимой за один раз, достаточно для поливки только одной грядки.

Какой длины путь должен пройти огородник, поливая весь огород? Путь начинается и кончается у колодца.



Решение

Для поливки первой грядки огородник должен пройти путь

$$14 + 16 + 2{,}5 + 16 + 2{,}5 + 14 = 65 \text{ м}.$$

При поливке второй он проходит

$$14 + 2{,}5 + 16 + 2{,}5 + 16 + 2{,}5 + 2{,}5 + 14 = 65 + 5 = 70 \text{ м},$$

Каждая следующая грядка требует пути на 5 м длиннее предыдущей. Имеем прогрессию:

$$65;\ 70;\ 75;\ \ldots;\ 65 + 5 \times 29.$$

Сумма ее членов равна

$$\frac{(65 + 65 + 29 \times 5) \times 30}{2} = 4\,125 \text{ м}.$$

Огородник при поливке всего огорода проходит путь в 4,125 *км*.

171. КУРИНОЕ СТАДО

Задача

Для прокормления стада из 31 курицы запасено некоторое количество корма из расчета по декалитру в неделю на каждую курицу. При этом предполагалось, что численность стада меняться не будет. Но так как в действительности число куриц каждую неделю убывало на 1, то заготовленного корма хватило на двойной срок.

Как велик был запас корма и на сколько времени был он первоначально рассчитан?

Решение

Пусть запасено было x декалитров корма на y недель. Так как корм рассчитан на 31 курицу по 1 декалитру на курицу в неделю, то

$$x = 31y.$$

В первую неделю израсходовано было 31 *дл*, во вторую 30, в третью 29 и т. д. до последней недели всего удвоенного срока, когда израсходовано было:

$$(31 - 2y + 1) \text{ дл}^{1}.$$

Весь запас составлял, следовательно:

$$x = 31y = 31 + 30 + 29 + \ldots + (31 - 2y + 1).$$

Сумма $2y$ членов прогрессии, первый член которой 31, а последний $31 - 2y + 1$, равна

$$31y = \frac{(31 + 31 - 2y + 1)\, 2y}{2} = (62 - 2y + 1)\, y.$$

Так как y не может быть равен нулю, то мы вправе обе части равенства сократить на этот множитель. Получаем

$$31 = 62 - 2y + 1 \quad \text{и} \quad y = 16,$$

откуда

$$x = 31y = 496.$$

Запасено было 496 декалитров корма на 16 недель.

172. АРТЕЛЬ ЗЕМЛЕКОПОВ

Задача

Артель землекопов подрядилась вырыть канаву. Если бы она работала в полном составе, канава была бы вырыта в 24 часа. Но в действительности к работе приступил сначала только один землекоп. Спустя некоторое время присоединился второй; еще через столько же времени – третий, за ним через такой же промежуток четвертый и так до последнего. При расчете оказалось, что первый работал в 11 раз дольше последнего.

Сколько времени работал последний?

Решение

Пусть последний землекоп работал x часов, тогда первый работал $11x$ часов. Далее, если число членов артели y, то общее число часов работы определится как сумма y членов убывающей прогрессии, первый член которой $11x$, а последний x, т. е.

$$\frac{(11x + x)y}{2} = 6\,xy.$$

---

[1] Поясним: расход корма в течение
1-й недели 31 дл,
2-й « 31 — 1 *дл*,
3-й « 31 — 2 *дл*,
$2y$-й « 31 ($2y$ — 1) = (31 — $2y$ + 1) *дл*.

С другой стороны, известно, что артель из y человек, работая в полном составе, выкопала бы канаву в 24 часа, – т. е. что для выполнения работы необходимо $24y$ рабочих часов. Следовательно, $6xy = 24y$.

Число y не может равняться нулю; на этот множитель можно поэтому уравнение сократить:

$$6x = 24 \quad \text{и} \quad x = 4.$$

Итак, землекоп, приступивший к работе последним, работал 4 часа.

Мы ответили на вопрос задачи; но если бы мы полюбопытствовали узнать, сколько рабочих входило в артель, то не могли бы этого определить, – несмотря на то, что в уравнении число это фигурировало (под буквою y). Для решения этого вопроса в задаче не приведено достаточных данных.

173. ЯБЛОКИ

Задача

Садовник продал первому покупателю половину всех своих яблок и еще пол-яблока; второму покупателю – половину оставшихся и еще пол-яблока; третьему–половину оставшихся и еще пол-яблока и т. д. Седьмому покупателю он продал половину оставшихся яблок и еще пол-яблока; после этого яблок у него не осталось. Сколько яблок было у садовника?

Решение

Если первоначальное число яблок x, то первый покупатель получил

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2};$$

второй:

$$\frac{1}{2}\left(x - \frac{x+1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2^2};$$

третий:

$$\frac{1}{2}\left(x - \frac{x+1}{2} - \frac{x+1}{4}\right) + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2^3};$$

7-й покупатель $\frac{x+1}{2^7}$.

Имеем уравнение:

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{2^2} + \frac{x+1}{2^3} + \ldots + \frac{x+1}{2^7} = x$$

или

$$(x+1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^7}\right) = x.$$

откуда

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{2^7}, \quad \text{и} \quad x = 2^7 - 1 = 127.$$

Всех яблок было 127.

174. НОВОСТЬ

Задача

Некто, узнав в 10 час. утра важную новость, рассказал о ней в течение ближайшего часа 4 товарищам. Каждый из них в течение ближайшего часа сообщил о ней

четверым другим; каждый из вновь узнавших в течение часа успел поделиться известием с четырьмя знакомыми. Сколько человек может быть осведомлено таким путем к 7 часам вечера?

Решение

Задача сводится к нахождению суммы 10 членов геометрической прогрессии:

$$1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^9 = \frac{4^{10} - 1}{4 - 1} = \frac{2^{20} - 1}{3}.$$

Последнее выражение можно вычислить приближенно, принимая $2^{10} = 1024 \approx 1\,000$

$$\frac{2^{20} - 1}{3} \approx \frac{10^6 - 1}{3},$$

т. е. около трети миллиона. Все население большого города может быть таким образом осведомлено о новости в течение одного дня.

Поразительнее другой расчет в том же роде: если бы новость передавалась так, что каждый, узнавший ее, сообщал ее в течение четверти часа двоим другим, то все человечество было бы осведомлено в 7½ часов.

175. ПРОГРЕССИЯ РАЗМНОЖЕНИЯ

Многочисленные примеры геометрических прогрессий постоянно дает нам сама окружающая нас природа, потому что размножение во всем органическом мире совершается именно по такому закону. Этот факт является одним из камней в фундаменте учения Дарвина. Вот что писал об этом великий натуралист (в «Происхождении видов»):

«Борьба за существование неизбежно вытекает из быстрой прогрессии, в какой стремятся к размножению все органические существа. Каждое существо, в течение своей жизни производящее несколько яиц или семян, неминуемо должно подвергаться истреблению в каком-нибудь возрасте, в какой-нибудь период года или, наконец, в какие-нибудь случайные годы – иначе, в

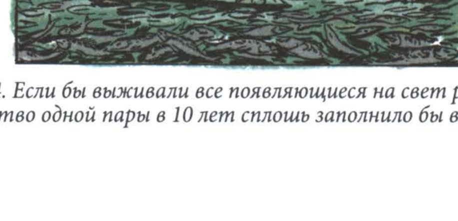


Рис. 34. Если бы выживали все появляющиеся на свет рыбы, то потомство одной пары в 10 лет сплошь заполнило бы все океаны.

силу геометрической прогрессии размножения, численность его достигла бы таких размеров, что ни одна страна в мире не могла бы прокормить или вместить его потомства. Отсюда – так как производится больше особей, чем может выжить,– должна во всех случаях возникать борьба между особями одного вида, либо между особями различных видов, либо же с физическими условиями жизни. Если, быть может, некоторые виды в настоящее время и разрастаются более или менее быстро, – то все виды такого явления представлять не могут, так как Земля не вместила бы их.

Рис. 35. Потомство одной пары крыс в год доходит до 860.

Не существует ни одного исключения из правила, по которому любое органическое существо естественно размножается в такой прогрессии, что, не подвергайся оно истреблению, потомство одной пары покрыло бы всю землю. Даже медленно размножающийся человек в 25 лет удваивается в числе, и при такой прогрессии без малого через 1 000 лет для его потомства не достало бы места, где стоять. Линней вычислил, что если бы какое-нибудь однолетнее растение производило по два семени (а растений с такой слабой производительностью не существует), то через 20 лет его потомство возросло бы до миллиона. Слон плодится медленнее всех известных животных, и я вычислил минимальные размеры его размножения. Он начинает плодиться не ранее 30-летнего возраста и до 90 лет приносит не более 6 детенышей, живет же до 100; допустив эти числа, получим, что в период 740–750 лет от одной пары получилось бы 19 млн.

Но мы имеем свидетельства более убедительные, чем эти теоретические соображения, – именно, случаи поразительно быстрого размножения некоторых животных в природном состоянии, когда условия почему-либо им благоприятствуют в течение ряда лет. Еще поразительнее факты, касающиеся одичания домашних животных в различных странах; если бы указания на быстрое размножение столь медленно плодящегося рогатого скота и лошадей в Южной Америке и Австралии не опирались на самые достоверные свидетельства, они представлялись бы просто невероятными.

Рис. 36. Прогрессия размножения человека.

То же и с растениями; можно было бы привести примеры растений, сделавшихся совершенно обыкновенными на протяжении целых островов в период менее 10 лет после того, как они были ввезены. Геометрическая прогрессия их размножения, результаты которой всегда нас поражают, весьма просто объясняет быстрое возрастание их численности и широкое расселение в новом отечестве.

Мы с уверенностью можем утверждать, что все животные и растения стремятся размножиться в геометрической прогрессии, что они переполнили бы все

места, в которых только могли бы ужиться, и что стремление к размножению в геометрической прогрессии должно удерживаться в границах только истреблением в каком-нибудь периоде жизни».

Проверку приведенных в этом отрывке расчетов предоставляю читателю проделать самостоятельно – по образцу тех вычислений, которые выполняются в ряде следующих примеров.

176. РАЗВЕДЕНИЕ КРОЛИКОВ

Задача

Кролик – одно из наиболее быстро размножающихся млекопитающих. Самка в течение года рождает 7 раз, принося каждый раз до 8 детенышей, которые в течение одного года вырастают настолько, что становятся в свою очередь способны к размножению. Вычислите примерную численность потомства одной пары кроликов после 10 лет беспрепятственного размножения.

Решение

Так как расчет требуется только приблизительный, то для облегчения вычислений будем округлять числа. Примем, что самка кролика в течение года приносит около 50 детенышей, среди которых 25 самок. Тогда численность потомства в последовательные годы будет составлять по истечении

1 года 50

2 лет $50 + 25 \times 50$

3 лет $50 + 25 \times 50 + 25 \times 25 \times 50 = 50 + 50 \times 25 + 50 \times 25^2$

. . . .

10 лет $50 + 50 \times 25 + 50 \times 25^2 + \ldots\ldots\ldots + 50 \times 25^9$

Последний, ряд чисел представляет геометрическую прогрессию с знаменателем 25. Сумма ее 10 членов равна

$$\frac{50 \times 25^9 \times 25 - 50}{25 - 1} \approx 2 \times 25^{10}$$

Приближенное вычисление этой степени можно выполнить без логарифмов следующим образом:

$$25^{10} = \left(\frac{100}{4}\right)^{10} = \left(\frac{10}{2}\right)^{20} = \frac{10^{20}}{2^{20}} = \frac{10^{20}}{2^{10} \times 2^{10}}.$$

Но $2^{10} = 1\,024 \approx 1\,000$, или 10^3; поэтому

$$2 \times 25^{10} \approx \frac{2 \times 10^{20}}{10^3 \times 10^3} = 200 \times 10^{12}.$$

или двести биллионов. Вспомним, что число квадратных метров поверхности всей суши почти вдвое меньше этого: 125 биллионов!

При разведении кроликов значительная часть их потребляется с хозяйственной целью. Предположим, что потребляется 80% приплода, и рассчитаем, какое при таком условии накопится стадо по истечении 10 лет.

По истечении:

1 года $50 - 50 \times 0{,}8 = 50 \times 0{,}2 = 10$

2 лет $10 + 50 \times 5 \times 0{,}2 = 10 + 10 \times 5$

3 лет $10 + 10 \times 5 + 5 \times 5 \times 50 \times 0{,}2 = 10 + 10 \times 5 + 10 \times 5^2$

. . . .

10 лет $10 + 10 \times 5 + 10 \times 5^2 + \ldots + 10 \times 5^9$.

Сумма членов последнего ряда чисел равна

$$\frac{10 \times 5^9 \times 5 - 10}{5 - 1} = \frac{10}{4} \times 5^{10} = \frac{5}{2} \times \left(\frac{10}{2}\right)^{10} \approx 2{,}5 \times \frac{10^{10}}{2^{10}}.$$

Но $2^{10} \approx 10^3$; поэтому искомая сумма приблизительно равна

$$2{,}5 \times \frac{10^{10}}{10^3} = 2{,}5 \times 10^7 = 25 \text{ млн.}$$

Кроличье стадо даже при потреблении 80% приплода достигло бы через 10 лет численности в десятки миллионов!

177. ПОКУПКА ЛОШАДИ

Задача

В старинной арифметике Магницкого мы находим следующую забавную задачу, которую привожу здесь, не сохраняя языка подлинника:

Некто продал лошадь за 156 руб. Но покупатель, приобретя лошадь, раздумал ее покупать и возвратил продавцу, говоря:

– Нет мне расчета покупать за такую цену лошадь, которая таких денег не стоит.

Тогда продавец предложил другие условия:

– Если по-твоему цена лошади высока, то купи только ее подковные гвозди, лошадь же получишь тогда в придачу бесплатно. Гвоздей в каждой подкове 6. За первый гвоздь дай мне всего ¼ коп., за второй – ½ коп., за третий – 1 коп. и т. д.

Рис. 37.

Покупатель, соблазненный низкой ценой и желая даром получить лошадь, принял условия продавца, рассчитывая, что за гвозди придется уплатить не более 10 рублей.

На сколько покупатель проторговался?

Решение

За 24 подковных гвоздя пришлось уплатить

$$\tfrac14 + \tfrac12 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{24-3}.$$

Сумма эта равна

$$\frac{2^{21} \times 2 - \frac{1}{4}}{2 - 1} = 2^{22} - \frac{1}{4} = 4\,194\,303\frac{3}{4} \text{ коп.},$$

т. е. около 42 тысяч рублей. При таких условиях не обидно дать и лошадь в придачу.

Любопытно, что известный знаток истории математики проф. В. В. Бобынин считал эту задачу ниоткуда Магницким не заимствованной, а придуманной им самостоятельно. Однако, она встречается в книге современного английского физика Лоджа «Легкая математика». Так как Лодж едва ли читал Магницкого, то ясно, что интересующая нас задача принадлежит к числу тех, которые столетия назад были придуманы безвестными математиками из народа.

178. ВОЗНАГРАЖДЕНИЕ ВОИНА

Задача

Из другого старинного русского учебника математики, носящего пространное заглавие:

«Полный курс чистой математики, сочиненный Артиллерии Штык-Юнкером и Математики партикулярным Учителем Ефимом Войтяховским в пользу и употребление юношества и упражняющихся в Математике» (1795),

заимствую следующую задачу:

«Служившему воину дано вознаграждение за первую рану 1 коп., за другую 2 коп., за третью 4 коп. и т. д. По исчислению нашлось, что воин получил всего вознаграждения 655 р. 35 к. Спрашивается число его ран».

Решение

Составляем уравнение:

$$65\,535 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{x-1}$$

или

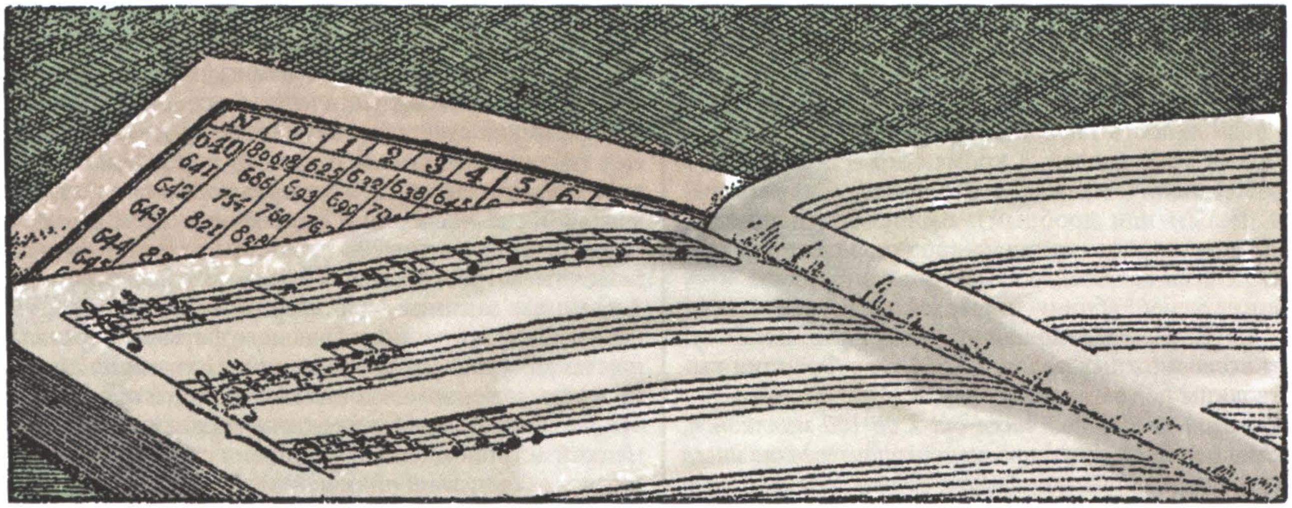
$$65535 = \frac{2^{x-1} \times 2 - 1}{2 - 1} = 2^x - 1,$$

откуда имеем

$$65\,536 = 2^x \quad \text{и} \quad x = 16,$$

– результат, который легко находим путем испытаний.

При столь великодушной системе вознаграждения боец должен получить 16 ран и остаться притом в живых, чтобы удостоиться награды в 655 р. 35 к.



179. СЕДЬМОЕ ДЕЙСТВИЕ

Мы упоминали уже, что пятое действие – возвышение в степень – имеет два обратных. Если

$$a^b = c,$$

то разыскание ***a*** есть одно обратное действие – извлечение корня; нахождение же ***b*** – другое, логарифмирование. Полагаю, что читатель этой книги знаком с основами учения о логарифмах в объеме школьного курса. Для него, вероятно, не составит труда сообразить, чему, например, равно такое выражение:

$$a^{\lg_a b}.$$

Нетрудно понять, что если основание логарифмов (*a*) возвысить в степень логарифма числа *b*, то должно получиться это число *b*.

Для чего были придуманы логарифмы? Конечно, для ускорения и упрощения вычислений. Изобретатель первых логарифмических таблиц, гениальный математик-любитель Непер, так говорит о своих побуждениях:

– «Я старался, насколько мог и умел, отделаться от трудности и скуки вычислений, докучность которых обычно отпугивает весьма многих от изучения математики».

В самом деле, логарифмы чрезвычайно облегчают и ускоряют вычисления, – не говоря уже о том, что они дают возможность производить такие операции, которые без их помощи совершенно невыполнимы (извлечение корня любой степени). Не без основания писал Лаплас, что «изобретение логарифмов, сокращая вычисления нескольких месяцев в труд нескольких дней, словно удваивает жизнь астрономов». Великий математик говорит об астрономах, так как им приходится делать особенно сложные и утомительные вычисления. Но слова его с полным правом могут быть отнесены ко всем вообще, кому приходится иметь дело с числовыми выкладками.

Нам, привыкшим к употреблению логарифмов и к доставляемым ими облегчениям выкладок, трудно представить себе то изумление и восхищение, которое вызвали они при своем появлении. Современник Непера, талантливый математик Бригг, прославившийся позднее изобретением десятичных логарифмов, писал, получив сочинение Непера: «Своими новыми и удивительными логарифмами Непер заставил меня усиленно работать и головой и руками. Я надеюсь увидеть его летом, так как никогда не читал книги, которая нравилась бы мне больше и приводила, бы в большее изумление». Бригг осуществил свое намерение и направился в Шотландию, чтобы посетить изобретателя логарифмов. При встрече оба математика первые четверть часа безмолвно рассматривали друг друга; наконец Бригг сказал:

– «Я предпринял это долгое путешествие с единственной целью видеть вас и узнать, помощью какого орудия остроумия и искусства были вы приведены к первой мысли о превосходном пособии для астрономии – логарифмах. Впрочем, теперь я больше удивляюсь тому, что никто не нашел их раньше, – настолько кажутся они простыми после того, как о них узнаешь».

180. СОПЕРНИКИ ЛОГАРИФМОВ

Ранее изобретения логарифмов потребность в ускорении выкладок породила таблицы иного рода, помощью которых действие умножения заменяется не сложением, а вычитанием. Устройство этих таблиц основано на тождестве:

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4},$$

в верности которого легко убедиться, раскрыв скобки.

Имея готовые четверти квадратов, можно находить произведение двух чисел, не производя умножения, а вычитая из четверти квадрата суммы этих чисел четверть квадрата их разности. Те же таблицы облегчают возвышение в квадрат и извлечение квадратного корня, а в соединении с таблицей обратных чисел – упрощают и действие деления. Их преимущество перед таблицами логарифмическими состоит в том, что помощью их получаются результаты точные, а не приближенные. Зато они уступают логарифмическим в ряде других пунктов, практически гораздо более важных. В то время как таблицы четвертей квадратов позволяют перемножать только два числа, логарифмы дают возможность находить сразу произведение любого числа множителей, а кроме того – возвышать в любую степень и извлекать корни с любым показателем (целым или дробным). Вычислять, например, сложные проценты помощью таблиц четвертей квадратов нельзя.

Тем не менее таблицы четвертей квадратов издавались и после того, как появились логарифмические таблицы всевозможных родов. В 1856 г. во Франции вышли таблицы под заглавием:

«Таблица квадратов чисел от 7 до 100 миллионов, помощью которой находят точное произведение чисел весьма простым приемом, более удобным, чем помощью логарифмов. Составил Александр Коссар».

Идея эта возникает у многих, не подозревающих о том, что она уже давно осуществлена. Ко мне раза два обращались изобретатели подобных таблиц, как с новинкой, и очень удивлялись, узнав, что их изобретение имеет более чем трехсотлетнюю давность.

Другим, более молодым соперником логарифмов являются вычислительные таблицы, имеющиеся во многих технических справочниках. Это сводные таблицы, содержащие следующие графы: квадраты чисел, кубы, квадратные корни, кубические корни, обратные числа, длины, окружности и площади кругов для чисел от 2 до 1 000. Для многих технических расчетов таблицы эти очень удобны; однако, они не всегда достаточны; логарифмические имеют гораздо более обширную область применения.

181. ЭВОЛЮЦИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ТАБЛИЦ

В современных школах у нас чаще всего употребляются 5-значные, в Германии же – 4-х значные логарифмические таблицы. Следовало бы и нам остановиться окончательно на 4-х значных, так как они вполне достаточны для технических расчетов. А для большинства практических надобностей можно успешно обходиться даже 3-х значными мантиссами: ведь обиходные измерения редко выполняются более чем с тремя знаками. Мысль о достаточности более коротких мантисс осознана сравнительно недавно. Я помню еще время, когда в наших школах были в употреблении увесистые томы 7-значных логарифмов, уступившие свое место 5-значным лишь после упорной борьбы. Французский астроном Лаланд, составитель первых 5-значных таблиц, много способствовал их проникновению в школьный обиход заявлением, что все свои астрономические вычисления он выполняет именно по таким таблицам.

Но и 7-значные логарифмы при своем появлении (1794 г.) казались непозволительным новшеством. Первые десятичные логарифмы, созданные трудом лондонского математика Генриха Бригга (1624 г.), были 14-значные. Их сменили спустя несколько лет 10-значные таблицы голландского математика Андриана Влакка.

Как видим, эволюция ходовых логарифмических таблиц шла от многозначных мантисс к более коротким и не завершилась еще в наши дни, так как и теперь многими не осознана та простая мысль, что точность вычислений не может превосходить точности измерений.

Укорочение мантисс влечет за собой два важных практических следствия: 1) заметное уменьшение объема таблиц и связанное с этим 2) упрощение пользования ими, а значит – и ускорение выполняемых помощью их вычислений. Семизначные логарифмы чисел занимают около 200 страниц большого формата; 5-значные – 30 страничек вдвое меньшего формата; 4-хзначные занимают вдесятеро меньший объем, умещаясь на двух страницах большого формата[1]; трехзначные же могут поместиться на одной странице, как видно из приложенного в конце нашей книги образчика.

Что же касается быстроты вычислений, то один немецкий астроном (Энке) установил следующее соотношение: расчет, выполняемый по 5-значным таблицам, берет втрое меньше времени, чем по 7-значным.

181. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ДИКОВИНКИ

Если вычислительные потребности практической жизни и технического обихода вполне обеспечиваются 3- и 4-хзначными таблицами, то, с другой стороны, к услугам теоретического исследователя имеются таблицы и с гораздо большим числом знаков, чем даже 14-значные логарифмы Бригга. Вообще говоря, логарифм в большинстве случаев есть число иррациональное и не может быть выражен совершенно точно никаким числом цифр; логарифмы большинства чисел, сколько бы знаков ни брать, выражают их истинную величину лишь приближенно, – тем точнее, чем больше цифр в их мантиссе. Для научных работ оказывается иногда недостаточной точность 14-значных логарифмов[2]; но среди 500 всевозможных образцов логарифмических таблиц, вышедших в свет со времени их изобретения, исследователь всегда найдет такие, которые его удовлетворят. Назовем, например, 20-значные логарифмы чисел от 2 до 1200, изданные во Франции Калле (1795). Для еще более ограниченной группы чисел имеются таблицы логарифмов с огромным числом десятичных знаков – настоящие логарифмические диковинки, о существовании которых, как я убедился, не подозревают и многие математики.

Вот эти логарифмы-исполины; все они не десятичные, а натуральные[3]:

48-значные таблицы Вольфрама для чисел до 10 000;

61-значные таблицы Шарпа;

102-значные таблицы Паркхерста и, наконец, логарифмическая сверхдиковинка:

260-значные логарифмы Адамса.

---

[1] Исключение составляют 4-х значные таблицы Н. П. Каменщикова, которые вследствие нерационального устройства, по объему не уступают 5-значным.

[2] 14-значные логарифмы Бригга имеются, впрочем, только для чисел от 1 до 20000 и от 90 000 до 100000.

[3] Натуральными называются логарифмы, вычисленные не при основании 10, а при основании числа 2,718..., о котором у нас еще будет речь впереди.

В последнем случае мы имеем, впрочем, не таблицу, а только так называемые натуральные логарифмы 5 чисел: 2, 3, 5, 7 и 10 и переводный (260-значный) множитель для перечисления их в десятичные. Нетрудно, однако, понять, что, имея логарифмы этих пяти чисел, можно простым сложением или умножением получить логарифмы множества составных чисел; например, логарифм 12 равен сумме логарифмов 2, 2 и 3, и т. п.

К логарифмическим диковинкам можно было бы с полным основанием отнести и счетную линейку – «деревянные логарифмы» – если бы этот остроумный прибор не сделался, благодаря своему удобству, столь же обычным счетным орудием для техников, как десятикосточковые счеты среди конторских работников. Привычка угашает чувство изумления перед прибором, работающим по принципу логарифмов и тем не менее не требующим от пользующихся им даже знания того, что такое логарифм.

Подлинной логарифмической диковинкой является дорогой и редкий прибор для вычисления логарифмов. Утомительные и долгие выкладки заменяются работой остроумно придуманного механизма, который не только вычисляет один логарифм за другим, но и заготовляет типографский стереотип [1] для их печатания. Свыше 2½ страниц набора таблиц машина изготовляет за то время, пока самый искусный наборщик успеет набрать только одну страницу с готового оригинала.

182. ПРОСТЕЙШАЯ ТАБЛИЦА ЛОГАРИФМОВ

Самая простая логарифмическая таблица, вполне пригодная для практических целей, дана в конце настоящей книги. Это – трехзначные логарифмы в том виде, в каком они предложены английским физиком Лоджем и усовершенствованы мною (прибавлением готовых поправок). Способ обращения с таблицей не требует долгих пояснений; он ясен из сопровождающего ее текста. Такую табличку полезно иметь всегда при себе.

Впрочем, если в дороге или на экскурсии она при вас не окажется, вы без большого труда и обширных познаний в математике сами сможете ее вычислить. Вообще говоря, вычисление логарифмов – дело весьма не легкое, особенно когда желают получить мантиссу с большим числом знаков. Труд, затраченный на это составителями первых таблиц, – совершенно беспримерен в истории математики. Чтобы вычислить, например, логарифм 2, Бригг выполнил 47 последовательных извлечений квадратного корня из числа 1024, – каждое с 18 десятичными знаками! Этот египетский труд был облегчен позднее, с тех пор, как в конце XVII в. математик Меркатор нашел более легкий и быстрый способ (логарифмический ряд).

Сейчас сказанное относится к логарифмам с многозначной мантиссой; трехзначные же логарифмы вычисляются весьма просто, если воспользоваться приемом, которым – в числе прочих – Бригг облегчал свою чудовищную вычислительную работу.

Вычислим, например, логарифм 2. Мы знаем, что $2^{10} = 1024$. Значит $10 \lg 2 = \lg 1024$ и

$$\lg 2 = \frac{\lg 1024}{10}.$$

Приближенно – с точностью до двух цифр – мы можем принять, что lg 1 024 равен lg 1 000. Тогда, употребляя знак приближенного равенства,

$$\lg 2 \approx 0{,}30.$$

Ошибка, допущенная нами, равна $\frac{0{,}024}{10}$, т. е. 0,0024 от 2.

Так как небольшую прибавку логарифма можно считать пропорциональной соответствующей прибавке числа, то приближенный результат 0,30 надо исправить прибавлением к нему 0,0024 его величины,

$$0{,}30 \times 0{,}0024 = 0{,}000720 \approx 0{,}001$$

$$\lg 2 = 0{,}30 + 0{,}001 = 0{,}301.$$

Сходным образом вычисляем lg 3. При этом исходим из равенства $3^4 = 81$. Значит, $4 \lg 3 = \lg 81$

$$\lg 3 = \frac{\lg 81}{4} \approx \frac{\lg 80}{4}.$$

Но $80 = 10 \times 2^3$; $\lg 80 = 1 + 3 \lg 2 = 1{,}903$

Исправляем этот приближенный результат на $\frac{1}{4} \times \frac{1}{80}$, т. е. на $\frac{1}{320}$, или 0,003 его величины (округленной до 0,48)

$$0{,}48 \times 0{,}003 \approx 0{,}001$$

$$0{,}476 + 0{,}001 = 0{,}477.$$

Логарифмы 4, 5, 6 находим еще проще, потому что

$$\lg 4 = 2 \lg 2 = 0{,}602$$

$$\lg 5 = \lg 10 - \lg 2 = 1 - 0{,}301 = 0{,}699$$

$$\lg 6 = \lg 2 + \lg 3 = 0{,}778.$$

Чтобы найти lg 7, подыскиваем такую степень 7, которая мало отличается от числа, получаемого перемножением чисел 2, 3 и 5. Бригг воспользовался равенством $7^4 = 2\,401$; последуем его примеру

$$\lg 7 = \frac{\lg 2\,401}{4} \approx \frac{\lg 2\,400}{4},$$

Но $2\,400 = 100 \times 2^3 \times 3$; значит, $\lg 2\,400 = 2 + 3 \lg 2 + \lg 3 = 2 + 0{,}903 + 0{,}477 = 3{,}380$.

$$\lg 7 = \frac{3{,}380}{4} = 0{,}845.$$

Исправлять этот логарифм нет надобности, так как соответствующая поправка, составляющая $\frac{1}{9600}$ его величины, не влияет на 3-ю цифру мантиссы.

Читатель, уловивший из этих примеров сущность приема, сам может вычислить другие логарифмы. Трудность представляют только числа простые; логарифмы чисел составных определяются, как суммы логарифмов их простых множителей. Что же касается простых чисел, то всегда можно найти подходящую степень или кратное, которое нас выручит. Приведем несколько примеров.

Для вычисления lg 11 мы, следуя Бриггу, можем воспользоваться равенством

$$99^2 = 9\,801$$

$$3^2 \times 11^2 \approx 9800$$

[1] Стереотип – клише используемое в типографском деле.

$$11^2 \approx \frac{7^2 \times 2 \times 100}{3^2}$$

и, следовательно,

$$\lg 11 \approx \frac{2 \lg 7 + \lg 2 + 2 - 2 \lg 3}{2}.$$

Так как lg 7, lg 2 и lg 3 уже известны, то вычисление этим путем вполне возможно; поправка излишня.

Чтобы вычислить lg 13, исходим из равенства

$$13^3 = 2\,197 \approx 2\,200.$$

Для lg 17 прибегаем к равенству

$$17^3 = 4\,913 \approx 4900.$$

Для lg 19 – к равенству

$$19^2 = 361 \approx 360.$$

Для lg 23 – к равенству

$$23^2 = 529 \approx 530$$

$$(a\ 53^2 = 2\,809 \approx 2\,800).$$

Для lg 29 – к равенству

$$29^2 = 841 \approx 840.$$

Для lg 31 – к равенству

$$31^2 = 961 \approx 960.$$

И так далее до lg 97, который вычисляется помощью равенства

$$97^2 = 9\,409 \approx 9\,400.$$

Логарифмы же трехзначных чисел – 111 и т. д. – можно вычислять пропорциональным изменением логарифмов чисел – 110 и т. д. Только для 101, 102 и др. понадобится прибегнуть к степеням:

$$101^2 = 10\,201 \approx 10\,200 \approx 2 \times 3 \times 17 \times 100 \qquad \text{и т. д.}$$

183. ЛОГАРИФМЫ НА ЭСТРАДЕ

Самый поразительный из номеров, выполняемых перед публикой профессиональными счетчиками, без сомнения следующий. Предуведомленные афишей, что счетчик-виртуоз будет извлекать в уме корни высоких степеней из многозначных чисел, вы заготовляете дома путем терпеливых выкладок 31-ю степень какого-нибудь числа и намерены сразить счетчика 35-значным числовым линкором. В надлежащий момент вы обращаетесь к счетчику со словами:

– А попробуйте извлечь корень 31-й степени из следующего 35-значного числа! Запишите, я продиктую.

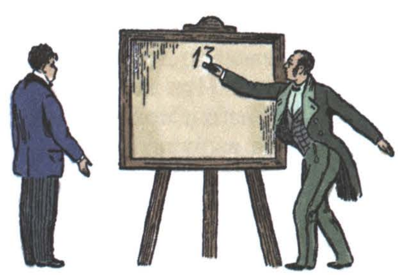


Рис. 38.

Виртуоз-вычислитель берет мел, но прежде чем вы успели открыть рот, чтобы произнести первую цифру, у него уже написан результат: 13.

Не зная числа, он извлек из него корень, да еще 31-й степени, да еще в уме, да еще с молниеносной быстротой!...

Вы изумлены, уничтожены, – а между тем во всем этом нет ничего сверхъестественного. Секрет просто в том, что существует только одно число, именно 13, которое в 31-й степени дает 35-значный результат. Числа меньшие 13 дают меньше 35 цифр, большие – больше.

Откуда, однако, счетчик знал это? Как разыскал он число 13? Ему помогли логарифмы, двузначные логарифмы, которые он помнит наизусть для первых 15–20 чисел. Затвердить их вовсе не так трудно, как кажется, особенно, если пользоваться тем, что логарифмы чисел составных равны сумме логарифмов их простых множителей. Зная твердо логарифмы 2, 3 и 7 [1], вы уже знаете логарифмы чисел первого десятка; для второго десятка требуется помнить логарифмы еще четырех чисел.

Как бы то ни было, эстрадный вычислитель мысленно располагает следующей табличкой двузначных логарифмов (см. ниже).

Изумивший вас математический трюк состоял в следующем:

$$\lg \sqrt[31]{(35\ \text{цифр})} = \frac{34,\ldots}{31}.$$

Искомый логарифм может заключаться между пределами

$$\frac{34}{31} \text{ и } \frac{34{,}99}{31}, \text{ или между 1,09 и 1,13.}$$

В этом интервале имеется только логарифм одного целого числа, именно 1,11 – логарифм 13-ти. Таким путем и найден ошеломивший вас результат. Конечно, чтобы быстро проделать все это в уме, надо обладать находчивостью и сноровкой профессионала, – но по существу дело, как видите, достаточно просто. Вы и сами можете теперь проделывать подобные фокусы, если не в уме, то на бумаге.

Числа	Лог.	Числа	Лог.
2	0,3	11	1,04
3	0,48	12	1,03
4	0,6	13	1,11
5	0,7	14	1.15
6	0,78	15	1,18
7	0,84	16	1,20
8	0,9	17	1,23
9	0,95	18	1,25
		19	1,28

Предположим, вам предложена задача: извлечь корень 64-й степени из 20-значного числа.

Не осведомившись о том, что это за число, вы можете объявить результат извлечения: корень равен 2.

В самом деле

$$\lg \sqrt[64]{(20\ \text{цифр})} = \frac{19,\ldots}{64};$$

он должен, следовательно, заключаться между

$$\frac{19}{64} \text{ и } \frac{19,99}{64}, \text{ т. е. между } 0,29 \text{ и } 0,31.$$

Такой логарифм для целого числа только один: 0,3, т. е. логарифм 2.

Вы даже можете окончательно поразить загадчика, сообщив ему, какое число он собирался вам продиктовать: знаменитое «шахматное» число

$$2^{64} = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 616.$$

184. ЛОГАРИФМЫ НА СКОТНОМ ДВОРЕ

Задача

Количество так называемого «поддерживающего» корма (т. е. то наименьшее количество его, которое лишь пополняет траты организма на теплоотдачу, работу внутренних органов, восстановление отмирающих клеток и т. п.)[1] пропорционально наружной поверхности тела животного. Зная это, определите калорийность поддерживающего корма для вола, весящего 420 кг, если при тех же условиях вол 630 кг весом нуждается в 13 500 калориях.

Решение

Чтобы решить эту практическую задачу из области животноводства, понадобится кроме алгебры привлечь на помощь и геометрию. Согласно условию задачи, искомая калорийность x пропорциональна поверхности (s) вола, т. е.

$$\frac{x}{13\ 500} = \frac{s}{s_1},$$

где s_1 – поверхность тела вола, весящего 930 кг. Из геометрии мы знаем, что поверхности (s) подобных тел относятся как квадраты из линейных размеров (l), а объемы (и, следовательно, веса) – как кубы линейных размеров. Поэтому

$$\frac{s}{s_1} = \frac{l^2}{l_1^2}; \quad \frac{420}{630} = \frac{l^3}{l_1^3}, \text{ и значит, } \quad \frac{l}{l_1} = \frac{\sqrt[3]{420}}{\sqrt[3]{630}},$$

откуда

$$\frac{x}{13\ 500} = \frac{\sqrt[3]{420}}{\sqrt[3]{630}} = \sqrt[3]{\left(\frac{420}{630}\right)^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$x = 13\ 500 \sqrt[3]{\frac{4}{9}}.$$

Помощью логарифмических таблиц находим

$$x = 10\ 300.$$

Вол нуждается в 10 300 калориях.

Музыканты редко увлекаются математикой; большинство их, питая к этой науке чувство уважения, предпочитает держаться от нее подальше. Между тем музыканты – даже те, которые не проверяют, подобно Сальери у Пушкина, «алгеброй гармонию», – соприкасаются с математикой гораздо чаще, чем сами подозревают, и притом с такими страшными вещами, как логарифмы.

[1] В отличие от «продуктивного» корма, т. е. части корма, идущей на выработку продукции животного, ради которой оно содержится.

185. ЛОГАРИФМЫ В МУЗЫКЕ

Позволю себе по этому поводу привести отрывок из статьи нашего известного физика проф. А. Эйхенвальда[2].

«Товарищ мой по гимназии любил играть на рояле, но не любил математики. Он даже говорил с оттенком пренебрежения, что музыка и математика друг с другом ничего не имеют общего. «Правда, Пифагор нашел какие-то соотношения между звуковыми колебаниями, – но ведь как раз пифагорова-то гамма для нашей музыки и оказалась неприменимой».

Представьте же себе, как неприятно был поражен мой товарищ, когда я доказал ему, что, играя по клавишам современного рояля, он играет, собственно говоря, на логарифмах... И действительно, так называемые «ступени» темперированной хроматической гаммы не расставлены на равных расстояниях ни по отношению к числам колебаний, ни по отношению к длинам волн соответствующих звуков, а представляют собою логарифмы этих величин. Только основание этих логарифмов равно 2, а не 10, как принято в других случаях.

Положим что нота ***do*** самой низкой октавы – будем ее называть нулевой октавой – определена n колебаниями в секунду. Тогда ***do*** первой октавы будет делать в секунду $2n$ колебаний, а m-й октавы $n \times 2^m$ колебаний и т. д. Обозначим все ноты хроматической гаммы рояля номерами p, принимая основной тон ***do*** каждой октавы за нулевой; тогда, например, тон ***sol*** будет 7-й, ***la*** будет 9-й и т. д.; 12-й тон будет опять ***do***, только октавой выше. Так как в темперированной хроматической гамме каждый последующий тон имеет в $\sqrt[12]{2}$ большее число колебаний, чем предыдущий, то число колебаний любого тона можно выразить формулой

$$N_{pm} = n \times 2^m(\sqrt[12]{2})^p.$$

Логарифмируя эту формулу, получаем:

$$\lg N_{pm} = \lg n + m \lg 2 + p\frac{\lg 2}{12}$$

или

$$\lg N_{pm} = \lg n + \left(m + \frac{p}{12}\right) \lg 2,$$

[2] Она была напечатана в «Русск. астрономич. календаре на 1919 г.» и озаглавлена «О больших и малых расстояниях».

а принимая число колебаний самого низкого ***do*** за единицу ($n = 1$) и переводя все логарифмы к основанию, равному 2 (или попросту принимая $\lg 2 = 1$), имеем

$$\lg_2 N_{pm} = m + \frac{p}{12}.$$

Отсюда видим, что номера клавишей рояля представляют собою логарифмы чисел колебаний соответствующих звуков. Мы даже можем сказать, что номер октавы представляет собою характеристику, а номер звука в данной октаве – мантиссу этого логарифма».

Например, — поясним от себя, — в тоне ***sol*** третьей октавы, т. е. в числе $3 + \frac{7}{12}$ (= 3,083), число 3 есть характеристика логарифма числа колебаний этого тона, а $\frac{7}{12}$ (= 0,083) — мантисса того же логарифма при основании 2; число колебаний, следовательно, в $2^{3,083}$, т. е. в 8,47 раза больше числа колебаний тона ***do*** первой октавы.

186. ЗВЕЗДЫ, ШУМ И ЛОГАРИФМЫ

Заголовок этот, связывающий столь, казалось бы, несоединимые вещи, не притязает быть пародией на произведения Кузьмы Пруткова; речь в самом деле пойдет о звездах и о шуме в тесной связи с логарифмами.

Шум и звезды объединяются здесь потому, что и громкость шума и яркость звезд оцениваются одинаковым образом — по логарифмической шкале.

Астрономы распределяют звезды по степеням видимой яркости на светила первой величины, второй величины, третьей и т. д. Последовательные звездные величины воспринимаются глазом, как члены арифметической прогрессии. Но физическая яркость их изменяется по иному закону: объективные яркости составляют геометрическую прогрессию с знаменателем 2,5. Легко понять, что «величина» звезды представляет собою не что иное, как логарифм ее физической яркости. Звезда, например, 3-й величины ярче звезды 1-й величины в $2{,}5^{(3-1)}$ т. е. в 6,25 раза. Короче сказать, оценивая видимую яркость звезд, астроном оперирует с таблицей логарифмов, составленной при основании 2,5. Не останавливаюсь здесь подробнее на этих интересных соотношениях, так как им уделено достаточно страниц в другой моей книге «Занимательная астрономия».

Сходным образом оценивается и громкость шума. Вредное влияние промышленных шумов на здоровье рабочих и на производительность труда побудило выработать приемы точной числовой оценки громкости шума. Единицей громкости служит «бел», практически — его десятая доля, «децибел». Последовательные степени громкости — 1 бел, 2 бела и т. д. (практически – 10 децибел, 20 децибел и т. д.) составляют для нашего слуха арифметическую прогрессию. Физическая же «сила» этих шумов (точнее – энергия) составляет прогрессию геометрическую со знаменателем 10. Разности громкостей в 1 бел отвечает отношение силы шумов 10. Значит, громкость шума, выраженная в белах, равна десятичному логарифму его физической силы.

Дело станет яснее, если рассмотрим несколько примеров.

Тихий шелест листьев оценивается в 1 бел, громкая разговорная речь – в 6,5 бел, рычанье льва – в 8,7 бел. Отсюда следует, что по силе звука разговорная речь превышает шелест листьев в

$$10^{(6,5-1)} = 10^{5,5} = 316\ 000 \text{ раз;}$$

львиное рычанье сильнее громкой разговорной речи в

$$10^{(8,7-6,5)} = 10^{2,2} = 158 \text{ раз.}$$

Шум, громкость которого больше 8 бел, признается вредным для человеческого организма. Указанная норма на многих заводах превосходится: здесь бывают шумы в 10 и более бел; удары молотка в стальную плиту порождают шум в 11 бел. Шумы эти в 100 и в 1 000 раз сильнее допустимой нормы и в 10 – 100 раз громче самого шумного места Ниагарского водопада (9 бел).

Случайность ли то, что и при оценке видимой яркости светил, и при измерении громкости шума мы имеем дело с логарифмической зависимостью между величиною ощущения и порождающего его раздражения? Нет, то и другое – следствие общего закона (называемого «психофизическим законом Фехнера»), гласящего: величина ощущения пропорциональна логарифму величины раздражения.

Как видим, логарифмы вторгаются и в область психологии.

187. ЛОГАРИФМЫ В ЭЛЕКТРООСВЕЩЕНИИ

Задача

Причина того, что наполненные газом (часто называемые – неправильно – «полуваттными») лампочки дают более яркий свет, чем пустотные с металлическою нитью из такого же материала, кроется в различной температуре нити накала. По правилу, установленному в физике (Луммером), общее количество света, испускаемое при белом калении, растет пропорционально 12-й степени абсолютной температуры. Зная это, проделаем такое вычисление: определим, во сколько раз «полуваттная» лампа, температура нити накала которой 2 500° абсолютной шкалы (т. е. при счете от – 273°С), испускает больше света, чем пустотная с нитью накаленной до 2200°.

Решение

Обозначив искомое отношение через x, имеем уравнение

$$x = \left(\frac{2\,500}{2\,200}\right)^{12} = \left(\frac{25}{22}\right)^{12},$$

откуда

$$\lg x = 12\,(\lg 25 - \lg 22);\ x = 4{,}6.$$

Наполненная газом лампа испускает света в 4,6 раза больше, нежели пустотная. Значит, если пустотная дает свет в 50 свечей, то наполненная газом при тех же условиях даст 230 свечей.

Сделаем еще расчет: какое повышение абсолютной температуры (в процентах) необходимо для удвоения яркости лампочки?

Решение

Составляем уравнение

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right)^{12} = 2,$$

откуда

$$\lg\left(1 + \frac{x}{100}\right) = \frac{\lg 2}{12} \quad \text{и} \quad x = 6\%.$$

Наконец, третье вычисление: насколько – в процентах – возрастет яркость лампочки, если температура ее нити (абсолютная) поднимется на 1%?

Решение

Выполняя помощью логарифмов вычисление

$$x = 1{,}01^{12}$$

находим

$$x = 1{,}12.$$

Яркость возрастет на 12%.

Проделав вычисление для повышения температуры на 2%, найдем увеличение яркости на 28%; при повышении температуры на 3% – увеличение яркости на 43%.

Отсюда ясно, почему техника изготовления электролампочек так заботится о повышении температуры нити накала, дорожа каждым лишним градусом.

188. ЗАВЕЩАНИЯ НА СОТНИ ЛЕТ

Кто не слыхал о том легендарном числе пшеничных зерен, какое будто бы потребовал себе в награду изобретатель шахматной игры? Число это составилось путем последовательного удвоения единицы: за первое поле шахматной доски изобретатель потребовал 1 зерно, за второе 2 и т. д., все удваивая, до последнего 64-го поля. Однако, с неожиданной стремительностью числа растут не только при последовательном удвоении, но и при гораздо более умеренной норме увеличения. Капитал, приносящий 5% увеличивается ежегодно в 1,05 раза. Как будто едва заметное возрастание. А между тем, по прошествии достаточного промежутка времени капитал успевает вырасти в огромную сумму. Этим объясняется поражающее увеличение капиталов, завещанных на весьма долгий срок. Кажется странным, что, оставляя довольно скромную сумму, завещатель делает распоряжения об уплате огромных капиталов. Известно завещание знаменитого государственного деятеля, изобретателя громоотвода Веньямина Франклина. Оно опубликовано в «Собрании разных сочинений Веньямина Франклина». Вот извлечение из него:

«Препоручаю тысячу фунтов стерлингов бостонским жителям. Если они примут эту тысячу фунтов, то должны поручить ее отборнейшим гражданам, а они будут давать их, с процентами по 5 на сто в год, в заем молодым ремесленникам [1]. Сумма эта через сто лет возвысится до 131 000 фунтов стерлингов. Я желаю, чтобы тогда 100 000 фунтов употреблены были на постройку общественных зданий, остальные же 31 000 фунтов отданы были в проценты на 100 лет. По истечении второго столетия сумма возрастет до 4 061 000 фунтов стерлингов, из коих 1 060 000 фунтов оставляю в распоряжении бостонских жителей, а 3 000 000 – правлению Массачузетской коммуны. Далее не осмеливаюсь простирать своих видов».

Оставляя всего 1 000 фунтов, Франклин распределяет миллионы. Здесь нет, однако, никакого недоразумения. Математический расчет удостоверяет, что соображения завещателя вполне реальны. 1 000 фунтов, увеличиваясь ежегодно в 1,05 раза, через 100 лет должны превратиться в

$$x = 1\,000 \times 1{,}05^{100} \text{ фунтов.}$$

Это выражение можно вычислить с помощью логарифмов:

$$\lg x = \lg 1\,000 + 100 \lg 1{,}05 = 5{,}11\,893,$$

откуда

$$x = 131\,000,$$

в строгом соответствии с текстом завещания. Далее, 31 000 фунтов в течение следующего столетия превратятся в

$$y = 31\,000 \times 1{,}05^{100},$$

откуда, вычисляя помощью логарифмов, находим

$$y = 4\,076\,500$$

сумму, несущественно отличающуюся от указанной в завещании.

Франклин умер в 1790 г.; первая часть его завещания, надо думать, была осуществлена; срок же исполнения прочих распоряжений истечет только в 1990 г.

Предоставляю читателю самостоятельно решить следующую задачу, почерпнутую из «Господ Головлевых» Салтыкова:

«Порфирий Владимирович сидит у себя в кабинете, исписывая цифирными выкладками листы бумаги. На этот раз его занимает вопрос: сколько было бы у него теперь денег, если бы маменька подаренные ему при рождении дедушкой на зубок сто рублей не присвоила себе, а положила в ломбард на имя малолетнего Порфирия? Выходит однако, не много: всего восемьсот рублей».

Предполагая, что Порфирию в момент расчета было 50 лет и сделав допущение, что он произвел вычисление правильно (допущение мало вероятное, так как едва ли Головлев знал логарифмы и справлялся с сложными процентами), требуется установить, по сколько процентов платил в то время ломбард.

189. ДВА АМЕРИКАНСКИХ ДОЛГА

Остановимся еще на двух примерах быстрого роста капитала, выплывших в связи с полемикой западных держав о военных долгах. Первый пример связан с именем Бомарше – прославленного автора «Севильского цирюльника» и «Женитьбы Фигаро». Мало кому известно, что в эпоху войны американцев с Англией за независимость, Бомарше, по поручению правительства Людовика XVI, поставлял американцам контрабандным путем (под видом торговли табаком) военное снаряжение. Поставка производилась в кредит, и сумма долга была в 1793 г. установлена Соединенными Штатами в размере 2 280 000 франков. Деньги, однако, не были Франции уплачены. О них просто забыли, и только в наши дни про долг вспомнили англичане, в связи с долговой полемикой, возгоревшейся между американскими и английскими публицистами. Было под-

[1] В Америке в ту эпоху еще не было кредитных учреждений.

считано, что если Соединенным Штатам предъявить обязательство уплаты долга Бомарше, то, считая из 5 сложных процентов, составилась бы сумма долга свыше 2 000 млн. франков.

Проверим этот расчет. Начальный капитал – 2 280 000, срок – 140 лет, норма роста 5% (сложных).

Искомый капитал равен

$$2\,280\,000 \times 1{,}05^{140} = 2\,111\,200\,000 \text{ франков.}$$

Английский писатель Гриббль, вспомнивший о долге Бомарше, не кончает на Бомарше историю англо-американской войны. И дальнейшее изложение им истории англо-американской войны построено на той же теории сложных процентов. Мистер Гриббль предъявляет Соединенным Штатам, по его мнению, очень скромный счет. Его расчет таков: сумма, которую уплатили английские налогоплательщики на покрытие издержек по содержанию так называемых лойялистов, оставшихся верными Англии, составляет, по расчетам Гриббля, около 6 млн. фунтов стерлингов. Он не требует всей суммы, а хочет получить с Соединенных Штатов только 1 млн. фунтов, но из скромного расчета сложных пяти процентов за 150 лет. А это уже составило бы сумму в 1 024 млн. фунтов ст., т. е. бòльшую, чем сумма военных долгов Англии Соединенным Штатам [1]. Проверим:

$$1\,000\,000 \times 1{,}05^{150} = 1\,508\,400\,000 \text{ ф. ст.}$$

Расчет публициста, как видим, сильно преуменьшен.

Надо думать, он пользовался популярным правилом (верным лишь приближенно), что капитал из 5 сложных процентов удваивается каждые 15 лет; 10 удвоений дают 1024.

190. НЕПРЕРЫВНЫЙ РОСТ КАПИТАЛА

В сберкассах процентные деньги присоединяются к основному капиталу ежегодно. Если присоединение совершается чаще, то капитал растет быстрее, так как в образовании процентов участвует большая сумма. Возьмем чисто теоретический, весьма упрощенный пример. Пусть в сберкассу положено 100 руб. из 100% годовых. Если процентные деньги будут присоединены к основному капиталу лишь по истечении года, то к этому сроку 100 руб. превратятся в 200 руб. Посмотрим теперь, во что превратятся 100 рублей, если процентные деньги присоединять к основному капиталу каждые полгода. По истечении полугодия 100 руб. вырастут в

$$100 \times 1{,}5 = 150 \text{ руб.}$$

А еще через полгода в

$$150 \times 1{,}5 = 225 \text{ руб.}$$

Если присоединение делать каждые ⅓ года, то по истечении года 100 руб. превратятся в $100 \times (1⅓)^3 =$ $= 237$ руб. Будем учащать сроки присоединения процентных денег до 0,1 года, до 0,01 года и т. д. Тогда из 100 руб. спустя год получится:

$$100 \times 1{,}1^{10} = 259 \text{ руб.}$$

$$100 \times 1{,}01^{100} = 270 \text{ руб. } 50 \text{ коп.}$$

[1] «За рубежом», 1934.

В подробных курсах алгебры доказывается, что при безграничном сокращении сроков присоединения наращенный капитал не растет беспредельно, а приближается к некоторому пределу, равному приблизительно [2]

271 р. 83 к.

Больше чем в 2,7183 раза капитал, положенный из 100% увеличиться не может, даже если бы наросшие проценты присоединялись к капиталу каждую секунду.

191. ЧИСЛО «Е»

Сейчас полученное число 2,7183..., играющее в высшей математике огромную роль, – не меньшую, пожалуй, чем знаменитое число π, – имеет особое обозначение: e. Это число иррациональное: оно не может быть точно выражено конечным числом цифр [3], но вычисляется только приближенно, с любою степенью точности, с помощью следующего ряда:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} +$$

$$+ \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} \ldots$$

Из приведенного выше примера с ростом капитала по сложным процентам легко видеть, что число e есть предел выражения

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

при беспредельном возрастании n.

По многим причинам, которых мы здесь изложить не можем, число e очень целесообразно принять за основание системы логарифмов. Такие таблицы («натуральных логарифмов» существуют и находят себе широкое применение в науке и технике. Те логарифмы-исполины из 48, из 61, из 102 и из 260 цифр, о которых мы говорили ранее имеют основанием именно число e.

Число e появляется нередко там, где его вовсе не ожидали. Поставим себе, например, такую задачу:

На какие части надо разбить данное число a, чтобы произведение всех частей было наибольшее?

Мы уже знаем, что наибольшее произведение при постоянной сумме дают числа тогда, когда они равны между собой. Ясно, что число a надо разбить на равные части. Но на сколько именно равных частей? На две, на три, на десять? Приемами высшей математики можно установить, что наибольшее произведение получается, когда части возможно ближе к числу e.

Например, 10 надо разбить на такое число равных частей, чтобы части были возможно ближе к 2,7183... Для этого надо найти частное

$$\frac{10}{2{,}718\ldots} = 3{,}679\ldots$$

Так как разделить на 3,679... равных части нельзя, то приходится выбрать делителем ближайшее целое число – 4. Мы получим, следовательно, наибольшее

[2] Дробные доли копейки мы отбросили.

[3] Кроме того, оно, как и число π трансцендентно, т. е. не может получиться в результате решения какого бы то ни было алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами.

произведение частей 10-ти, если эти части равны $^{10}/_4$, т. е. 2,5.

Значит, $$(2{,}5)^4 = 39{,}0625$$

есть самое большое число, какое может получиться от перемножения частей числа 10-ти. Действительно, разделив 10 на 3 или на 5 равных частей, мы получим меньшие произведения:

$$\left(\frac{10}{3}\right)^3 = 37; \qquad \left(\frac{10}{5}\right)^5 = 32;$$

Число 20 надо для получения наибольшего произведения его частей разбить на 7 одинаковых частей, потому что

$$20 : 2{,}718 = 7{,}37 \approx 7.$$

Число 50 надо разбить на 18 частей, а 100 – на 37, потому что

$$50 : 2{,}718 = 18{,}4$$

$$100 : 2{,}718 = 36{,}8.$$

Что касается других применений числа ***e***, то о разнообразии вопросов, при математическом рассмотрении которых приходится пользоваться этим числом, можно судить хотя бы по подзаголовкам статьи проф. М. Гребенча «Число ***e*** и его значение в естествознании и технике» (см. сборник «Математика и физика в средней школе», 1934, № 2):

Барометрическая формула.

Формула Эйлера [1].

Работа сжатия воздуха.

Скорость уменьшения стоимости оборудования.

Закон Ньютона (для охлаждения тел).

Распад радия и возраст Земли.

Рост клеток.

Прибавлю к этому еще формулу Циолковского для вычисления скорости ракеты (см. мою книгу «Межпланетные путешествия»).

192. СКОЛЬКО ЛЮДЕЙ ЖИЛО НА СВЕТЕ?

Стремительное нарастание чисел, увеличивающихся в геометрической прогрессии, дает иногда повод к ошибочным заключениям. Поучительный пример подобного заблуждения оставил нам поэт Бенедиктов, посвящавший свой досуг занятиям математикой, вернее – математическим развлечениям. Сохранилась составленная им рукописная «увеселительная арифметика», с которой я имел возможность познакомиться. Последняя глава ее носит название «Громадное число живших на земном шаре его обитателей» и заключает любопытный подсчет.

«Предположим, что первоначально от одной пары людей произошло две пары, что от каждой из этих пар произошло по две пары, и потом каждая пара производит две пары. По этому предположению размножение на земле людей шло в геометрической прогрессии: 1, 2, 4, 8, 16, 32... Возьмем столько членов этой прогрессии, сколько могло пройти человеческих поколений в течение 7376 лет. [Бенедиктов наивно опирался на библейские данные о древности человечества.] Положим на каждое поколение 50 лет». Насчитывая всех поколений, начиная от первой пары человеческих существ, 140 и беря 140 членов прогрессии, автор приходит к выводу, что число всех живших на Земле людей достигает 4 септаллионов. «Половину из этого числа отбросим, принимая в соображение, что многие из родившихся умирают в младенчестве... Значит, останемся только при двух септаллионах». Септаллионом Бенедиктов называет единицу с 42 нулями, т. е. 10^{42}.

Далее, вес этого количества людей – «160 септаллионов фунтов» – он сопоставляет с «весом» земного шара, который принимает в 3,5 квадриллиона фунтов (вместо 14 квадриллионов). Результат получается поистине разительный: общий вес всех прежде живших людей превышает вес земного шара в 1 600 биллионов раз (приводим исправленную цифру). «Это показывает, – заключает автор, – что один и тот же вещественный материал, из которого формировались телесные составы живших на свете людей, был в обороте по крайней мере 1600 биллионов раз, и за каждую вещественную частицу, перебывавшую в различных живых человеческих телах, могли бы спорить 1 600 биллионов индивидуумов».

Результат станет еще поразительнее, если принять во внимание соображение, что человечество произошло не от одной пары предков, а от многих, и что существует оно никак не 7000 лет, а несколько сот тысячелетий. Далее, надо иметь в виду, что «в формировании телесных составов» людей участвовала не вся масса земного шара, а только масса поверхностного слоя нашей планеты, составляющего незначительную часть всего объема Земли. Наконец, в споре за «каждую вещественную частицу, перебывавшую в живых телах», должно было предъявить свои права и бесчисленное множество животных, населявших нашу планету, начиная с древнейших геологических эпох.

Явная несообразность, к которой мы пришли, показывает, что в ходе этого рассуждения кроется какая-то существенная ошибка.

Неправильность расчета обнаружилась бы и для его автора, если бы он догадался исчислить на основании своего рассуждения, сколько должно жить на земном шаре людей в тот момент, когда он писал свою книгу. Какова численность современного Бенедиктову 140-го поколения людей? Она равна $2^{140} \approx 1^{037}$, между тем как в действительности тогда жило на Земле всего около 10^9 человек... Разница огромная, прямо указывающая на полную несостоятельность расчета [1].

В чем ошибка Бенедиктова?

Она заключается в том, что норма увеличения численности человечества, – два удвоения в столетие, – приблизительно верная для нашего времени, была незаконно распространена на все предшествовавшие времена вплоть до самой отдаленной эпохи. Между тем несомненно, что в древности смертность была го-

[1] О ней см. ст. «Жюль-Верновский силач и формула Эйлера» во 2-й книге моей «Занимательной физики».

[1] Кроме того, если бы человечество размножалось по норме, указанной Бенедиктовым, то, приняв наличную численность человечества (1 300 000 000) за последний член прогрессии со знаменателем 2, легко было определить сумму всех ее членов 2 600 000 000. Странно, что столь простая мысль не пришла в голову Бенедиктову.

раздо выше, и следовательно, человечество размножалось значительно медленнее, чем в близкую нам эпоху. Даже в исторические времена бывали периоды, когда население целых стран не увеличивалось, а, напротив, уменьшалось; достаточно вспомнить эпоху тридцатилетней войны в Германии или чуму в Англии в XIV в., когда число обитателей страны уменьшилось более чем на 30%. Легко представить себе, какие опустошения производили войны, эпидемии и стихийные бедствия в ранний период существования человечества. Без сомнения, бывали периоды, – длившиеся, быть может, долгий ряд тысячелетий, – когда человечество временно вымирало, т. е. численность его шла на убыль. Допустимо ли при таких условиях говорить о непрерывном размножении человечества по правилу геометрической прогрессии [1]?

Мы можем, конечно, с весьма грубым приближением принять, что в среднем человечество размножалось все же по правилу возрастающей прогрессии, а именно считать, что по истечении, например, каждого тысячелетия численность его увеличилась в некоторое одинаковое число раз. Но тогда задачу, поставленную Бенедиктовым, надо решать совсем с другого конца. В прогрессии размножения человечества мы должны считать известным: последний член, т. е. нынешнюю численность населения земного шара, 2 000 000 000; число членов, т. е. число протекших тысячелетий – предположительно, конечно; остановимся, например, на 300 тысячелетиях; первый член, т. е. число первоначальных предков – еще более гадательно; примем, например, 100 предков. Знаменатель же этой прогрессии, который Бенедиктов считал исходным данным, нам придется вычислить, чтобы определить сумму ее членов. Пусть знаменатель прогрессии x, т. е. пусть численность человечества вырастает каждое тысячелетие в x раз. К концу 300-го тысячелетия 100 предков должны были превратиться в

$$100\,x^{300}.$$

Так как число это должно равняться 2 000 000 000, или 2×10^9, то имеем уравнение

$$100\,x^{300} = 2 \times 10^9.$$

Логарифмируя, получаем

$$\lg 100 + 300 \lg x = \lg 2 + 9$$

[1] Вероятная численность населения земного шара в отдаленные и в более близкие к нам эпохи такова:

в начале	нашей эры	80	млн.
» 1000-м	году	150	«
» 1500-м	году	250	«
» 1600-м	году	300	«
» 1700-м	году	450	«
» 1800-м	году	800	«

Мы видим, что с удалением в глубь веков человечество размножалось все медленнее. Если в близкую к нам эпоху население Земли удваивалось в сто лет, то в отдаленные времена для его удвоения требовалось целое тысячелетие. Еще в более ранние эпохи человечество удваивало свою численность вероятно в течение десятков тысяч лет.

$$\lg x = \frac{7{,}30103}{300} = 0{,}02433$$

$$x = 1{,}06.$$

Результат поучительный: численность человечества возрастала (в среднем) каждое тысячелетие на 6%, между тем как по Бенедиктову она удваивалась каждые 50 лет, т. е. за тысячелетие увеличилась в 2^{20} = 1 048 576 – более чем в миллион раз!

Разница огромная, а отсюда и несообразный результат подсчета Бенедиктова.

Теперь попытаемся составить себе представление о том, каково в действительности могло быть число людей, живших на земном шаре за все время существования человечества. Будем считать, что в среднем наличное число людей успевает умереть и смениться новым в течение 50 лет. Если бы мы могли подсчитывать население земного шара каждые 50 лет, делая это в течение 300 000 лет, у нас получился бы ряд чисел, сумма которых составляла бы общую численность всех проживавших на Земле людей. Первые его 20 членов будут

100; 100; 100 и т. д.

Следующие 20 членов

106; 106; 106 и т. д.

Дальше пойдут 20 членов, каждый из которых равен

$$100(1{,}06)^2.$$

Затем 20 членов по $100(1{,}06)^3$ каждый и т. д.

Последними 20 членами будет нынешняя численность человечества – 2×10^9.

Нетрудно определить сумму членов такого ряда: она составляет

$$20 \times \frac{2 \times 10^9 \times 1{,}06 - 100}{1{,}06 - 1} \approx 20 \times 2 \times 10^9 \times 17 = 68 \times 10^{10}.$$

Вот сколько – по весьма, конечно, приблизительной оценке – жило на свете людей за время существования нашей планеты. Число это всего в 340 раз превышает современное население земного шара и ничтожно мало по сравнению с абсурдно-огромным числом Бенедиктова.

Если представить себе, что объем всех этих человеческих тел равномерно распределен по поверхности земных материков, то высота слоя оказалась бы меньше ⅓ миллиметра (у Бенедиктова же – сумма всех человеских тел в 1 600 биллионов раз превышает объем нашей планеты!).

Ошибку Бенедиктова делают и те богословы которые пытались математическими расчетами подтвердить справедливость свидетельств Библии. Вот образчик такого рассуждения из статьи французского математика аббата Муанье «Древность человеческого рода» (1863 г.).

«Примем для годового возрастания народонаселения число $\frac{1}{227}$ [следовало сказать: $1\frac{1}{227}$. ***Я. П.***], мало отличающееся от того, которое представляет действительное возрастание населения во Франции, и вспомним, что в 1600 г. от сотворения мира Ной вышел из ковчега с тремя сыновьями и тремя их женами, – тогда после 4207 лет [библейский счет!] число жителей на Земле должно равняться

$$7\left(1+\frac{1}{227}\right)^{4207}=1\,300\,000\,000,$$

т. е. истинному числу обитателей земного шара (в 1863 г.)».

Муанье видит в таком полном согласии подтверждение правильности свидетельств Библии. Излишне добавлять, после сказанного ранее, что весь этот благочестивый расчет основан на грубом заблуждении.

193. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ КОМЕДИЯ

Задача

В добавление к тем математическим комедиям, с которыми читатель познакомился в главах 142-147, приведем еще образчик того же рода, а именно «доказательство» неравенства 2 > 3. На этот раз в доказательстве участвует логарифмирование. «Комедия» начинается с неравенства

$$\tfrac{1}{4} > \tfrac{1}{8}$$

бесспорно правильного. Затем следует преобразование:

$$(\tfrac{1}{2})^2 > (\tfrac{1}{2})^3$$

также не внушающее сомнения. Большему числу соответствует больший логарифм; значит,

$$2\lg_{10}(\tfrac{1}{2}) > 3\lg_{10}(\tfrac{1}{2}).$$

После сокращения на $\lg_{10}(\frac{1}{2})$ имеем

$$2 > 3.$$

В чем ошибка этого доказательства?

Решение

Ошибка в том, что при сокращении на $\lg_{10}(\frac{1}{2})$ не был изменен знак неравенства (> на <); между тем, необходимо было это сделать, так как $\lg_{10}(\frac{1}{2})$ есть число отрицательное. [Если бы мы логарифмировали при основании не 10, а другом, меньшем, чем ½, то lg (½) был бы положителен, но мы не вправе были бы тогда утверждать что большему числу соответствует больший логарифм.]

194. ЛЮБОЕ ЧИСЛО – ТРЕМЯ ДВОЙКАМИ

Задача

Закончим книгу остроумной алгебраической головоломкой, которой развлекались несколько лет назад участники съезда физиков в Одессе.

Предлагается задача: любое данное число, целое и положительное, изобразить помощью трех двоек и математических символов.

Решение

Покажем, как задача решается сначала на частном примере. Пусть данное число 3. Тогда задача решается так:

$$3=-\lg_2\lg_2\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}.$$

Легко удостовериться в правильности этого равенства. Действительно,

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}=\left[\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2^3}}=2^{2^{-3}}$$

$$\lg\ 2^{2^{-3}}=2^{-3}$$

$$-\lg_2 2^{-3}=3.$$

Если бы дано было число 5, мы разрешили бы задачу тем же приемом:

$$5=-\lg_2\lg_2\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}.$$

Как видим, мы используем здесь то, что при квадратном радикале показатель корня не пишется.

Общее решение задачи таково. Если данное число N то

$$N=-\lg_2\lg_2\underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}_{N\text{ раз}},$$

причем число радикалов равно числу единиц в заданном числе.

195. УПОТРЕБЛЕНИЕ ТАБЛИЦЫ ЛОГАРИФМОВ

Нахождение логарифма

1) Найти lg 138.

На пересечении строки «1,3» и графы «8» находим мантиссу 140. Характеристику (2) определяем по соображению. Имеем: lg 138 = 2,140.

2) Найти lg 5,27.

На пересечении строки «5» и графы «2» находим мантиссу 716 для числа 52. Поправку для третьей цифры отыскиваем в той же строке в графе поправок под цифрою 7. Здесь же находим 6. Следовательно, мантисса для 527 равна 716 + 6 = 722 и lg 5,27 = 0,722.

3) Найти lg 0,608.

На пересечении строки «6» и графы «0» находим мантиссу 778. Поправку для третьей цифры отыскиваем в той же строке, в графе поправок под цифрою 8. Здесь же находим 5. Следовательно, мантисса для 608 равна 778 + 5 = 783 и на lg 0,608 = 1,783.

Нахождение числа

4) Найти число, логарифм которого 1,193.

Отыскав мантиссу 193, мы видим, что она отвечает числу 156. Следовательно, 1,193 = lg 15,6.

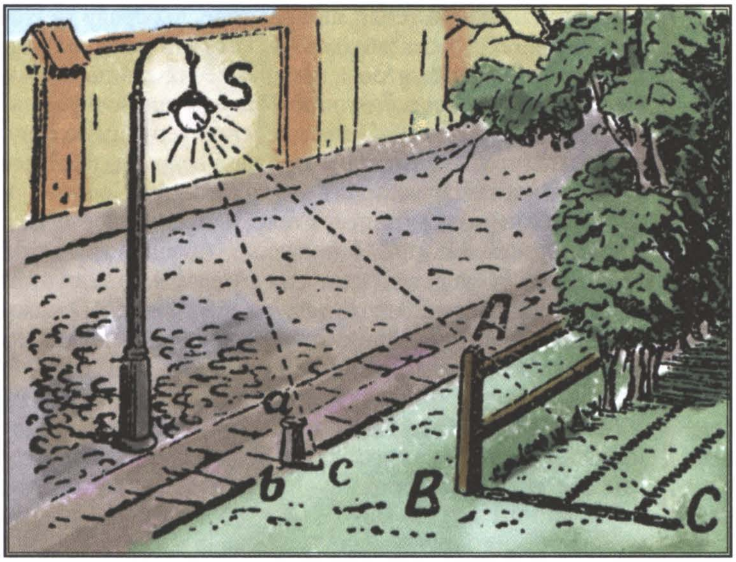
5) Найти число, логарифм которого 1,927.

В таблице нет мантиссы 927. Ближайшая меньшая мантисса, 924, отвечает числу 84. Поправку числа для недостающих 3-х единиц мантиссы отыскиваем в графе поправок над цифрой 3 той же строки, где взята была мантисса; над тройками стоят вверху графы цифры 5 и 6. Следовательно, мантисса 927 отвечает 845 или 846, а искомое число 0,845 или 0,846. Определить число точнее в этом случае нельзя.

196. ТРЕХЗНАЧНЫЕ ЛОГАРИФМЫ

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9									
1,0	000	004	009	013	017	021	025	029	033	037									
1,1	041	045	049	053	057	061	064	068	072	076									
1,2	079	083	086	090	093	097	100	104	107	111									
1,3	114	117	121	124	127	130	134	137	140	143									
1,4	146	149	152	155	158	161	164	167	170	173									
1,5	176	179	182	185	188	190	193	196	199	201									
1,6	204	207	210	212	215	217	220	223	225	228									
1,7	230	233	236	238	241	243	246	248	250	253									
1,8	255	258	260	262	265	267	270	272	274	276	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,9	279	281	283	286	288	290	292	294	297	299									
2	301	322	342								2	4	6	8	10	12	14	16	18
2				362	380	398					2	4	5	7	9	11	12	14	16
2							415	431	447	462	2	3	5	6	8	10	11	13	14
3	477	491	505	519							1	3	4	6	7	8	10	11	12
3					531	544	556	568	580	591	1	2	4	5	6	7	8	10	11
4	602	613	623	633	643	653					1	2	3	4	5	6	7	8	9
4							663	672	681	690	1	2	3	4	5	5	6	7	8
5	699	708	716	724	732	740	748	756	763	771	1	2	2	3	4	5	6	6	7
6	778	785	792	799	806	813	820	826	833	839	1	1	2	3	3	4	5	5	6
7	845	851	857	863	869	875	881	886	892	898	1	1	2	2	3	3	4	5	5
8	903	908	914	919	924	929	935	940	944	949	1	1	2	2	3	3	4	4	5
9	954	959	964	968	973	978	982	987	991	996	0	1	1	2	2	3	3	4	4
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$$\lg \pi = 0{,}497$$
$$\lg 2\pi = 0{,}798$$
$$\lg \sqrt{2} = 0{,}150$$
$$\lg \sqrt{3} = 0{,}239$$



Первые основы геометрии должны быть заложены не в школьной комнате, а на вольном воздухе. Покажите мальчику, как измеряется площадь луга, обратите его внимание на высоту колокольни, на длину тени, отбрасываемой ею, на соответствующее положение солнца, – и он гораздо быстрее, правильнее и при том с большим интересом усвоит математические соотношения, чем когда понятия измерения угла, а то и какой-либо тригонометрической функции внедряются в его голову помощью слов и чертежа на доске.

Альберт Эйнштейн

197. ПО ДЛИНЕ ТЕНИ

Еще сейчас памятно мне то изумление, с каким смотрел я в первый раз на седого лесничего, который, стоя возле огромной сосны, измерял ее высоту маленьким карманным прибором. Когда он нацелился своей квадратной дощечкой в вершину дерева, я ожидал, что старик сейчас начнет взбираться туда с мерной цепью. Вместо этого он положил прибор обратно в карман и объявил, что измерение окончено. А я думал, еще не начиналось…

Я был тогда очень молод, и такой способ измерения, когда человек определяет высоту дерева, не срубая его и не взбираясь на верхушку, являлся в моих глазах чем-то вроде маленького чуда. Лишь позднее, когда меня посвятили в начатки геометрии, понял я, до чего просто выполняются такого рода чудеса. Существует множество различных способов производить подобные измерения при помощи весьма незамысловатых приборов и даже без всяких приспособлений.

Самый легкий и самый древний способ – без сомнения тот, которым греческий мудрец Фалес за шесть веков до нашей эры определил в Египте высоту пирамиды. Он воспользовался ее тенью. Жрецы и фараон, собравшиеся у подножия высочайшей пирамиды, озадаченно смотрели на северного пришельца, отгадывавшего по тени высоту огромного сооружения. Фалес – говорит предание, – избрал день и час, когда длина собственной его тени равнялась его росту; в этот момент высота пирамиды должна также равняться длине отбрасываемой ею тени [1]. Вот, пожалуй, единственный случай, когда человек извлекает пользу из своей тени…

Задача греческого мудреца представляется нам теперь детски-простой, но не будем забывать, что смотрим мы на нее с высоты геометрического здания, воздвигнутого уже после Фалеса. Он жил задолго до Евклида, автора замечательной книги, по которой обучались геометрии в течение двух тысячелетий после его смерти. Заключенные в ней истины, известные теперь каждому школьнику, не были еще открыты в эпоху Фалеса. А чтобы воспользоваться тенью для решения задачи о высоте пирамиды, надо было знать уже некоторые геометрические свойства треугольника, – именно следующие два (из которых первое Фалес сам открыл):

1) что углы при основании равнобедренного треугольника равны, и обратно – что стороны, лежащие против равных углов треугольника, равны между собою;

2) что сумма углов всякого треугольника (или по крайней мере прямоугольного) равна двум прямым углам.

Только вооруженный этим знанием Фалес вправе был заключить, что, когда его собственная тень равна его росту, солнечные лучи встречают ровную почву под углом в половину прямого, и, следовательно, вершина пирамиды, середина ее основания и конец ее тени должны обозначить равнобедренный треугольник. Этим простым способом очень удобно, казалось бы, пользоваться в ясный солнечный день для измерения одиноко стоящих деревьев, тень которых не сливается с тенью соседних. Но в наших широтах не так легко, как в Египте, подстеречь нужный для этого момент: Солнце у нас низко стоит над горизонтом, и тени бывают равны высоте отбрасывающих их предметов лишь в околополуденные часы летних месяцев. Поэтому способ Фалеса в указанном виде применим не всегда.

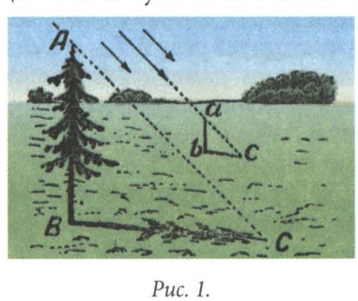


Рис. 1.

Нетрудно, однако, изменить этот способ так, чтобы в солнечный день можно было пользоваться любой тенью, какой бы длины она ни была. Измерив, кроме того, и свою тень или

[1] Конечно, длину тени надо было считать от средней точки квадратного основания пирамиды; ширину этого основания Фалес мог измерить непосредственно.

тень какого-нибудь шеста, вычисляют искомую высоту из пропорции (рис. 1):

$$AB : ab = BC : bc,$$

т. е. высота дерева во столько же раз больше вашей собственной высоты (или высоты шеста), во сколько раз тень дерева длиннее вашей тени (или тени шеста). Это вытекает, конечно, из геометрического подобия треугольников *ABC* и *abc* (по двум углам).

Иные читатели возразят, пожалуй, что столь элементарный прием не нуждается вовсе в геометрическом обосновании: неужели и без геометрии не ясно, что во сколько раз дерево выше, во столько раз и тень его длиннее? Дело, однако, не так просто, как кажется. Попробуйте применить это правило к теням, отбрасываемым при свете уличного фонаря или лампы, – оно не оправдается. На рис. 2 вы видите, что столбик *AB* выше тумбы *ab* примерно втрое, а тень столбика больше тени тумбы (*BC* : *bc*) раз в восемь. Объяснить, почему в данном случае способ применим, в другом нет, – невозможно без геометрии.

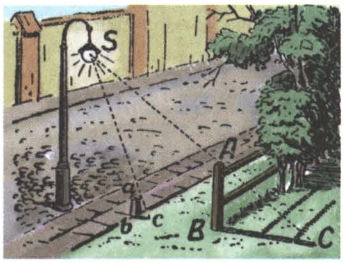


Рис. 2

Задача №1

Рассмотрим поближе, в чем тут разница. Суть дела сводится к тому, что солнечные лучи между собою параллельны, лучи же фонаря – непараллельны. Последнее очевидно; но почему вправе мы считать лучи Солнца параллельными, хотя они безусловно пересекаются в том месте, откуда исходят?

Решение

Лучи Солнца, падающие на Землю, мы можем считать параллельными потому, что угол между ними чрезвычайно мал, практически неуловим. Несложный геометрический расчет убедит вас в этом. Вообразите два луча, исходящие из какой-нибудь точки Солнца и падающие на Землю в расстоянии, скажем, одного километра друг от друга. Значит, если бы мы поставили одну ножку циркуля в эту точку Солнца, а другою описали окружность на расстоянии Земли, то между нашими двумя лучами-радиусами оказалась бы дуга в один километр длиною. Полная длина этой исполинской окружности была бы равна $2\pi \times 150\,000\,000$ км = = 940 000 000 км. [1] Один градус ее, конечно, в 360 раз меньше, т. е. около 2 600 000 км; одна дуговая минута в 60 раз меньше градуса, т. е. равна 43 000 км, а одна дуговая секунда еще в 60 раз меньше, т. е. 720 км. Но наша дуга имеет в длину всего только 1 км; значит, она соответствует углу в $^1/_{720}$ секунды. Такой ничтожный угол неуловим даже для точнейших астрономических инструментов; следовательно, на практике мы можем считать лучи Солнца, падающие на Землю, за параллельные прямые.

Если бы эти геометрические соображения не были нам известны, мы не могли бы обосновать рассматриваемый способ определения высоты по тени. Пробуя применить способ теней на практике, вы сразу же убедитесь, однако, в его ненадежности. Тени не отграничены так отчетливо, чтобы измерение их длины можно было выполнить вполне точно. Каждая тень, отбрасываемая при свете Солнца, имеет неясно очерченную серую кайму полутени, которая и придает границе тени неопределенность. Происходит это оттого, что Солнце – не точка, а большое светящееся тело, испускающее лучи из многих точек. На рис. 3 показано, почему вследствие этого тень *BC* дерева имеет еще придаток в виде полутени *CD*, постепенно сходящей на нет. Угол *CAD* между крайними границами полутени равен тому углу, под которым мы всегда видим солнечный диск, т. е. половине градуса. Ошибка, происходящая от того, что обе тени измеряются не вполне точно, может при не слишком низком стоянии Солнца достигать 5% и более. Эта ошибка прибавляется к другим неизбежным ошибкам – от неровности почвы и т. д. – и делает окончательный результат мало надежным. В местности гористой, например, способ этот совершенно неприменим.

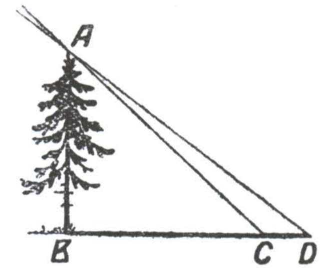


Рис. 3

198. ЕЩЕ ДВА СПОСОБА

Вполне возможно обойтись при измерении высоты и без помощи теней. Таких способов много; начнем с двух простейших. Прежде всего мы можем воспользоваться свойством равнобедренного прямоугольного треугольника, обратившись к услугам весьма простого прибора, который легко изготовить из дощечки и трех булавок. На дощечке любой формы, даже на куске коры, если у него есть плоская сторона, намечают три точки – вершины равнобедренного прямоугольного треугольника – и в них втыкают торчком по булавке (рис. 4). У вас нет под рукой чертежного треугольника для построения прямого угла, нет и циркуля для отложения равных сторон. Перегните тогда любой лоскут бумаги один раз, а затем поперек первого сгиба еще раз так, чтобы обе части первого сгиба совпали, – и получите прямой угол. Та же бумажка пригодится и вместо циркуля, чтобы отмерить равные расстояния. Как видите, прибор может быть целиком изготовлен в бивуачной обстановке.

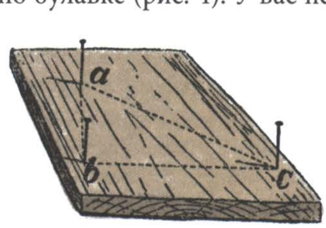


Рис. 4.

Обращение с ним не сложнее изготовления. Отойдя от измеряемого дерева, держите прибор так, чтобы один из катетов треугольника был направлен отвесно, для чего можете пользоваться ниточкой с грузиком, привязанной к верхней булавке. Приближаясь к дереву или удаляясь от него, вы всегда найдете такое место *A* (рис. 5), из которого, глядя на булавки ***a*** и ***c***, увидите, что они покрывают верхушку ***C*** дерева: это значит, что

[1] Расстояние от Земли до Солнца – 150 000 000 км.

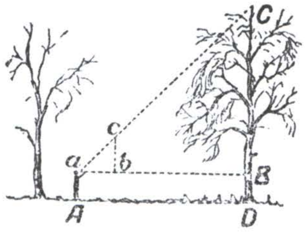


Рис. 5.

продолжение гипотенузы *ac* проходит через точку *C*. Тогда, очевидно, расстояние ***aB*** равно ***CB***, так как угол ***a*** = 45°. Следовательно, измерив расстояние ***aB*** (или, на ровном месте, одинаковое с ним расстояние *AD*) и прибавив ***BD***, т. е. возвышение ***aA*** глаза над землей, получите искомую высоту дерева. По другому способу вы обходитесь даже и без булавочного прибора. Здесь нужен шест, который вам придется воткнуть отвесно в землю так, чтобы выступающая часть как раз равнялась вашему росту [1]. Место для шеста надо выбрать так, чтобы лежа, как показано на рис. 6, вы видели верхушку дерева на одной прямой линии с верхней точкой шеста. Так как треугольник ***Aba*** – равнобедренный и прямоугольный, то угол ***A*** = 45° и, следовательно, ***AB*** равно ***BC***, т. е. искомой высоте дерева.

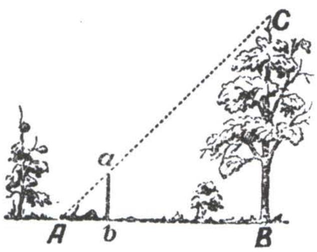


Рис. 6.

199. ПО СПОСОБУ ЖЮЛЯ ВЕРНА

Следующий – тоже весьма несложный – способ измерения высоких предметов картинно описан у Жюля Верна в известном романе «Таинственный остров».

«– Сегодня нам надо измерить высоту площадки Далекого Вида, – сказал инженер.

– Вам понадобится для этого инструмент? – спросил Герберт.

– Нет, не понадобится. Мы будем действовать несколько иначе, обратившись к не менее простому и точному способу.

Юноша, стараясь научиться возможно большему, последовал за инженером, который спустился с гранитной стены до окраины берега. Взяв прямой шест, футов 12 длиною, инженер измерил его возможно точнее, сравнивая со своим ростом, который был ему хорошо известен. Герберт же нес за ним отвес, врученный ему инженером: просто камень, привязанный к концу веревки. Не доходя футов 500 до гранитной стены, поднимавшейся отвесно, инженер воткнул шест фута на два в песок и, прочно укрепив его, поставил вертикально с помощью отвеса. Затем он отошел от шеста на такое расстояние, чтобы, лежа на песке, можно было на одной прямой линии видеть и конец шеста, и край гребня (рис. 7). Эту точку он тщательно пометил колышком.

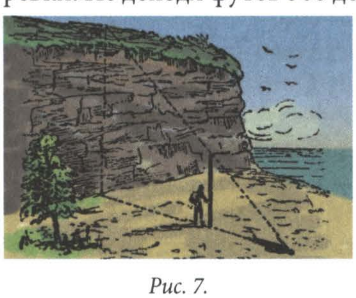


Рис. 7.

– Тебе знакомы начатки геометрии? – спросил он Герберта, поднимаясь с земли.

– Да.

– Помнишь свойства подобных треугольников?

– Их сходственные стороны пропорциональны.

– Правильно. Так вот: сейчас я построю два подобных прямоугольных треугольника. У меньшего одним катетом будет отвесный шест, другим – расстояние от колышка до основания шеста; гипотенуза же – мой луч зрения. У другого треугольника катетами будут: отвесная стена, высоту которой мы хотим определить, и расстояние от колышка до основания этой стены; гипотенуза же – мой луч зрения, совпадающий с направлением гипотенузы первого треугольника.

– Понял! – воскликнул юноша. – Расстояние от колышка до шеста так относится к расстоянию от колышка до основания стены, как высота шеста к высоте стены.

– Да. И, следовательно, если мы измерим два первых расстояния, то, зная высоту шеста, сможем вычислить четвертый, неизвестный член пропорции, т. е. высоту стены. Мы обойдемся, таким образом, без непосредственного измерения этой высоты.

Оба горизонтальных расстояния были измерены: меньшее равнялось 15-ти футам, большее – 500-м футам.

По окончании измерений инженер составил следующую пропорцию:

$$15 : 500 = 10 : x,$$
$$500 \times 10 = 5000,$$
$$5000 : 15 = 333{,}3.$$

Значит, высота гранитной стены равнялась 333-м футам».

Этот способ, как и предыдущий, неудобен тем, что при пользовании им приходится ложиться на землю. Но вот видоизменение, свободное от такого неудобства. Запасшись шестом выше человеческого роста, втыкают его отвесно на некотором расстоянии от измеряемого дерева (рис. 8). Отойдя от шеста назад, по продолжению прямой ***Dd***, находят такую точку ***A***, из которой, глядя на вершину дерева, видят на одной линии с ней и верхнюю точку ***b*** шеста. При этом замечают (здесь нужны услуги помощника) точки ***c*** и ***C***, в которых горизонтальная, прямая, проходящая через ***a***, встречает шест и ствол; помощник делает в этих местах пометки, – и измерение окончено. Теперь остается только, на основании подобия треугольников ***abc*** и ***aBC***, вычислить ***BC*** из пропорции:

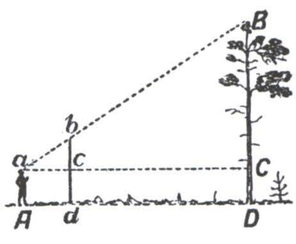


Рис. 8.

$$BC : bc = aC : ac,$$

откуда:

$$BC = bc \cdot \frac{aC}{Ac}$$

Расстояния ***bc***, ***aC*** и ***ac*** легко измерить непосредственно. К полученной величине ***BC*** нужно прибавить расстояние ***CD*** (которое также измеряется непосредственно), чтобы узнать искомую высоту дерева.

---

[1] Точнее – расстоянию от подошв до глаз.

200. ПОМОЩЬЮ ЗАПИСНОЙ КНИЖКИ

В качестве прибора для приблизительной оценки недоступной высоты вы можете использовать и свою карманную записную книжку, если она снабжена карандашом, всунутым в чехлик или петельку при книжке. Она поможет вам построить в пространстве те два подобных треугольника, из которых получается искомая высота. Книжку надо держать возле глаз так, как показано на упрощенном рис. 9. Она должна находиться в отвесной плоскости, а карандаш выдвигается над верхним обрезом книжки настолько, чтобы, глядя из точки ***a***, видеть вершину ***B*** дерева покрытой кончиком ***b*** карандаша. Тогда вследствие подобия треугольников ***abc*** и ***aBC*** высота ***BC*** определится из пропорции:

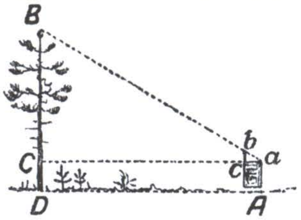


Рис. 9.

$$BC : bc = aC : ac$$

Расстояния ***bc***, ***ac*** и ***aC*** измеряются непосредственно. К полученной величине ***BC*** надо прибавить еще длину ***CD***, т. е. – на ровном месте – высоту глаза над почвой.

Так как ширина ***ac*** книжки неизменна, то если вы будете всегда становиться на одном и том же расстоянии от измеряемого дерева (например в 10 м), высота дерева будет зависеть только от выдвинутой части ***bc*** карандаша. Поэтому вы можете заранее вычислить, какая высота соответствует тому или иному выдвижению, и нанести эти числа на карандаш. Ваша записная книжка превратится тогда в упрощенный высотомер, так как вы сможете при ее помощи определять высоты сразу, без вычислений.

201. НЕ ПРИБЛИЖАЯСЬ К ДЕРЕВУ

Случается, что почему-либо неудобно подойти вплотную к основанию измеряемого дерева. Можно ли в таком случае определить его высоту?

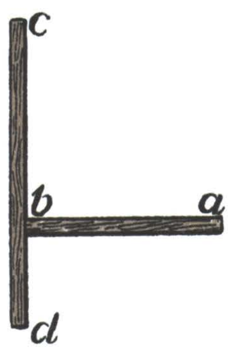


Рис. 10.

Вполне возможно. Для этого придуман остроумный прибор, который, как и предыдущие, легко изготовить самому. Две планки ***ab*** и ***cd*** (рис. 10) скрепляются под прямым углом так, чтобы ***ab*** равнялось ***bc***, а ***bd*** составляло половину ***ab***. Вот и весь прибор. Чтобы измерить им высоту, держат его в руках, направив планку ***cd*** вертикально (для чего при ней имеется отвес – шнурок с грузиком), и становятся последовательно в двух местах: сначала (рис. 11) в точке ***A***, где располагают прибор концом ***c*** вверх, а затем в точке ***A'***, подальше, где прибор держат вверх концом ***d***. Точка ***A*** избирается так, чтобы, глядя из ***a*** на конец ***c***, видеть его на одной прямой с верхушкой дерева. Точку же ***A′*** отыскивают так, чтобы, глядя из ***a′*** на точку ***d′***, видеть ее совпадающей с ***B***. В отыскании этих двух точек ***A*** и ***A′***[1] заключается все измерение, потому что искомая часть высоты дерева ***BC*** равна расстоянию ***AA′***. Равенство вытекает, как легко сообразить, из того, что ***aC*** = ***BC***, а ***a′C*** = ***2 BC***; значит,

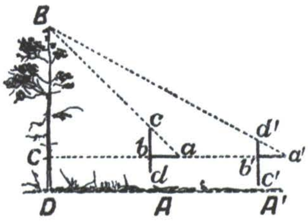


Рис. 11.

$$a'C - aC = BC.$$

Вы видите, что, пользуясь этим простым прибором, мы измеряем дерево, не подходя к его основанию ближе его высоты. Само собою разумеется, что если подойти к стволу возможно, то достаточно найти только одну из точек – A или A′, чтобы узнать его высоту.

Вместо двух планок можно воспользоваться четырьмя булавками, разместив их на дощечке надлежащим образом; в таком виде «прибор» еще проще и портативнее.

202. ВЫСОТОМЕР ЛЕСОВОДОВ

Пора объяснить теперь, как устроены «настоящие» высотомеры, которыми пользуются на практике работники леса. Опишу один из подобных высотомеров, несколько изменив его так, чтобы легко было изготовить его самому. Сущность устройства видна из рис. 12. Картонный или деревянный прямоугольник ***abcd*** держат в руках так, чтобы, глядя вдоль края ***ab*** видеть на одной линии с ним вершину ***B*** дерева. В точке ***b*** привешен на нити грузик ***q***. Замечают точку ***a***, в которой нить пересекает линию ***dc***. Треугольники ***bBC*** и ***bnc*** подобны, так как оба прямоугольные и имеют равные острые углы ***bBC*** и ***bnc*** (с соответственно-перпендикулярными сторонами). Значит, мы в праве написать пропорцию:

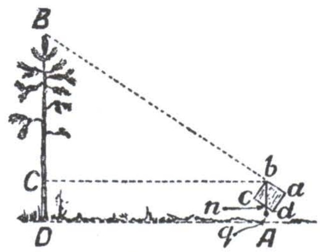


Рис. 12.

$$BC : nc = bC : bc,$$

отсюда

$$BC = bC \cdot \frac{nc}{bc}$$

Так как ***bC***, ***nc*** и ***bc*** можно измерить непосредственно, то легко получить искомую высоту дерева, прибавив длину нижней части ***CD*** ствола (высоту прибора над почвой).

Остается добавить несколько подробностей. Если край ***bc*** дощечки сделать, например, ровно в 10 см, а на краю ***dc*** нанести сантиметровые деления, то отношение $\frac{nc}{bc}$ будет всегда выражаться десятичной дробью, прямо указывающей, какую долю расстояния ***bC*** составляет высота ***BC*** дерева. Пусть, например, нить остановилась против 7-го деления (т. е. ***nc*** = 7 см); это значит, что высота дерева над уровнем глаза составляет 0,7 расстояния наблюдателя от ствола.

[1] Точки эти непременно должны лежать на одной прямой с основанием дерева

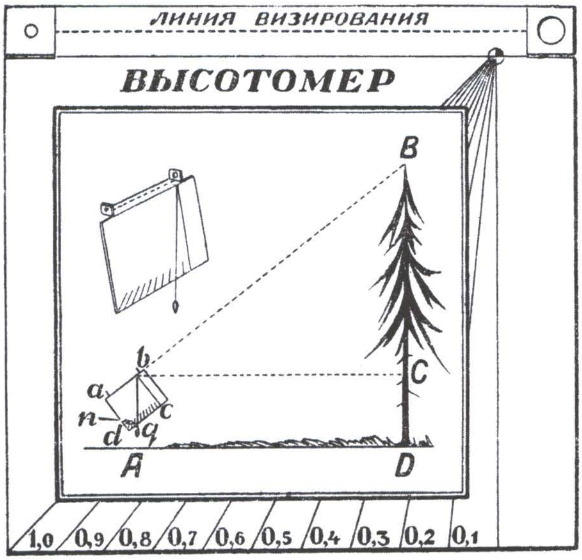


Рис. 13. Прибор для определения высоты деревьев (в рамке пояснен способ употребления).

Второе улучшение относится к способу наблюдения: чтобы удобно было смотреть вдоль линии ***ab*** можно отогнуть у верхних углов картонного прямоугольника два квадратика с просверленными в них дырочками: одной поменьше – у глаза, другой побольше – для наведения на верхушку дерева (рис. 13).

В результате у нас получится прибор, изображенный почти в натуральную величину на рис. 13. Изготовить его в таком виде легко и недолго; для этого не требуется особенного уменья мастерить. Занимая в кармане не много места, он доставит вам возможность во время экскурсии быстро определять высоты встречных предметов – деревьев, столбов, зданий и т. п.

Задача №2

Можно ли описанным сейчас высотомером измерять деревья, к которым нельзя подойти вплотную? Если можно, то как следует в таких случаях поступать?

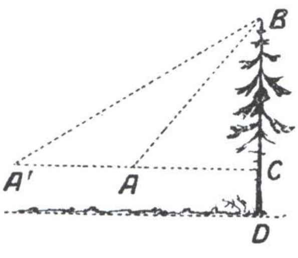


Рис. 14.

Решение

Надо направить прибор на вершину B дерева (рис. 14) с двух точек A и A'. Пусть в A мы определили, что $BC = 0{,}9AC$, а в точке A' – что $BC = 0{,}4\,A'C$.

Тогда мы знаем, что

$$AC = \frac{BC}{0{,}9}; \qquad A'C = \frac{BC}{0{,}4},$$

откуда

$$AA' = A'C - AC = \frac{BC}{0{,}4} - \frac{BC}{0{,}9} = $$

$$= \frac{25}{18}\,BC.$$

Итак,

$$AA' = \frac{25}{18}\,BC, \quad \text{или } BC = \frac{18}{25}\,AA' = 0{,}72\,AA'.$$

Вы видите, что, измерив расстояние $A'A$ между обоими местами наблюдения и взяв определенную долю этой величины, мы узнаем искомую недоступную и неприступную высоту.

203. ПОМОЩЬЮ ЗЕРКАЛА

Задача №3

Вот еще один своеобразный способ определения высоты дерева – помощью зеркала. На некотором расстоянии (рис. 15) от измеряемого дерева, на ровной земле, в

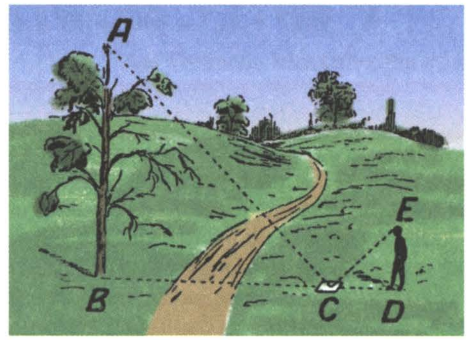


Рис. 15.

точке C кладут горизонтально зеркальце и отходят от него назад в такую точку D, стоя в которой наблюдатель видит в зеркале верхушку A дерева. Тогда дерево (AB) во столько раз выше роста наблюдателя во сколько раз расстояние BC от зеркала до дерева больше расстояния CD от зеркала до наблюдателя. Почему?

Решение

Способ основан на законе отражения света. Вершина (рис. 16) A отражается в точке A' так, что $AB = A'B$. Из подобия же треугольников BCA' и CED следует, что

$$A'B : ED = BC : CD.$$

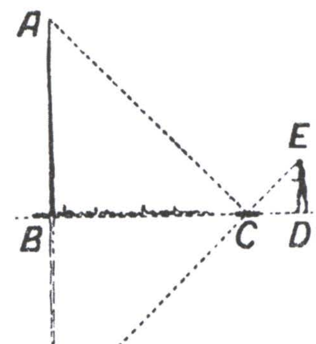


Рис. 16.

В этой пропорции остается лишь заменить $A'B$ равным ему AB, чтобы обосновать указанное в задаче соотношение.

Этот удобный и нехлопотливый способ можно применять во всякую погоду, однако не в густом насаждении, а к одиноко стоящему дереву. Читатель сам догадается, как пользоваться им в тех случаях, когда нельзя приблизиться к дереву вплотную.

Прежде чем покончить беседу об измерении высоты деревьев, предложу читателю еще одну «лесную» задачу.

204. ДВЕ СОСНЫ

Задача №4

В 40 м одна от другой растут две сосны. Вы измерили их высоту: одна оказалась в 31 м высотой, другая, молодая, – всего 6 м.

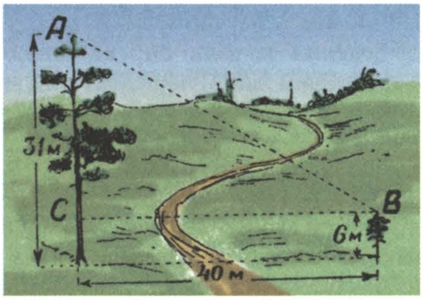


Рис. 17.

Можете ли вы вычислить, как велико расстояние между их верхушками?

Решение

Искомое расстояние *AB* (рис. 17), по теореме Пифагора, равно

$$\sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{40^2 + 25^2} = 47.$$

Между верхушками сосен 47 м.

205. ФОРМА ДРЕВЕСНОГО СТВОЛА

Теперь вы можете уже, прогуливаясь по лесу, определить – чуть не полудюжиной различных способов – высоту любого дерева. Вам интересно будет, вероятно, определить также и его объем, вычислить, сколько в нем кубических метров древесины, а заодно и взвесить его, – узнать, можно ли было бы, например, увезти такой ствол на крестьянской телеге. Однако, эта задача уже не столь проста, как определение высоты; специалисты еще не нашли способов точного ее разрешения и довольствуются лишь более или менее приближенной оценкой. Даже и для срубленного ствола, который лежит перед вами очищенный от сучьев, задача разрешается далеко не просто. Дело в том, что древесный ствол, самый ровный и тонкий, не представляет собою ни цилиндра, ни полного конуса, ни усеченного конуса, ни какого-либо другого геометрического тела, объем которого мы умеем вычислять по формуле. Ствол, конечно, не цилиндр, – он суживается к вершине (имеет «сбег», как говорят лесоводы), – но и не конус, потому что его «образующая» не прямая линия, а кривая, и при том не дуга окружности, а некоторая другая кривая, обращенная выпуклостью к оси дерева. [1]

Поэтому более или менее точное вычисление объема древесного ствола выполнимо лишь средствами так называемой высшей математики. Иным читателям покажется, быть может, странным, что для измерения простого бревна приходится обращаться к услугам высшей математики. Многие думают, что высшая математика имеет отношение только к каким-то особенным предметам, в обиходной же жизни всегда применима лишь математика элементарная. Это совершенно не верно: можно довольно точно вычислить объем планеты, пользуясь элементами геометрии, между тем как точный расчет объема длинного бревна или пивной бочки невозможен без аналитической геометрии и интегрального исчисления.

Но наша книга не предполагает у читателя знакомства с высшей математикой; придется поэтому удовлетвориться здесь лишь приблизительным вычислением объема ствола. Будем исходить из того, что объем ствола более или менее близок либо к объему усеченного конуса, либо – для ствола с вершинным концом – к объему полного конуса, либо, наконец, – для коротких бревен –к объему цилиндра. Объем каждого из этих трех тел легко вычислить. Но нельзя ли для однообразия расчета найти такую формулу объема, которая годилась бы сразу для всех трех названных тел? Тогда мы приближенно вычисляли бы объем ствола, не интересуясь тем, на что он больше похож – на цилиндр или на конус, полный или усеченный.

[1] Всего ближе кривая эта подходит к так называемой «полукубической параболе» ($y^3 = ax^2$); тело, полученное вращением этой параболы, называется «нейлоидом» (по имени старинного английского математика Нейля, нашедшего способ определять длину дуги такой кривой). Ствол выросшего в лесу дерева по форме приближается к нейлоиду. Расчет объема нейлоида выполняется приемами высшей математики.

206. УНИВЕРСАЛЬНАЯ ФОРМУЛА

Такая формула существует; более того, она пригодна не только для цилиндра, полного конуса и усеченного конуса, но также и для всякого рода призм, пирамид полных и усеченных, и даже для шара. Вот эта замечательная формула, известная в математике под названием формулы Симпсона:

в которой:

$$v = \frac{h}{6}(b_1 + 4b_2 + b_3) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} h & \text{– высота тела} \\ b_1 & \text{– площ. верхнего основания} \\ b_2 & \text{– « среднего}^{1} \text{ «} \\ b_3 & \text{– « верхнего «} \end{array} \right.$$

Задача № 5

Как доказать, что по приведенной сейчас формуле можно вычислить объем следующих семи геометрических тел:

призмы,	конуса полного,
пирамиды полной,	конуса усеченного,
пирамиды усеченной,	шара?
цилиндра,	

Решение

Убедиться в правильности этой формулы очень легко простым применением ее к перечисленным телам. Тогда получим:

для призмы и цилиндра (рис. 18) –

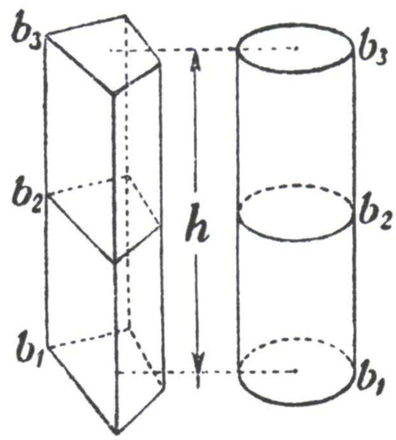


Рис. 18.

$$v = \frac{h}{6}(b_1 + 4b_1 + b_1) = b_1h;$$

[1] Т. е. площадь сечения тела посредине его высоты.

для пирамиды и конуса (рис. 19) –

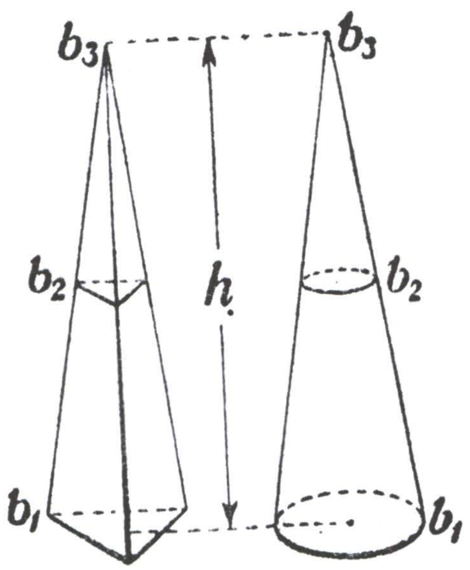


Рис. 19.

$$v = \frac{h}{6}\left(b_1 + 4\,\frac{b_1}{4} + 0\right) = \frac{b_1 h}{3};$$

для усеченного конуса (рис. 20) –

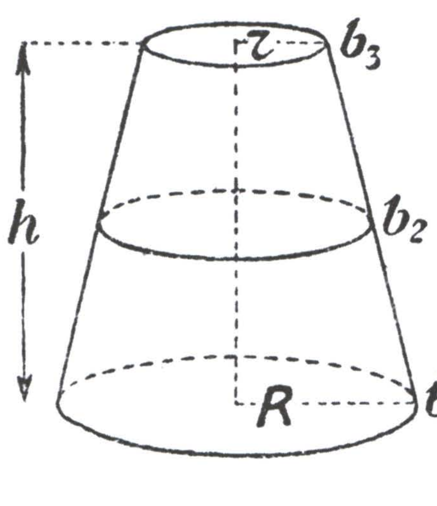


Рис. 20.

$$v = \frac{h}{6}\left[\pi R^2 + 4\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 + \pi r^2\right] =$$

$$= \frac{h}{6}\left(\pi R^2 + \pi R^2 + 2\pi Rr + \pi r^2 + \pi r^2\right) =$$

$$= \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right);$$

для усеченной пирамиды доказательство ведется сходным образом;

наконец, для шара (рис. 21) –

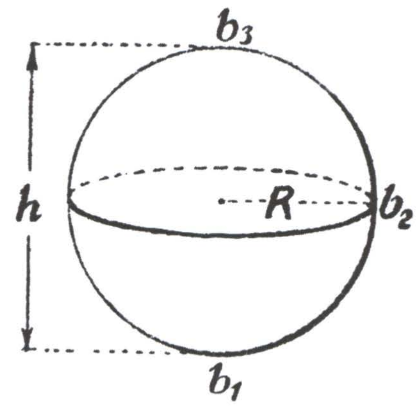


Рис. 21.

$$v = \frac{2R}{6}\left(0 + 4\pi R^2 + 0\right) = \frac{4}{3}\pi R^3;$$

Задача №6

Отметим еще одну любопытную особенность нашей универсальной формулы: она годится также и для вычисления площади плоских фигур – параллелограмма, трапеции и треугольника, если под h разуметь, как прежде, высоту фигуры, под b_1 – длину нижнего основания, под b_2 – среднего, под b_3 – верхнего.

Как это доказать?

Решение

Применяя формулу, имеем: для параллелограмма (квадрата, прямоугольника) (рис. 22) –

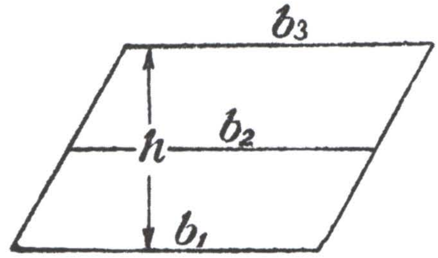


Рис. 22

$$S = \frac{h}{6}\left(b_1 + 4b_1 + b_1\right) = bh;$$

для трапеции (рис. 23) –

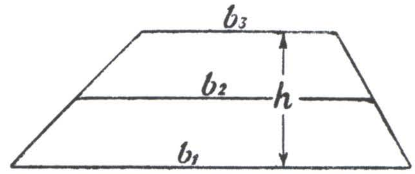


Рис. 23.

$$S = \frac{h}{6}\left(b_1 + 4\,\frac{b_1 + b_3}{2} + b_3\right) = \frac{h}{2}\left(b_1 + b_3\right);$$

для треугольника (рис. 24)–

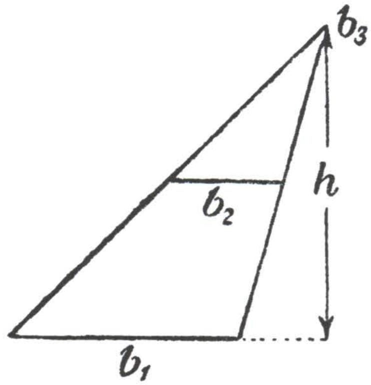


Рис. 24

$$S = \frac{h}{6}\left(b_1 + 4\frac{b_1}{2} + 0\right) = \frac{b_1 h}{2};$$

Вы видите, что формула наша имеет достаточно прав называться универсальной.

207. ОБЪЕМ И ВЕС ДЕРЕВА НА КОРНЮ

Итак, вы располагаете формулой, по которой можете приближенно вычислить объем ствола срубленного дерева, не задаваясь вопросом о том, на какое геометрическое тело он похож: на цилиндр, на полный конус или на усеченный конус. Для это понадобятся четыре измерения–длины ствола и трех поперечников: нижнего сруба, верхнего и по середине длины. Измерение нижнего и верхнего поперечника очень просто; непосредственное же определение среднего поперечника без специального приспособления («мерной вилки» лесоводов, рис. 25 [1]) довольно неудобно. Но трудность можно обойти, если измерить бечевкой

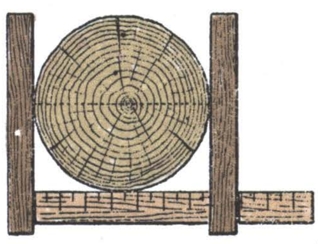


Рис. 25. Мерная вилка.

окружность ствола и разделить ее длину на $3\frac{1}{7}$, чтобы получить диаметр.

Объем срубленного дерева получается при этом с точностью, достаточной для многих практических целей. Короче, но менее точно, решается эта задача, если вычислить объем ствола, как объем цилиндра, диаметр основания которого равен диаметру ствола по середине длины: при этом результат получается, однако, преуменьшенный, иногда на 12%. Но если разделить ствол мысленно на отрубки в два метра длины и определить объем каждого из этих почти цилиндрических частей, чтобы, сложив их, получить объем всего ствола, то результат получится гораздо лучший: он погрешает в сторону преуменьшения не более, чем на 2–3%.

Все это, однако, совершенно неприменимо к дереву на корню: если вы не собираетесь взбираться на него, то вашему измерению доступен только диаметр его нижней части, В этом случае придется для определения объема довольствоваться лишь весьма приближенной оценкой, утешаясь тем, что и профессиональные лесоводы поступают обычно сходным же образом. Они

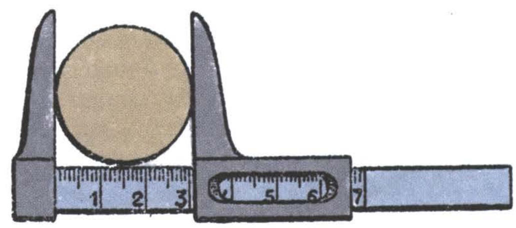


Рис. 26. Штангенциркуль.

пользуются для этого таблицей так наз. «видовых чисел», т. е. чисел, которые показывают, какую долю объем измеряемого дерева составляет от объема цилиндра той же высоты и диаметра, измеренного на высоте груди взрослого человека, т, е. 130 см (на этой высоте его удобнее всего измерять). Рис. 27 наглядно поясняет, в чем здесь дело. Конечно, «видовые числа» различны для деревьев разной породы и высоты, так как форма ствола изменчива. Но колебания не особенно велики: для стволов сосны и для ели (выросших в густом насаждении) «видовые числа» заключаются между 0,45 и 0,51, т. е. равны примерно, половине.

Значит, без большой ошибки можно принимать за объем хвойного дерева на корню половину объема цилиндра той же высоты с диаметром, равным поперечнику дерева на высоте груди. Это, разумеется, лишь приближенная оценка, но не слишком отклоняющаяся от истинного результата: до 2% в сторону преувеличения и до 10% в сторону преуменьшения [1].

Отсюда уже один шаг к тому, чтобы оценить и вес де-

Рис. 27.

[1] Сходным образом устроен общеизвестный прибор для измерения диаметра круглых изделий – штангенциркуль (рис. 26).

[1] Необходимо помнить, что «видовые числа» относятся лишь к деревьям, выросшим в лесу, т. е. к высоким и тонким; для отдельно стоящих, ветвистых деревьев нельзя указать подобных общих правил вычисления объема.

рева на корню. Для этого достаточно лишь знать, что 1 куб. м свежей сосновой или еловой древесины весит около 600–700 кг. Пусть, например, вы стоите возле ели, высоту которой вы определили в 28 м, а окружность ствола на высоте груди оказалась равной 120 см. Тогда площадь соответствующего круга равна 1100 кв. см, или 0,11 кв. м, а объем ствола $\frac{1}{2} \times 0{,}11 \times 28 = 1{,}5$ куб. м.

Принимая, что 1 куб. м свежей еловой древесины весит в среднем 650 кг, находим, что 1,5 куб. м должны весить около тонны (1000 кг).

208. ГЕОМЕТРИЯ ЛИСТЬЕВ

Задача № 7

В тени серебристого тополя от его корней разрослась поросль. Сорвите лист и заметьте, как он велик по сравнению с листьями родительского дерева, – особенно с теми, что выросли на ярком солнце. Теневые листья, очевидно, возмещают недостаток света размерами своей площади, улавливающей солнечные лучи. Разобраться в этом – задача ботаника. Но и геометр может сказать здесь свое слово: он может определить, во сколько именно раз площадь листа поросли больше площади листа родительского дерева.

Как решили бы вы эту задачу?

Рис. 28. Задача № 9: во сколько раз площадь одного листа больше площади другого?

Решение

Можно идти двояким путем. Во-первых, определить площадь каждого листа в отдельности и найти их отношение. Измерить же площадь листа можно, покрывая его прозрачной клетчатой бумагой, каждый квадратик которой соответствует, например, 4 кв мм (клетчатая бумага, употребляемая для подобных целей, называется палеткой), Это хотя и вполне правильный, но чересчур кропотливый способ [1].

Более короткий способ основан на том, что оба листа, различные по величине, имеют все же одинаковую или почти одинаковую форму: другими словами–это фигуры, геометрически подобные. Площади таких фигур, мы знаем, относятся, как квадраты их линейных размеров. Значит, определив, во сколько раз один лист длиннее или шире другого, мы простым возведением этого числа в квадрат узнаем отношение их площадей, Пусть лист поросли имеет в длину 15 см, а лист с ветви дерева – только 4 см; отношение линейных размеров $^{15}/_{4}$, и, значит, один больше другого по площади в $^{225}/_{16}$, т. е. в 14 раз. Округляя (так как полной точности здесь быть не может), мы в праве утверждать, что порослевый лист больше древесного по площади, примерно, в 15 раз.

Еще пример.

Задача № 8

У одуванчика, выросшего в тени, лист имеет в длину 31 см. У другого экземпляра, выросшего на солнцепеке, длина листовой пластинки всего 3,3 см. Во сколько, примерно, раз площадь первого листа больше площади второго?

Решение

Поступаем по предыдущему. Отношение площадей равно

$$\frac{31^2}{3{,}3^2} = \frac{960}{10{,}9} = 87$$

значит, один лист больше другого по площади раз в 90.

Не трудно подобрать в лесу множество пар листьев одинаковой формы, но различной величины, и таким образом получить любопытный материал для геометрических задач на отношение площадей подобных фигур. Непривычному глазу всегда кажется странным при этом, что сравнительно небольшая разница в длине и ширине листьев порождает заметную разницу в их площадях, Если, например, из двух листьев, геометрически подобных по форме, один длиннее другого на 20%, то отношение их площадей равно

$$1{,}2^2 = 1{,}4,$$

т. е. разница составляет 40%. А при различии ширины в 40% один лист превышает другой по площади в

$$1{,}4^2 = 2,$$

т. е. с лишком вдвое.

Рис. 29. Задача №10: во сколько раз площадь одного листа больше площади другого?

Задачи № 9 и № 10

Предлагаем читателю определить отношение площадей двух пар листьев, изображенных здесь в натуральную величину (рис. 28 и 29).

[1] У этого способа есть, однако, и преимущество: пользуясь им можно сравнивать площади листьев, имеющих неодинаковую форму, – чего нельзя сделать по далее описанному способу.

209. ШЕСТИНОГИЕ БОГАТЫРИ

Удивительные создания муравьи! Проворно взбегая по стебельку вверх с тяжелой, для своего крошечного роста, ношей в челюстях, муравей задает наблюдающему за ним человеку головоломную задачу: откуда у этого насекомого берется сила, чтобы без видимого напряжения втаскивать груз в десять раз тяжелее его самого? Ведь человек не мог бы взбегать по стремянке, держа на плечах, например, пианино (рис. 30), – а отношение груза к весу тела у муравья, примерно, такое же. Выходит, что муравей относительно сильнее человека.

Рис. 30.

Так ли?

Без геометрии здесь не разобраться. Послушаем, что говорит специалист (проф. А. Ф. Брандт), прежде всего, о силе мускулов, а затем и о поставленном сейчас вопросе соотношения сил насекомого и человека.

«Живой мускул уподобляется упругому шнурку; только сокращение его основано не на упругости, а на других причинах, и проявляется нормально под влиянием нервного возбуждения, а в физиологическом опыте от прикладывания электрического тока к соответствующему нерву или непосредственно к самому мускулу.

Опыты весьма легко проделываются на мускулах, вырезанных из только что убитой лягушки, так как мускулы холоднокровных животных весьма долго и вне организма, даже при обыкновенной температуре, сохраняют свои жизненные свойства. Форма опыта очень простая. Вырезывают главный мускул, разгибающий заднюю лапу, – мускул икр – вместе с куском бедренной кости, от которой он берет начало, и вместе с концевым сухожилием. Этот мускул оказывается наиболее удобным и по своей величине, и по форме, и по легкости препаровки. За обрезок кости мускул подвешивают на станке (рис. 31а), а сквозь сухожилие продевают крючок, на который нацепляют гирю. Если до такого мускула дотрагиваться проволоками, идущими от гальванического элемента, то он моментально сокращается, укорачивается и приподнимает груз. Постепенным накладыванием дополнительных разновесок легко определить максимальную подъемную способность мускула. Свяжем теперь по длине (рис. 31b), два, три, четыре одинаковые мускула и станем , раздражать их сразу. Этим мы не достигнем большей подъемной силы, а груз будет подниматься лишь на большую высоту, соответственно суммировке укорочений отдельных мускулов. Зато, если свяжем два, три, четыре мускула в пучок (рис. 31c), то вся система будет при раздражении поднимать и в соответственное число раз больший груз. Точно такой же результат, очевидно, получился бы и тогда, если бы мускулы между собою срослись. Итак, мы убеждаемся в том, что подъемная сила мускулов зависит не от длины или общей массы, а лишь от толщины, т. е. поперечного разреза.

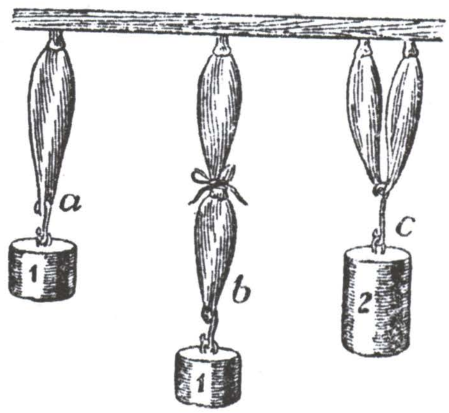
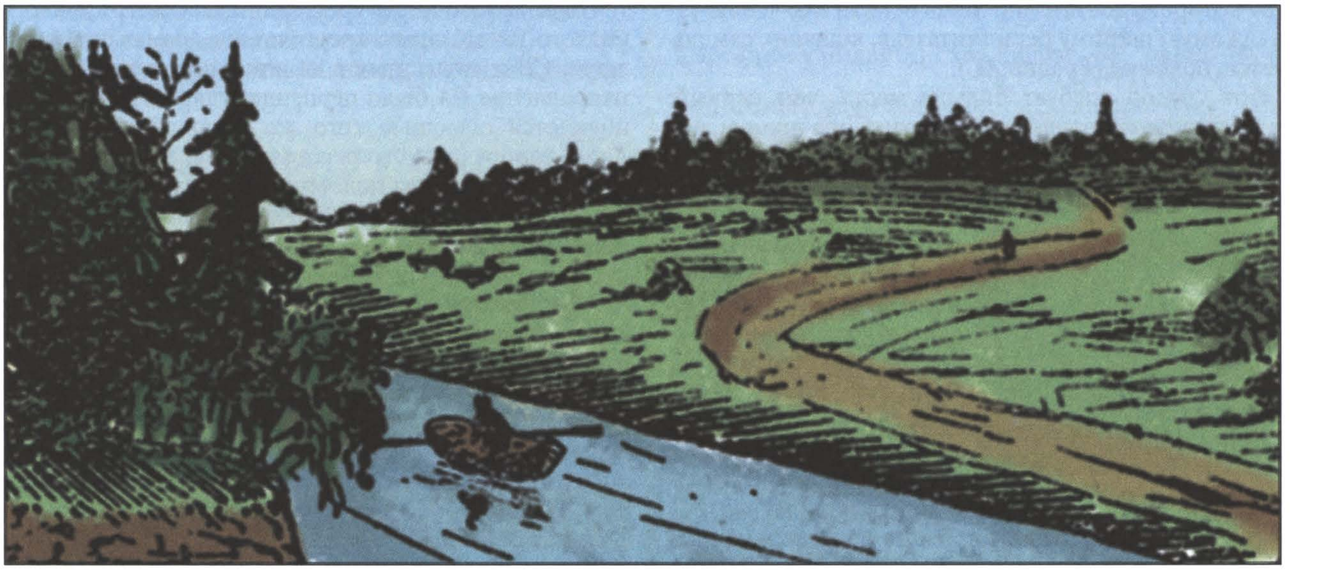


Рис. 31.

После этого отступления обратимся к сличению одинаково устроенных, геометрически подобных, но различных по величине животных. Мы представим себе двух животных, первоначальное и вдвое увеличенное во всех линейных измерениях. У второго объем и вес всего тела, а также каждого из его органов, будет в 8 раз больше, все же соответственные плоскостные измерения, в том числе и поперечное сечение мускулов, лишь в 4 раза больше. Оказывается, что мускульная сила, по мере того как животное разрастается до двойной длины и восьмерного веса, увеличивается лишь в четыре раза, т. е. животное сделалось относительно вдвое слабее. На этом основании животное, которое втрое длиннее (с поперечными сечениями в 9 раз обширнейшими и с весом в 27 раз большим), оказывалось бы относительно втрое слабее, а то, которое вчетверо длиннее – вчетверо слабее и т. д.

Законом неодинакового нарастания объема и веса животного, а вместе с тем и мускульной силы, объясняется, почему насекомое – как мы это наблюдаем на муравьях, хищных осах и т. д. – может тащить тяжести, в 30, в 40 раз превосходящие вес собственного их тела, тогда как человек в состоянии тащить нормально – мы исключаем гимнастов и носильщиков тяжестей – лишь около $^9/_{10}$, а лошадь, на которую мы взираем, как на прекрасную живую рабочую машину, и того меньше, а именно лишь около $^7/_{10}$ своего веса» [1].

[1] Подробнее об этом – см. «Занимательную механику» Я. И. Перельмана, гл. X: «Механика в живой природе».



210. ИЗМЕРИТЬ ШИРИНУ РЕКИ

Не переплывая реки, измерить ее ширину – так же просто для знающего геометрию, как определить высоту дерева, не взбираясь на его вершину. Неприступное расстояние измеряют теми же приемами, какими мы измеряли недоступную высоту. В обоих случаях определение искомого расстояния заменяется промером другого расстояния, легко поддающегося непосредственному измерению.

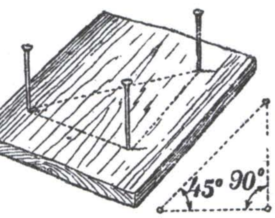


Рис. 32.

Из многих способов решения этой задачи рассмотрим несколько наиболее простых.

1) Для первого способа понадобится уже знакомый нам «прибор» с тремя булавками на вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника (рис. 32). Пусть требуется определить ширину *AB* реки (рис. 33), стоя на том берегу, где точка *B*, и не перебираясь на противоположный. Став где-нибудь у точки *B*, держите булавочный прибор близ глаз так, чтобы, смотря одним глазом вдоль двух булавок, вы видели, как обе они покрывают точки *B* и *A*. Легко понять, что, когда вам удастся, вы будете находиться как раз на продолжении прямой *AB*. Теперь, не двигая дощечки прибора, смотрите вдоль других двух булавок (перпендикулярно прежнему направлению) и заметьте какую-нибудь точку *D*, покрываемую этими булавками, т. е. лежащую на прямой, перпендикулярной к *AC*. После этого воткните в точку *C* веху, покиньте это место и идите с вашим инструментом вдоль прямой *CD* пока не найдете на ней такую точку E (рис. 34), откуда можно одновременно покрыть для глаза булавкой *b* шест точки *C*, а булавкой *a* – точку *A*.

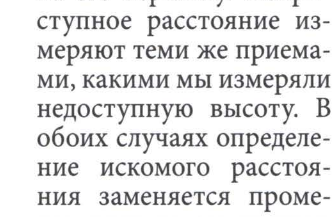


Рис. 33.

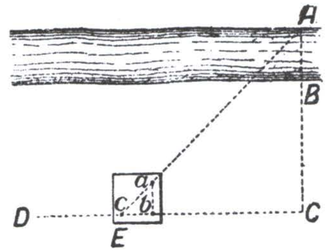


Рис. 34.

Это будет значить, что вы отыскали на берегу третью вершину треугольника *ACE* в котором угол *C* – прямой, а угол *E* – равен острому углу булавочного прибора, т. е. $\frac{1}{2}$ прямого.

Очевидно, и угол *A* равен $\frac{1}{2}$ прямого, т. е. *AC* = *CE*. Если вы измерите расстояние *CE* хотя бы шагами, вы узнаете расстояние *AC*, а отняв *BC*, которое легко измерить, вы определите искомую ширину реки.

Довольно неудобно и трудно держать в руке булавочный прибор неподвижно; лучше поэтому прикрепить эту дощечку к палке с заостренным концом, которую и втыкать отвесно в землю.

2) Второй способ сходен с первым. Здесь также находят точку *C* на продолжении *AB* и намечают, помощью булавочного прибора, прямую *CD* под прямым углом к *AC*. Но дальше поступают иначе (рис. 35). На прямой *CD* отмеряют равные расстояния *CE* и *EF* произвольной длины и втыкают в точки *E* и *F* вехи. Став затем в точке *F* с булавочным прибором, намечают направление *FG*, перпендикулярное к *EC*. Теперь, идя вдоль *FG*, отыскивают на этой линии такую точку *H*, из которой веха *E* кажется покрывающей точку *A*. Это будет значить, что точки *H*, *E* и *A* лежат на одной прямой.

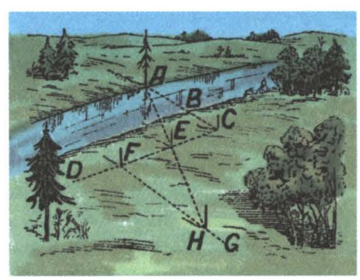


Рис. 35.

Задача решена: расстояние *FH* равно расстоянию *AC*, от которого достаточно лишь отнять *BC*, чтобы узнать искомую ширину реки (читатель, конечно, сам догадается, почему *FH* равно *AC*).

Этот способ требует больше места, чем первый; если местность позволяет осуществить оба приема, полезно проверить один результат другим.

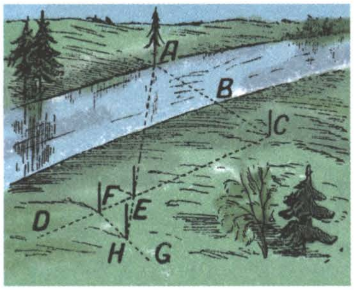


Рис. 36.

3) Описанный сейчас способ можно видоизменить: отмерить на прямой *CF* не равные расстояния, а одно в несколько раз меньше другого. Например (рис. 36), отмеряют *FE* в четыре раза меньше *EC*, а далее поступают по прежнему: по направлению *FG*, перпендикулярному к *FC*, отыскивают точку *H*, из которой веха *E* кажется покрывающей точку *A*. Но теперь уже *FH* не равно *AC*, а меньше этого расстояния в 4 раза: треугольники *ACE* и *EFH* здесь не равны, а подобны (имеют равные углы при неравных сторонах). Из подобия треугольников следует пропорция

$$AC : FH = CE : EF = 4 : 1.$$

Значит, измерив *FH* и умножив результат на 4, получим расстояние *AC*, а отняв *BC*, узнаем и искомую ширину реки.

Способ этот требует, как видим, меньше места, и потому удобнее для выполнения, чем предыдущий.

4) Четвертый способ основан на том свойстве прямоугольного треугольника, что если один из его острых углов равен 30°, то противолежащий катет составляет половину гипотенузы, Убедиться в правильности этого положения очень легко. Пусть угол

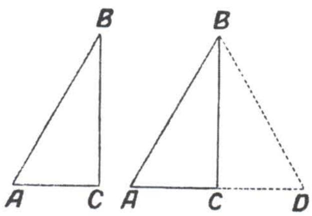


Рис. 37.

B прямоугольного треугольника *ABC* (рис. 37) равен 30°; докажем, что в таком случае $AC = \frac{1}{2} AB$. Повернем треугольник *ABC* вокруг *BC*. так, чтобы он расположился симметрично своему первоначальному положению (рис. 37), образовав фигуру *ABD*; линия *ACD*, конечно, прямая, потому что оба угла у точки *C* прямые. В треугольнике *ABD* угол *A* = 60°, угол *ABD*, как составленный из двух углов по 30°, тоже равен 60°. Значит, *AD* = *BD*, как стороны, лежащие против равных углов. Но $AC = \frac{1}{2} AD$; следовательно, $AC = \frac{1}{2} AB$.

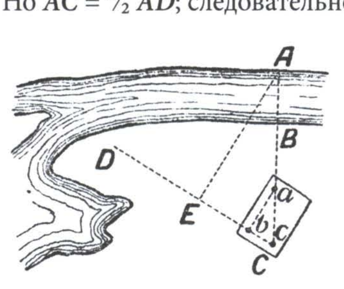


Рис. 38.

Желая воспользоваться этим свойством треугольника, мы должны расположить булавки на дощечке так, чтобы основания их составляли прямоугольный треугольник, в котором катет вдвое меньше гипотенузы. С этим прибором мы помещаемся в точке *C* (рис. 38) так, чтобы направление *AC* совпадало с гипотенузой булавочного треугольника. Смотря вдоль короткого катета этого треугольника, намечают направление *CD* и отыскивают на нем такую точку *E*, чтобы направление *EA* было перпендикулярно к *CD* (это выполняется помощью того же булавочного прибора). Легко сообразить, что расстояние *CE* – катет, лежащий против 30°, – равно половине *AC*. Значит, измерив *CE*, удвоив это расстояние и отняв *BC*, получим искомую ширину *AB* реки.

Вот четыре легко выполнимых приема, помощью которых всегда возможно, не переправляясь на другой берег, измерить ширину реки с вполне удовлетворительной точностью. Других способов, требующих употребления более сложных приборов (хотя бы и самодельных), мы здесь рассматривать не будем.

211. ДЛИНА ОСТРОВА

Задача № 11

Теперь нам предстоит задача более сложная. Стоя у реки или у озера, вы видите остров (рис. 39), длину которого желаете измерить, не покидая берег. Можно ли выполнить такое измерение?

Рис. 39.

Хотя в этом случае для нас неприступны оба конца измеряемой линии, задача все же вполне разрешима, притом без сложных приборов.

Решение

Пусть требуется узнать длину *AB* (рис. 40) острова, оставаясь во время измерения на берегу. Избрав на берегу две произвольные точки *P* и *Q*, втыкают в них вехи и отыскивают на прямой *PQ* точки *M* и *N* так, чтобы направления *AM* и *BN* составляли с направлением *PQ* прямые углы (для этого пользуются булавочным прибором). В середине *O* расстояния *MN* втыкают веху и отыскивают на продолжении линии *AM* такую точку *C*, откуда веха *O* кажется покрывающей точку *B*. Точно так же на продолжении *BN* отыскивают точку *D*, откуда веха *O* кажется покрывающей конец *A* острова. Расстояние *CD* и будет искомой длиной острова.

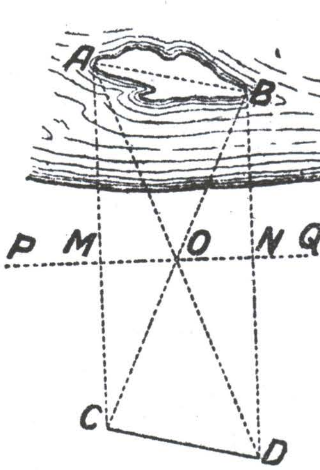


Рис. 40.

Доказать это не трудно. Рассмотрите прямоугольные треугольники *AMO* и *OND*; в них катеты *MO* и *ON* равны, а кроме того равны углы

AOM и *NOD*, – следовательно, треугольники равны, и *AO* = *OD*. Сходным образом можно доказать, что *BC* = *AD*. Сравнивая затем треугольники *ABO* и *COD*, убеждаемся в их равенстве, а значит, и в равенстве расстояний *AB* и *CD*.

212. ПЕШЕХОД НА ДРУГОМ БЕРЕГУ

Задача № 12

По другому берегу реки идет человек. Вы отчетливо различаете его шаги. Можете ли вы, не сходя с места, определить, хотя бы приблизительно, расстояние от него до вас? Никаких приборов вы под рукою не имеете.

Решение

У вас нет приборов, но есть глаза и руки, – этого достаточно. Вытяните руку вперед по направлению к пешеходу и смотрите на конец пальца одним глазом, ожидая, когда отдаленный пешеход покроется им. В этот момент вы закрываете тот глаз, которым сейчас смотрели, и открываете другой: пешеход покажется вам словно отодвинутым назад. Сосчитайте, сколько шагов сделает он, прежде чем снова поравняется с вашим пальцем. Вы получите все данные, необходимые для приблизительного определения расстояния.

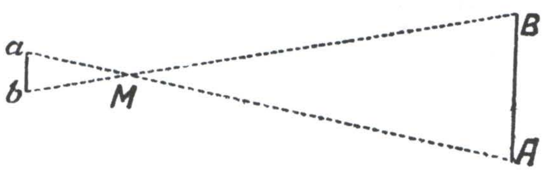


Рис. 41.

Объясним, как ими воспользоваться. Пусть на рис. 41 ***a*** и ***b*** – ваши глаза, точка ***M*** – конец пальца вытянутой руки. Точка ***A*** – первое положение пешехода, ***B*** – второе. Треугольники ***abM*** и ***ABM*** подобны (вы должны повернуться к пешеходу так, чтобы ***ab*** было приблизительно параллельно направлению его движения). Значит, ***BM*** : ***bM*** = ***AB*** : ***ab***, – пропорция, в которой неизвестен только один член ***AM***, все же остальные можно определить непосредственно. Действительно: ***bM*** – длина вашей вытянутой руки: ***ab*** – расстояние между зрачками ваших глаз; ***AB*** – измерено шагами пешехода, которые можно принять в среднем равными ¾ м. Следовательно, неизвестное расстояние от вас до пешехода на противоположном берегу реки:

$$BM = AB \cdot \frac{aM}{ab}$$

Если, например, расстояние между зрачками глаз (***ab***) у вас 6 см, длина ***aM*** от конца вытянутой руки до глаза 60 см, а пешеход сделал от ***A*** до ***B***, скажем, 14 шагов, то расстояние его от вас $MB = 14 \cdot \frac{60}{6} = 140$ шагов, или 105 м.

Достаточно вам заранее измерить у себя расстояние между зрачками и ***aM*** – расстояние от глаза до конца вытянутой руки, чтобы, запомнив их отношение $\frac{aM}{ab}$ быстро определять отдаление недоступных предметов. Тогда останется лишь умножить ***AB*** на это отношение. В среднем у большинства людей $\frac{aM}{ab}$ равно 10, с небольшими колебаниями. Затруднение будет лишь в том, чтобы каким-нибудь образом определить расстояние ***AB***. В нашем случае мы воспользовались шагами идущего вдали человека. Но можно привлечь к делу и иные указания. Если, например, вы измеряете расстояние от отдаленного товарного поезда, то длину ***AB*** можно оценить по сравнению с длиною товарного вагона, которая обычно известна (7,6 м между буферами). Если определяется расстояние от дома, то ***AB*** оценивают по сравнению с шириною окна, с длиною кирпича (27 см) и т. п. Тот же прием можно приложить и другим способом – для определения размера отдаленного предмета, если известно его расстояние. Для этой цели можно пользоваться и другими «дальномерами», которые мы сейчас опишем.

213. ПРОСТЕЙШИЕ ДАЛЬНОМЕРЫ

В первой главе был описан самый простой прибор для определения недоступных высот – высотомер. Теперь опишем простейшее приспособление для измерения неприступных расстояний – «дальномер». Простейший дальномер можно изготовить из обыкновенной спички. Для этого нужно лишь нанести на одной из ее граней миллиметровые деления, – для ясности попеременно светлые; и черные (рис. 42).

Рис. 42. Спичка-дальномер.

Пользоваться этим примитивным «дальномером» для оценки расстояния до отдаленного предмета можно только в тех случаях, когда размеры этого предмета вам известны; впрочем, и всякого рода иными дальномерами, более совершенного устройства, можно пользоваться при том же условии. Предположим, вы видите вдали человека и ставите себе задачу – определить расстояние до него. Здесь спичка-дальномер может вас выручить. Держа ее в вытянутой руке (рис. 43) и глядя одним глазом, вы приводите свободный ее конец в совпадение с верхней частью отдаленной фигуры. Затем, медленно подвигая по спичке ноготь большого пальца, вы останавливаете его у той ее точки, которая проектируется на основании человеческой фигуры, Вам остается теперь только узнать, приблизив спичку к глазу, у которого деления остановился ноготь, и тогда все данные для решения задачи у вас налицо.

Рис. 43.

Легко убедиться в правильности пропорции:

$$\frac{\text{искомое расстояние}}{\text{расст. от глаза до спички}} = \frac{\text{средн. рост человека}}{\text{измер. часть спички}}$$

Отсюда не трудно вычислить искомое расстояние. Если, например, расстояние до спички – 60 см, рост человека – 1,7 м, а измеренная часть спички – 12 мм, то определяемое расстояние равно

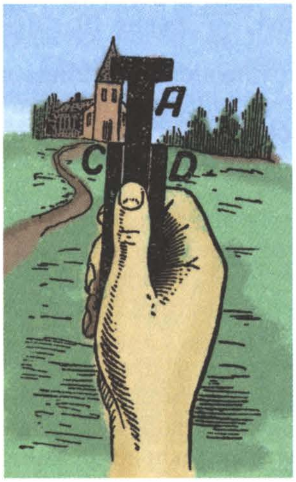


Рис. 44.

$$60 \cdot \frac{1700}{12} = 8500 \text{ см} = 85 \text{ м}.$$

Чтобы приобрести некоторый навык в обращении с этим дальномером, измерьте рост какого-либо из ваших товарищей и, попросив его отойти на некоторое расстояние, попытайтесь определить, насколько шагов от вас он отошел.

Тем же приемом можете вы определить расстояние от всадника (средняя высота 2,2 м), велосипедиста (диаметр колеса – 75 см), телеграфного столба вдоль рельсового пути (высота 8 м, отвесное расстояние между соседними изоляторами – 90 см), до железнодорожного поезда, кирпичного дома и т. п. предметов, размеры которых не трудно оценить с достаточною точностью. Таких случаев может представиться во время экскурсий довольно много.

Для умеющих мастерить не составит большого труда изготовление более удобного прибора того же типа, предназначенного для оценки расстояний по величине отдаленной человеческой фигуры. Устройство его ясно из рис. 44. Наблюдаемый предмет помещают как раз в промежуток *A*, образующийся при поднятии выдвижной части приборчика. Величина промежутка удобно определяется по делениям на частях *C* и *D* дощечки. Чтобы избавить себя от необходимости делать какие-либо расчеты, можно на полоске *C* прямо нанести против делений соответствующие им расстояния, если наблюдаемый предмет – человеческая фигура (прибор держат от глаза на расстоянии вытянутой руки). На правой полоске *D* можно нанести обозначения расстояний, заранее вычисленных для случая, когда наблюдается фигура всадника (2,2 м). Для телеграфного столба (высота 8 м), аэроплана с размахом крыльев 15 м и т. п. более крупных предметов

Рис. 45. Дальномер.

можно использовать верхние, свободные части полосок *C* и *D*. Тогда прибор получит вид, представленный в натуральную величину на рис. 45.

Германские солдаты во время последней войны снабжались дальномерами именно такой конструкции [1].

Конечно, точность такой оценки расстояния не велика. Это именно лишь оценка, а не измерение. В примере, рассмотренном ранее, когда расстояние до человеческой фигуры оценено было в 85 м, ошибка в 1 мм при измерении части спички дала бы погрешность результата в 7 м ($^1/_{12}$ от 85). Но если бы человек отстоял вчетверо дальше, мы отмерили бы на спичке не 12, а 3 мм – и тогда ошибка даже в ½ мм вызвала бы изменение результата на 57 м. Поэтому наш прием, в случае человеческой фигуры, надежен только для сравнительно близких расстояний в 100–200 м. При оценке больших расстояний надо избирать и более крупные предметы.

214. СКОРОСТЬ ТЕЧЕНИЯ

«Много воды утекло с тех пор», – часто говорим мы, но мало кто умеет ответить на вопрос: сколько именно воды протекает, например, в сутки даже в небольшой речке? Между тем, это вполне поддается измерению и представляет сравнительно нетрудную геометрическую задачу.

Чтобы решить ее, нужно прежде всего измерить скорость течения воды в реке. Измерение выполняют несколько человек. Избирают прямой участок реки и ставят вдоль берега две вехи *A* и *B*, в расстоянии, например, 100 м одну от другой (рис. 46). На линиях, перпендикулярных к *AB*, ставят еще две вехи *C* и *D*. Один из участников измерения становится позади вехи *C*, другой – позади вехи *D*, и смотрят вдоль направлений *CA* и *DB* на поверхность воды. Третий участник бросает в воду выше точки *A* какой-нибудь хорошо заметный поплавок, например, закупоренную полупустую бутылку с флажком. Наблюдатели, стоящие у вех с хорошо сверенными часами в руках, отмечают моменты, когда поплавок пересечет продолжение линий *AC* и *DB*. Если разница времени, например, 40 секунд, то скорость течения воды в реке

Рис. 46.

$$\frac{100}{40} = 2\,½ \text{ м в секунду}.$$

Полученный результат относится лишь к поверхностным струям реки. Более глубокие слои текут медленнее, и средняя скорость течения всех струй в реке составляет приблизительно ⅚ этой поверхностной скорости, – в нашем случае около 2 м в секунду.

Можно определить поверхностную скорость и иным – правда менее надежным – способом. Сядьте в лодку и проплывите 1 км (отмеренный по берегу) вверх

[1] Автор имеет в виду Первую мировую войну (1914–1918) (прим. ред.).

по течению и затем обратно по течению, стараясь все время грести с одинаковою силою. Пусть вы проплыли эти 1000 м против течения в 18 минут, а по течению – в 6 минут. Обозначив искомую скорость течения реки через x, а скорость вашего движения в стоячей воде через y, вы составляете уравнения:

$$\frac{1000}{y-x} = 18; \qquad \frac{1000}{y+x} = 6.$$

откуда

$$y+x = \frac{1000}{6}$$
$$y-x = \frac{1000}{18}$$
$$2x = 110$$
$$x = 55$$

Скорость течения воды на поверхности равна 55 м в минуту, а, следовательно, средняя скорость – около ⁵⁄₆ м в секунду.

215. СКОЛЬКО ВОДЫ ПРОТЕКАЕТ В РЕКЕ?

Так или иначе, вы всегда можете определить скорость, с какой текут водяные струи реки. Труднее вторая часть подготовительной работы, необходимой для вычисления количества протекающей воды, – определение площади поперечного разреза воды. Чтобы найти величину этой площади, – того, что принято называть «живым сечением» реки, – надо изготовить чертеж этого сечения. Выполняется подобная работа следующим образом.

В том месте, где вы измерили ширину реки, вы ставите на обоих берегах по вехе. Затем садитесь с товарищем в лодку и плывете от одной вехи к другой, стараясь все время держаться прямой линии, соединяющей вехи. Неопытный гребец с такой задачей не справится, особенно в реке с быстрым течением. Ваш товарищ должен быть искусным гребцом; кроме того, ему должен помогать и третий участник работы, который, стоя на берегу, следит, чтобы лодка не сбивалась с надлежащего направления, и в нужных случаях дает гребцу сигналами указания, в какую сторону ему нужно повернуть. В первую переправу через речку вы должны сосчитать лишь, сколько ударов веслами она потребовала, и отсюда узнать, какое число гребков перемещает лодку на 5 или 10 м. Тогда вы совершаете второй переезд, вооружившись на этот раз достаточно длинным шестом с нанесенными на нем делениями, и каждые 5–10 м (отмеряемые по числу гребков) погружаете шест до дна, записывая глубину речки в этом месте.

Таким способом можно промерить живое сечение только небольшой речки; для широкой, многоводной реки необходимы другие, более сложные приемы; работа эта выполняется специалистами. Любителю приходится избирать себе задачу, отвечающую его скромным измерительным средствам.

Когда все измерения закончены, вы прежде всего набрасываете на бумаге чертеж поперечного профиля реки. У вас получится фигура вроде той, какая изображена сплошными линиями на рис. 47. Площадь этой фигуры определить весьма несложно, так как она расчленяется на ряд трапеций, в которых вам известны оба основания и высота, и на два краевых треугольника также с известными основанием и высотой.

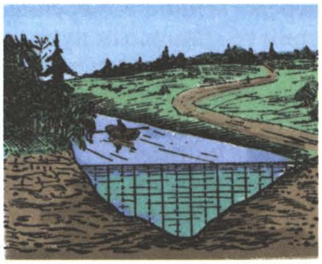


Рис. 47. «Живое сечение» реки.

Теперь вы располагаете уже всеми данными для расчета количества протекающей воды. Очевидно, через живое сечение реки протекает каждую секунду объем воды, равный объему призмы, основанием которой служит это сечение, а высотой – средняя секундная скорость течения. Если, например, средняя скорость течения воды в речке 1,5 м в секунду, а площадь живого сечения, скажем, равна 126 кв. м, то ежесекундно через это сечение проносится

$$126 \times 1,5 = 190 \text{ куб. м воды,}$$

или столько же тонн [1]. Это составляет в час 190 × 3 600= = 680 000 куб. м, а в сутки 680 000 × 24 = 16 000 000 куб. м, около 16 миллионов куб. метров, почти в сто раз больше, чем подает за то же время ленинградский водопровод, питающий два миллиона жителей [2]. В год мимо вас проносится в такой речке около 6 куб. км воды – содержимое исполинского бака в километр ширины, километр глубины и шесть километров длины. А ведь речка с живым сечением 126 кв. м. – не так уж велика: она может иметь, скажем, 6 м глубины и 21 м ширины. Сколько же воды протекает за год в такой реке, как Нева, через живое сечение которой ежесекундно проносится 3300 куб. м воды!

Заметим, что количество воды, ежесекундно протекающей через поперечное сечение реки, называется «расходом» воды в этой реке. Средний «расход» воды в Днепре у Киева – 700 куб. м; в Неве у Ленинграда, как сейчас было указано, 3300 куб. м; в реке Москве, в пределах города, вследствие необычайно медленного течения (только 1½ мм в секунду) – менее 9 куб. м.

216. РАДУЖНАЯ ПЛЕНКА

На реке, в которую спускается вода от завода, можно заметить нередко близ стока красивые цветные переливы. Это играет оттенками радуги тончайшая масляная пленка. Масло (например, машинное) стекающее на реку вместе с водою завода, остается на поверхности, как более легкое, и растекается чрезвычайно тонким слоем. Можно ли измерить или хотя бы приблизительно оценить толщину такой пленки?

Задача кажется замысловатой; однако решить ее не особенно трудно. Вы уже догадываетесь, что мы не станем заниматься таким безнадежным делом, как не-

[1] 1 куб. м пресной воды весит 1 т (1 000 кг.)

[2] На момент написания книги в 1933 г. Город Санкт-Петербург назывался Ленинград, а численность его жителей составляла около 2 млн. человек (прим. ред.).

посредственное измерение толщины пленки. Мы измерим ее косвенным путем, короче сказать – вычислим.

Возьмите определенное количество машинного масла, например 20 г, и вылейте на воду, подальше от берега (с лодки). Когда масло растечется по воде в форме более или менее ясно очерченного круглого пятна, измерьте хотя бы приблизительно диаметр этого круга. Зная диаметр, вычислите площадь. А так как вам известен и объем взятого масла (его легко вычислить по весу), то уже сама собою определится отсюда искомая толщина пленки. Рассмотрим пример.

Задача № 13

Один грамм керосина, растекаясь по воде, покрывает круг поперечником в 30 см. Какова толщина керосиновой пленки ка воде? Куб. сантиметр керосина весит 0,8 г.

Решение

Найдем объем пленки, который, конечно, равен объему взятого керосина. Если один кубический сантиметр керосина весит 0,8 г, то на 1 г идет $\frac{1}{0{,}8} = 1{,}25$ см, 1 250 куб. мм.

Площадь круга с диаметром 30 см, или 300 мм, равна 70000 кв. мм. Искомая толщина пленки равна объему, деленному на площадь основания:

$$\frac{1250}{70\,000} = 0{,}018 \text{ мм.}$$

т. е. менее 50-й доли миллиметра. Прямое измерение подобной толщины обычными средствами, конечно, невозможно.

Масляные и мыльные пленки растекаются еще более тонкими слоями, достигающими 0,0001 мм и менее. «Однажды, – рассказывает английский физик Бойз в известной книге «Мыльные пузыри» – я проделал такой опыт на пруде. На поверхность воды была вылита ложка оливкового масла. Сейчас же образовалось большое пятно, метров 20–30 в поперечнике. Так как пятно было в тысячу раз больше в длину и в тысячу раз больше в ширину, чем ложка, то толщина слоя масла на поверхности воды должна была приблизительно составлять миллионную часть толщины слоя масла в ложке, или около 0,000002 миллиметра».

217. КРУГИ НА ВОДЕ

Задача № 14

Вы не раз, конечно, с любопытством рассматривали те круги, которые порождает брошенный в спокойную воду камень. И вас, без сомнения, никогда не затрудняло объяснение этого поучительного явления природы: волнение распространяется от начальной точки во все стороны с одинаковой скоростью; поэтому в каждый момент все волнующиеся точки должны быть расположены на одинаковом расстоянии от места возникновения волнения, т. е. на окружности.

Рис. 48. Круги на воде.

Но как обстоит дело в воде текучей? Должны ли волны от камня, брошенного в воду быстрой реки, тоже иметь форму круга, или же форма их будет вытянутая?

На первый взгляд может показаться, что в текучей воде круговые волны должны вытянуться в ту сторону, куда увлекает их течение: волнение передается по течению быстрее, чем против течения и в боковых направлениях. Поэтому волнующиеся части водной поверхности должны, казалось бы, расположиться по некоторой вытянутой замкнутой кривой, – во всяком случае, не по окружности.

В действительности, однако, это не так. Бросая камни в самую быструю речку, вы можете убедиться, что волны получаются строго круговые – совершенно такие же, как и в стоячей воде. Почему?

Решение

Будем рассуждать так. Если бы вода не текла, волны были бы круговые (рис. 49). Какое же изменение вносит течение? Оно увлекает каждую точку этой круговой волны в направлении, указанном стрелками, причем все точки переносятся по параллельным прямым с одинаковой скоростью, т. е. на одинаковые расстояния. А такое «параллельное перенесение» не изменяет формы фигуры.

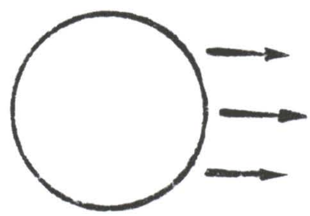


Рис. 49.

Действительно, в результате перенесения точка 1 (рис. 50) окажется в точке 1′, точка 2 – в точке 2′ и т. д.; четыреугольник 1234 заменится четыреугольником 1′2′3′4′, который равен ему, как легко усмотреть из образовавшихся параллелограммов 122′1′, 233′2′, 344′3′ и т. д. Взяв на окружности не четыре, а больше точек, мы также получили бы равные многоугольники; наконец, взяв бесконечно много точек, т. е. окружность, мы получили бы, после параллельного перенесения, равную окружность.

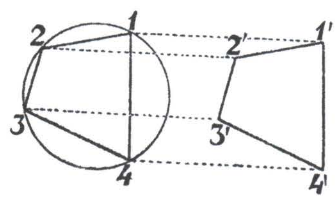


Рис. 50.

Вот почему переносное движение воды не изменяет формы волн, – они и в текучей воде остаются кругами. Разница лишь в том, что на поверхности озера круги не перемещаются (если не считать того, что они расходятся от своего неподвижного центра); на поверхности же реки круги движутся вместе со своим центром со скоростью течения воды.

218. ФАНТАСТИЧЕСКАЯ ШРАПНЕЛЬ

Задача № 15

Оставим ненадолго реку и займемся задачей, которая как будто не имеет сюда никакого отношения, на самом же деле, как увидим, тесно примыкает к рассматриваемой теме.

Вообразите шрапнельный снаряд, летящий высоко в воздухе. Вот он начал опускаться и вдруг разорвался; осколки разлетаются в разные стороны. Пусть все они одинаковы, брошены взрывом с одинаковой силою и несутся, не встречая помехи со стороны воздуха. Спрашивается: как расположатся эти осколки спустя секунду после взрыва, если за это время еще не успеют достичь земли?

Решение

Задача похожа на ту, которую мы сейчас рассмотрели. И здесь кажется, будто осколки должны расположиться некоторой фигурой, вытянутой вниз, в направлении падения: ведь осколки, брошенные вверх, летят медленнее, чем брошенные вниз. Нетрудно, однако, доказать, что осколки нашей воображаемой шрапнели должны расположиться на поверхности шара. Представьте на мгновение, что тяжести нет; тогда, разумеется, все осколки в течение секунды отлетят от места взрыва на строго одинаковое расстояние, т. е. расположатся на шаровой поверхности. Введем теперь в действие силу тяжести. Под ее влиянием осколки должны опускаться; но так как все тела, мы знаем, падают с одинаковой скоростью, [1] то и осколки должны в течение секунды опуститься на одинаковое расстояние, притом по параллельным прямым. Но такое параллельное перемещение не меняет формы фигуры, – шар остается шаром.

Итак, осколки фантастической шрапнели должны образовать шар, который, словно раздуваясь, опускается вниз со скоростью свободно падающего тела.

219. КИЛЕВАЯ ВОЛНА

Вернемся к реке. Стоя на мосту, обратите внимание на след, оставляемый быстро идущим судном. Вы увидите, как от носовой части расходятся под углом два водяных гребня.

Откуда они берутся? И почему угол между ними тем острее, чем быстрее идет судно?

Причина возникновения этих гребней хорошо объяснена немецким физиком Махом в его «Популярных очерках».

«Представьте себе, что вы бросаете в воду камешки через одинаковые промежутки времени и при том так, что места, куда вы попадаете, расположены на прямой линии в равных расстояниях одно от другого. Образуются круги, все менее и менее широкие, и все круги в совокупности порождают подобие волны у носа корабля. Чем камешки мельче и чем чаще их бросают, тем сходство заметнее. Погрузив в воду палку и ведя ею по поверхности воды, вы как бы заменяете прерывистое падение камешков непрерывным, – и тогда вы видите как раз такую волну, какая возникает у носа корабля».

К этой наглядной картине остается прибавить немного, чтобы довести ее до полной отчетливости. Врезаясь в воду, нос корабля каждое мгновение порождает такую же круговую волну, как и брошенный камень. Круг расширяется во все стороны, но тем временем судно успевает продвинуться вперед и породить новую круговую волну, за которой тотчас же следует третья, и т. д. Получается картина, представленная на рис. 51. Встречаясь между собою, гребни соседних волн разбивают друг друга; остаются нетронутыми от полной окружности только те два небольших участка, которые находятся на их наружных частях. Эти наружные участки, сливаясь, образуют два сплошных гребня, имеющих положение внешних касательных ко всем круговым волнам (рис. 52).

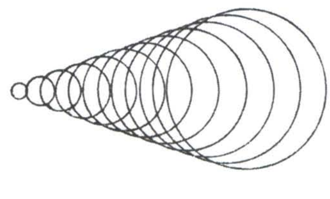


Рис. 51.

Таково происхождение тех водяных гребней, которые видны позади судна, позади всякого вообще тела, движущегося с достаточной быстротой по поверхности воды.

Отсюда прямо следует, что явление это возможно только тогда, когда тело движется быстрее, чем бегут водяные волны. Если вы проведете палкой по воде медленно, то гребней не увидите: круговые волны расположатся одна внутри другой, и общей касательной провести к ним нельзя будет.

Расходящиеся гребни можно наблюдать и в том случае, когда тело стоит на месте, а вода протекает мимо него. Если течение реки достаточно быстро, то подобные гребни образуются в воде, обтекающей мостовые устои. Форма волн получается здесь даже более отчетливая, чем, например, от парохода, так как правильность их не нарушается работою винта.

Выяснив геометрическую сторону дела, попробуем разрешить такую задачу.

Задача № 16

От чего зависит величина угла между обеими ветвями килевой волны парохода?

Решение

Проведем из центров круговых волн (рис. 52) радиусы к соответствующим участкам прямолинейного гребня, т. е. к точкам общей касательной. Легко сообразить, что O_1B есть путь, пройденный за некоторое время носовой частью корабля, а O_1A_1 – расстояние, на которое за то же синус угла O_1BA_1, в то же время это есть отношение скоростей волнения и корабля. Значит, угол B между гребнями килевой волны не что иное, как удвоенный угол, синус которого равен отношению скорости бега круговых волн к скорости судна.

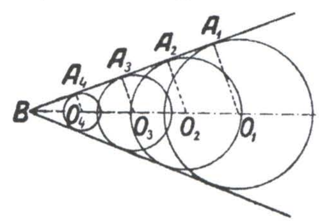


Рис. 52.

Скорость распространения круговых волн в воде приблизительно одинакова для всех судов; поэтому угол расхождения ветвей килевой волны зависит, главным образом, от скорости корабля: синус половины угла обычно пропорционален этой скорости. И, наоборот, по величине угла можно судить о том, во сколько раз скорость парохода больше скорости волн. Если, например, угол между ветвями килевой волны 30°, – как у большинства морских грузо-пассажирских судов, – то синус его половины (sin 15°) равен 0,26; это значит, что

[1] Различия обусловливаются сопротивлением воздуха, которое мы в нашей задаче исключили.

скорость парохода больше скорости бега круговых волн $\frac{1}{0{,}26}$ т. е. примерно в 4 раза.

220. СКОРОСТЬ ПУШЕЧНЫХ ЯДЕР

Задача № 17

Волны, наподобие сейчас рассмотренных, порождаются в воздухе летящею пулею или артиллерийским снарядом. Существуют способы фотографировать снаряд на лету; здесь (рис. 53 и 54) воспроизводятся два таких изображения снарядов, движущихся не одинаково быстро. На обоих рисунках отчетливо видна интересующая нас «головная волна» (как ее в этом случае называют). Происхождение ее такое же, как и волны парохода. И здесь применимы те же геометрические отношения, а именно синус половины угла расхождения головных волн равен отношению скорости распространения волнения в воздухе к скорости полета самого снаряда. Но волнение в воздушной среде передается со скоростью, близкой к скорости звука, т. е. 330 м в секунду. Легко поэтому, располагая снимком летящего снаряда, определить приблизительно его скорость. Как сделать это для приложенных здесь двух изображений?

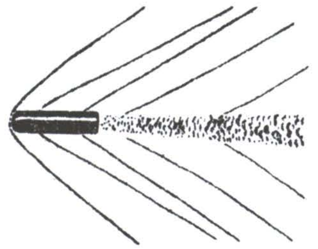


Рис. 53.

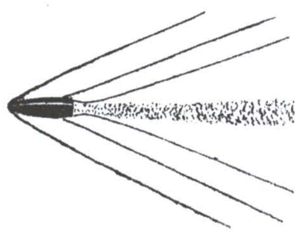


Рис. 54.

Решение

Измерим угол расхождения ветвей головной волны на рис. 53 и 54. В первом случае он заключает около 80°, во втором – примерно 55°. Половина их – 40° и 27½°. Sin 40°= 0,64; sin 27½° = 0,46. Следовательно, скорость распространения воздушной волны т. е. 330 м, составляет в первом случае 0,64 скорости полета снаряда, во втором – 0,46. Отсюда скорость первого снаряда

$$= \frac{330}{0{,}64} = 520 \text{ м},$$

второго = 720 м в секунду. Вы видите, что довольно простые геометрические соображения, при некоторой поддержке со стороны физики, помогли нам разрешить задачу на первый взгляд очень замысловатую: по фотографии летящего снаряда определить его скорость в момент фотографирования. (Расчет этот, однако, лишь приблизительно верен, так как здесь не принимаются в соображение некоторые второстепенные обстоятельства).

Задача № 18

Для желающих самостоятельно выполнить подобное вычисление скорости полета ядер здесь прилагается три воспроизведения снимков снарядов, летящих с различною скоростью (рис. 55).

Рис. 55.

Круги на воде отвлекли нас на время в область артиллерии. Вернемся же снова к реке и рассмотрим древнюю индусскую задачу о лотосе.

221. ВЫСОТА ВОДЯНЫХ РАСТЕНИЙ

Задача № 19

Цветок лотоса, возвышающийся над водой на ½ фута, был ветром отнесен в сторону. Тогда он очутился на поверхности воды в 2 футах от прежнего положения. Определить по этим данным глубину пруда.

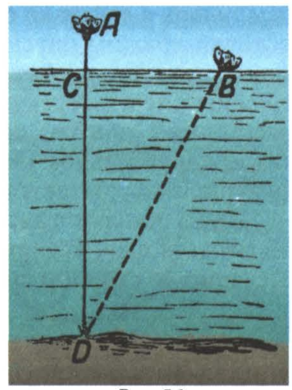


Рис. 56.

Решение

Обозначим (рис. 56) искомую глубину *CD* пруда через *x*. Тогда, по теореме Пифагора, имеем: $BD^2 = x^2 + BC^2$, то есть:

$$x^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 2^2$$

откуда

$$x^2 = x^2 + x + \frac{1}{4} - 4, \qquad x = 3¾.$$

Близ берега реки или неглубокого пруда вы можете отыскать водяное растение, которое доставит вам реальный материал для подобной задачи: без всяких приспособлений, не замочив даже рук, определить глубину водоема в этом месте.

222. ЗВЕЗДНОЕ НЕБО В РЕКЕ

Река и в ночное время предлагает геометру задачи. Помните у Гоголя в описании Днепра: «Звезды горят и светят над миром и все разом отдаются в Днепре. Всех их держит Днепр в темном лоне своем: ни одна не убежит от него, разве погаснет в небе». В самом деле, когда стоишь на берегу широкой реки, кажется, что в водном зеркале отражается целиком весь звездный купол. Но так ли в действительности? Все ли звезды отдаются в реке?

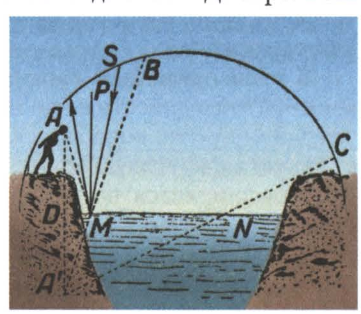


Рис. 57.

Сделаем чертеж (рис. 57): *A*– глаз наблюдателя, стоящего на берегу реки, у края обрыва, *MN* – поверхность воды. Какие звезды может видеть в воде наблюдатель из точки *A*? Чтобы ответить на этот вопрос опустим из *A* перпендикуляр *AD* на прямую *MN* и продолжим его на равное расстояние, до точки *A´*. Если бы глаз наблюдателя находился в *A´* он мог бы видеть только ту часть звездного неба, которая помещается внутри угла *BA´C*, Таково же и поле зрения действительного наблюдателя, смотрящего из точки *A*. Все звезды, находящиеся вне этого угла, наблюдателю не видны; их отраженные лучи проходят мимо его глаз.

Как убедиться в этом? Как доказать, что, например звезда *S*, лежащая вне угла *BA´C*, не видна нашему наблюдателю в водном зеркале реки? Проследим за ее лучом, падающим близко к берегу, в точку *M*; он отразится, по законам физики, под таким углом к перпендикуляру *MP*, который равен углу падения *SMP* и, следовательно, меньше угла *PMA* (это легко доказать из равенства треугольников *ADM* и *A´DM*); значит, отраженный луч должен пройти мимо *A*. Тем более пройдут мимо глаз наблюдателя лучи звезды *S*, отразившиеся в точках, расположенных дальше точки *M*.

Значит, гоголевское описание содержит преувеличение: в Днепре отражаются далеко не все звезды, а во всяком случае, меньше половины звездного неба.

Всего любопытнее, что обширность отраженной части неба вовсе не доказывает, что перед вами широкая река. В узенькой речке с низкими берегами вы можете видеть почти полнеба (т. е. больше, чем в широкой реке), если наклонитесь близко к воде. Легко удостовериться в этом, сделав для такого случая построение поля зрения (рис. 58)

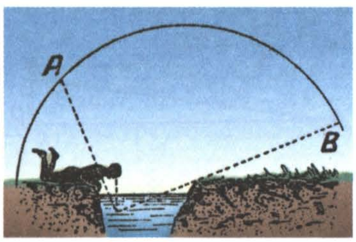


Рис. 58.

223. ПУТЬ ЧЕРЕЗ РЕКУ

Задача № 20

Между точками *A* и *B* течет река (или канал) с прямыми параллельными берегами (рис. 59). Нужно построить через реку мост под прямым углом к его берегам. Где следует выбрать место для моста, чтобы путь от *A* до *B* был кратчайший?

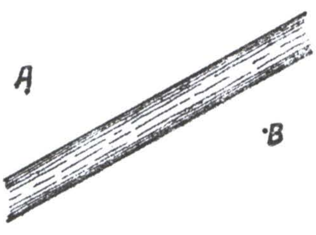


Рис. 59.

Решение

Проведя через точку А (рис. 60) прямую, перпендикулярную к направлению реки, и отложив от *A* отрезок *AC*, равный ширине реки, соединяем *C* с *B*.

В точке *D* и надо построить мост, чтобы путь из *A* в *B* был кратчайшим.

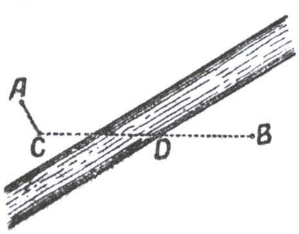


Рис. 60.

Действительно: построив мост *DE* (рис. 61) и соединив *E* с *A*, получим путь *AEDB*, в котором часть *AE* параллельна *CD* (*AEDC* – параллелограмм, потому что его противоположные стороны *AC* и *ED* равны и параллельны). Поэтому путь *AEDB* по длине равен пути *ACB*. Легко показать, что всякий иной путь длиннее этого. Пусть мы заподозрили, что некоторый путь *AMNB* (рис. 62) короче *AEDB*, т. е. короче *ACB*. Соединив *C* с *N*, видим, что *CN* равно *AM*, Значит, путь *AMNB* = *ACNB*. Но *CNB*, очевидно, больше *CB*; значит, и *ACNB* больше *ACB* а, следовательно, больше и *AEDB*.

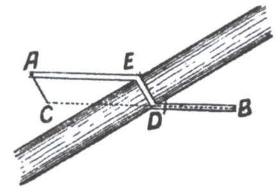


Рис. 61.

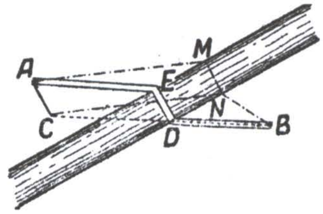


Рис. 62.

Это рассуждение применимо ко всякому положению моста, не совпадающему с *ED*; другими словами, путь *AEDB* действительно кратчайший.

224. ЧЕРЕЗ ДВЕ РЕКИ

Задача № 21

Может представиться более сложный случай – именно, когда надо найти кратчайший путь через две реки, которые необходимо пересечь тоже под прямым углом к их берегам (рис. 63). В каких местах рек надо тогда построить мосты?

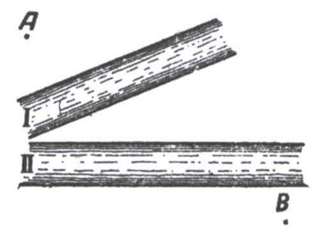


Рис. 63.

Решение

Нужно из точки *A* (рис. 64) провести отрезок *AC*, равный ширине реки I и перпендикулярный к ее берегам. Из точки *B* провести отрезок *BD*, равный ширине реки II и также перпендикулярный к ее берегам. Точки *C* и *D* соединить прямой. В точке *E* строят мост *EF* через реку I, а в точке *G* мост *GH* через реку II. Путь *AFEGHB* есть искомый кратчайший путь от *A* до *B*.

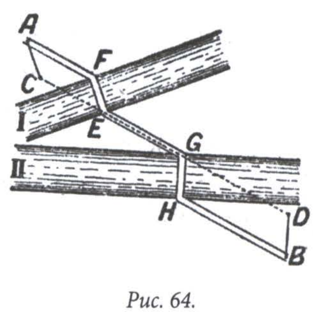
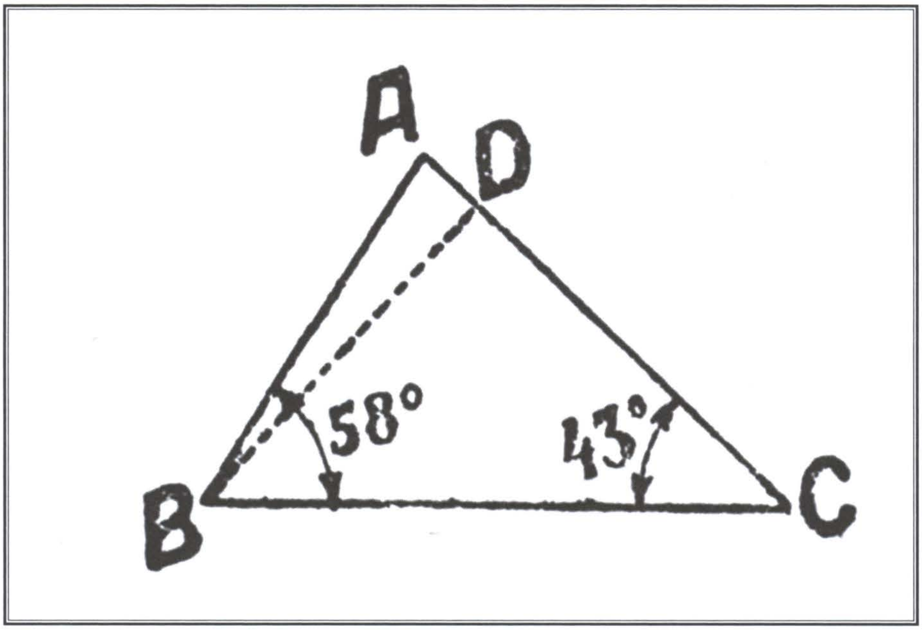


Рис. 64.

Как доказать это, читатель, конечно, сообразит сам, если будет в этом случае рассуждать так же, как рассуждали мы в предыдущей задаче.



225. ВЫЧИСЛЕНИЕ СИНУСА

В этой главе будет показано, как можно вычислять стороны треугольника с точностью до 2% и углы с точностью до 1°, пользуясь одним лишь понятием синуса и не прибегая ни к таблицам, ни к формулам. Такая упрощенная тригонометрия может нередко пригодиться во время загородной прогулки, когда таблиц под рукой нет, а формулы полузабыты. Робинзон на своем острове мог бы успешно пользоваться такой тригонометрией.

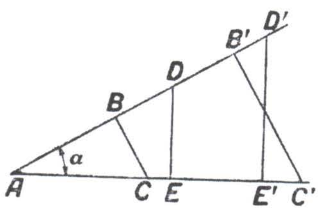


Рис. 65.

Итак, вообразите, что вы еще не проходили тригонометрии или же забыли ее без остатка, – состояние, которое многим из читателей, вероятно, не трудно себе представить. Начнем знакомиться с ней сызнова. Что такое синус острого угла? Это отношение противолежащего катета к гипотенузе в том треугольнике, который отсекается от угла перпендикуляром к одной из его сторон. Например, синус угла ***a*** (рис. 65) есть $\frac{BC}{AC}$, или $\frac{DE}{AD}$, $\frac{B'C'}{AC'}$, или $\frac{D'E'}{AD'}$. Легко видеть, что вследствие подобия образовавшихся здесь треугольников все эти отношения равны одно другому.

Чему же равны синусы различных углов от 1° до 90°? Как узнать это, не имея под рукой таблиц? Весьма просто: надо составить таблицу синусов самому. Этим мы сейчас и займемся.

Начнем с тех углов, синусы которых нам известны из геометрии. Это, прежде всего, угол в 90°, синус которого, очевидно, равен 1. Затем угол в 45°, синус которого легко вычислить по Пифагоровой теореме; он равен, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ т. е. т. е. 0,707. Далее, нам известен синус 30°: так как катет, лежащий против такого угла, равен половине гипотенузы, то синус 30° = ½.

Итак, мы знаем синусы (или, как принято обозначать, sin) трех углов:

$$\sin 30° = 0{,}5$$
$$\sin 45° = 0{,}707,$$
$$\sin 90° = 1.$$

Рис. 66.

Этого, конечно, мало; необходимо знать синусы и всех промежуточных углов, по крайней мере, через каждый градус. Для очень малых углов можно при вычислении синуса, вместо отношения катета к гипотенузе без большой погрешности брать отношение дуги к радиусу; на рис. 66 видно, что отношение $\frac{BC}{AB}$ мало отличается от отношения $\frac{BD}{AB}$. Последнее же отношение легко вычислить. Например, для угла в 1° дуга $BD = \frac{2\pi R}{360}$ и, следовательно, sin 1° можно принять равным

$$\frac{2\pi R}{360R} = \frac{\pi}{180} = 0{,}0175$$

Таким же образом находим:

$$\sin 2° = 0{,}0349,$$
$$\sin 3° = 0{,}0524,$$
$$\sin 4° = 0{,}0698,$$
$$\sin 5° = 0{,}0873.$$

Но надо убедиться, как далеко можно продолжать эту табличку, не делая большой погрешности. Если бы мы вычислили по такому способу sin 30°, то получили бы 0,524 вместо 0,500: разница была бы уже во второй значащей цифре, и погрешность составляла бы $\frac{24}{500}$, т. е.

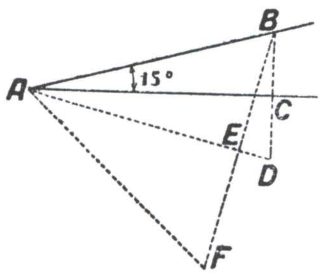


Рис. 67.

около 5%. Это чересчур грубо даже для нетребовательной походной тригонометрии. Чтобы найти границу, до которой позволительно вести вычисление синусов по указанному приближенному способу, постараемся найти точным приемом sin 15°. Для этого воспользуемся таким, несколько сложным, но не особенно замысловатым построением (рис. 67).

Sin 15°= $\dfrac{BC}{AB}$. Продолжим BC на равное расстояние до точки D; соединим A с D; опустим перпендикуляр BE и, продолжив его на равное расстояние до F, соединим F с A. Так как угол BAF равен $4 \times 15°$, то-есть 60°, то в равнобедренном треугольнике BAF все углы равны 60°, и, следовательно, $BF = AB$, а $BE = \dfrac{AB}{2}$. Далее вычисляем AE из треугольника ABE по теореме Пифагора:

$$\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\ \overline{AB}^2$$

$$AE = \frac{AB}{2}\sqrt{3} = 0{,}866\ \overline{AB}$$

Значит, $ED = AD - AE = AB - 0{,}866\ AB = 0{,}134\ AB$. Теперь из треугольника BED вычисляем BD:

$$BD^2 = \overline{BE}^2 + \overline{ED}^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + (0{,}134\ \overline{AB})^2 =$$

$$= 0{,}268\ \overline{AB}^2; \quad BD = \sqrt{0{,}268\ \overline{AB}^2} =$$

$$= 0{,}518\ \overline{AB}$$

Половина BD, т. е. BC равна 0,259 AB, следовательно, искомый синус

$$\sin 15° = \frac{BC}{AB} = \frac{0{,}259\ AB}{AB} = 0{,}259$$

Это точное значение sin 15°, если ограничиться тремя знаками. Приближенное же значение его, которое мы нашли бы по прежнему способу, равно 0,262. Сопоставляя оба значения:

0,259 и 0,262,

видим, что, ограничиваясь двумя значащими цифрами, мы получаем

0,26 и 0,26,

т. е. тождественные результаты. Ошибка при замене более точного значения (0,259) приближенным (0,26) составляет $\dfrac{1}{259}$ т. е. около 0,4%. Это погрешность, позволительная для походных расчетов, и, следовательно, синусы углов от 1° до 15° мы в праве вычислять по нашему приближенному способу.

Для промежутка от 15° до 30° мы можем вычислять синусы с помощью пропорций. Будем рассуждать так. Разница между sin 30° и sin 15° равна $0{,}50 - 0{,}26 = 0{,}24$. Значит, – можем мы допустить, – при увеличении угла на каждый градус синус его возрастает примерно на $^1/_{15}$ долю этой разницы, т. е. на $\dfrac{0{,}24}{15} = 0{,}016$. Строго говоря, это, конечно, не так, но отступление от указанного правила обнаруживается только в третьей значащей цифре, которую мы все равно отбрасываем. Итак, прибавляя последовательно по 0,016 к sin 15°, получим синусы 16°, 17°, 18° и т. д.

$$\sin 16° = 0{,}26 + 0{,}016 = 0{,}28,$$
$$\sin 17° = 0{,}26 + 0{,}032 = 0{,}29,$$
$$\sin 18° = 0{,}26 + 0{,}048 = 0{,}31,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sin 25° = 0{,}26 + 0{,}16 = 0{,}42 \text{ и т. п.}$$

Все эти синусы верны в первых двух десятичных знаках, т. е. с достаточною для наших целей точностью: они отличаются от истинных синусов менее, чем на половину единицы последней цифры.

Таким же способом поступают при вычислении углов в промежутках между 30° и 45°. Разность $\sin 45° - \sin 30° = 0{,}707 - 0{,}5 = 0{,}207$. Разделив ее на 15, имеем 0,014. Эту величину будем прибавлять последовательно к синусу 30°; тогда получим

$$\sin 31° = 0{,}5 + 0{,}014 = 0{,}51,$$
$$\sin 32° = 0{,}5 + 0{,}028 = 0{,}53,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sin 40° = 0{,}5 + 0{,}14 = 0{,}64 \text{ и т. п.}$$

Остается найти синусы острых углов больше 45°. В этом поможет нам Пифагорова теорема. Пусть, например, мы желаем найти sin 53°, т. е. (рис. 68) отношение $\dfrac{BC}{AB}$. Так как угол $B=37°$, то синус его мы можем вычислить по предыдущему; он равен $0{,}5 + 7 \times 0{,}014 = 0{,}6$. С другой стороны, мы знаем, что $\sin B = \dfrac{AC}{AB}$.

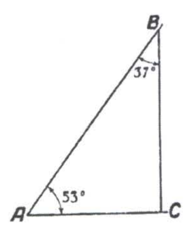


Рис. 68.

Итак, $\dfrac{AC}{AB} = 0{,}6$, откуда, $AC = 0{,}6\ AB$.

Зная AC, легко вычислить BC. Этот отрезок равен

$$\sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{\overline{AB}^2 - (0{,}6\overline{AB})^2} =$$
$$= AB\ \sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8\ \overline{AB}.$$

Расчет, в общем, не труден; надо только уметь вычислять квадратные корни.

226. УПРОЩЕННОЕ ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ

Указываемый в курсах алгебры способ извлечения квадратных корней легко забывается. Но можно обойтись и без него. В учебных книгах моих по геометрии приведен древний упрощенный способ вычисления квадратных корней по способу деления. Здесь сообщу другой старинный способ, также более простой, нежели рассматриваемый в курсах алгебры.

Пусть надо вычислить $\sqrt{13}$. Он заключается между 3 и 4 и, следовательно, равен 3 с дробью, которую обозначим через x.

Итак,

$$\sqrt{13} = 3 + x, \text{ откуда } 13 = 9 + 6x + x^2.$$

Квадрат дроби x есть малая дробь, которою в первом приближении можно пренебречь; тогда имеем:

$$13 - 9 + 6x, \text{ откуда } 6x = 4 \text{ и } x = {}^2\!/_3 = 0{,}67.$$

Значит, приближенно $\sqrt{13} = 3{,}67$. Если мы хотим определить значение корня еще точнее, напишем уравнение $\sqrt{13} = 3^2\!/_3 + y$, где y – небольшая дробь, положительная или отрицательная. Отсюда $13 = \frac{121}{9} + \frac{22}{3}y + y^2$. Отбросив y^2 находим, что y приближенно равен $-\frac{2}{33} = -0{,}06$. Следовательно, во втором приближении:

$$\sqrt{13} = 3{,}67 - 0{,}06 = 3{,}61.$$

Третье приближение находим тем же приемом и т. д.

Обычным, указываемым в курсах алгебры способом мы нашли бы $\sqrt{13}$ с точностью до 0,01 – также 3,61.

227. НАЙТИ УГОЛ ПО СИНУСУ

Итак, мы имеем возможность вычислить синус любого угла от 0° до 90° с двумя десятичными знаками. Надобность в готовой таблице отпадает; для приближенных вычислений мы всегда можем сами составить ее, если пожелаем.

Но для решения тригонометрических задач нужно уметь и обратно – вычислять углы по данному синусу. Это тоже не сложно. Пусть требуется найти угол, синус которого = 0,38. Так как данный синус меньше 0,5, то искомый угол меньше 30°. Но он больше 15°, так как sin 15°, мы знаем, равен 0,26. Чтобы найти этот угол, заключающийся в промежутке между 15° и 30°, поступаем, как объяснено на стр. 155:

$$0{,}38 - 0{,}26 = 0{,}12, \quad \frac{0{,}12}{0{,}016} = 7{,}5°$$

$$15° + 7{,}5° = 22{,}5°$$

Итак, искомый угол = около 22,5°.

Другой пример: найти угол, синус которого 0,62.

$$0{,}62 - 0{,}5 = 0{,}12$$

$$\frac{0{,}12}{0{,}014} = 8{,}6°$$

$$30° + 8{,}6° = 38{,}6°$$

Искомый угол приближенно равен 38,6°.

Наконец, третий пример: найти угол, синус которого 0,91.

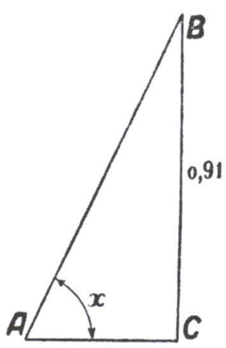


Рис. 69.

Так как данный синус заключается между 0,71 и 1, то искомый угол лежит в промежутке между 45° и 90°. На рис. 69 BC есть синус угла A, если $AB = 1$. Зная BC, легко найти синус угла B:

$$AC^2 = 1 - \overline{BC}^2 = 1 - 091^2 = 1 - 0{,}83 = 0{,}17,$$

$$AC = \sqrt{0{,}17} = 0{,}42.$$

Теперь найдем величину угла B, синус которого = 0,42; после этого легко будет найти угол A, равный 90°– B. Так как 0,42 заключается между 0,26 и 0,5, то угол B лежит в промежутке между 15° и 30°. Он определяется так:

$$0{,}42 - 0{,}26 = 0{,}16$$

$$\frac{0{,}16}{0{,}016} = 10°$$

$$B = 15° + 10° = 25°$$

И, значит, угол $A = 90° - B = 90° - 25° = 65°$.

Мы вполне вооружены теперь для того, чтобы приближенно решать тригонометрические задачи, так как умеем находить синусы по углам и углы по синусам с точностью, достаточной для походных целей.

Но достаточно ли для этого одного только синуса? Разве не понадобятся нам остальные тригонометрические функции – косинус, тангенс и т. д.? Сейчас покажем на ряде примеров, что для нашей упрощенной тригонометрии можно вполне обойтись одним только синусом.

228. ВЫСОТА СОЛНЦА

Задача № 22

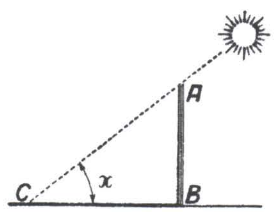


Рис. 70.

Тень BC (рис. 70) от отвесного шеста AB, высотою 4,2 м, имеет 6,5 м длины. Какова в этот момент высота солнца над горизонтом, т. е. как велик угол C?

Решение

Легко сообразить, что синус угла C равен $\frac{AB}{AC}$.

Но $AC = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{4{,}2^2 + 6{,}5^2} = 7{,}74$. Поэтому искомый синус равен $\frac{4{,}2}{7{,}74} = 0{,}55$. По указанному ранее способу находим соответствующий угол: 33°. Высота солнца – 33° (с точностью до ½°).

229. РАССТОЯНИЕ ДО ОСТРОВА

Задача № 23

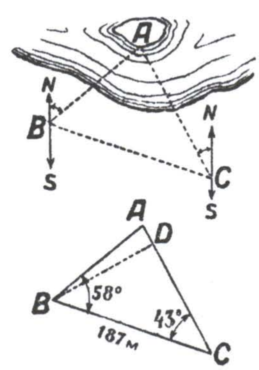


Рис. 71 и 72.

Бродя с компасом (буссолью) возле озера, вы заметили на нем (рис. 71) островок A и желаете определить его расстояние от точки B на берегу. Для этого вы определяете по компасу, какой угол составляет с направлением север – юг (NS) прямая BA. Затем измеряете прямую линию BC и определяете угол между нею и NS. Наконец, то же самое делаете в точке C для прямой AC. Допустим, что вы получили следующие данные:

направление BA отклоняется от NS к востоку на 52°

» BC » » » » » 110°

» CA » » » » западу » 27°

Длина BC = 187 м.

Как по этим данным вычислить расстояние BA?

Решение

В треугольнике ABC нам известна сторона BC. Угол ABC = 110°– 52° = 58°; угол ACB = 180°– 110°– 27 = 43°.

Опустим в этом треугольнике (рис. 72) высоту ***BD***.

$\text{Sin } C = \sin 43° = \dfrac{BD}{187}$.

Найдя sin 43°, получаем 0,68. Значит, $BD = 187 \times 0{,}68 = 127$.

Теперь в треугольнике *ABD* нам известен катет *BD*; угол $A = 180° - (58° + 43°) = 79°$, и угол $ABD = 90° - 79° = 11°$. Синус 11° мы можем вычислить: он равен 0,19. Следовательно $\dfrac{AD}{AB} = 0{,}19$. С другой стороны, по теореме Пифагора:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2.$$

Подставляя вместо *AD* – 0,19 *AB*, а вместо *BD* – 127, имеем:

$$\overline{AB}^2 = 127^2 + (0{,}19\ \overline{AB})^2.$$

откуда *AB* = 128. Итак, искомое расстояние до острова около 128 м.

Читатель не затруднится, думаю, вычислить и сторону *AC*, если бы это понадобилось.

230. ШИРИНА ОЗЕРА

Задача № 24

Чтобы определить ширину *AB* озера (рис. 73), вы нашли по компасу, что прямая *AC* уклоняется к западу

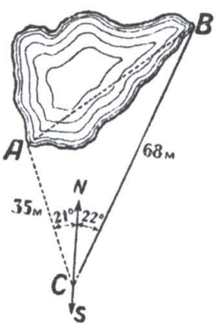


Рис. 73.

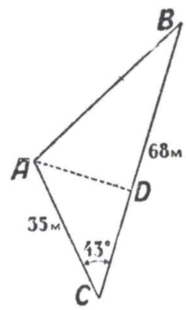


Рис. 74.

на 21°, а *BC* – к востоку на 22°. Длина *BC* = 68 м, *AC* = = 35 м. Вычислить по этим данным ширину озера.

Решение

В треугольнике *ABC* нам известны угол 43° и длины заключающих его сторон – 68 м и 35 м. Опускаем (рис. 74) высоту *AD*; имеем: $\sin 43° = \dfrac{AD}{AC}$. Вычислим независимо от этого, sin 43°, и получаем 0,68. Значит, $\dfrac{AD}{AC} = 0{,}68$; $AD = 0{,}68 \times 35 = 24$. Затем вычисляем *CD*:

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 = 35^2 - 24^2 = 649;$$
$$CD = 25{,}5;$$
$$BD = BC - CD = 68 - 25{,}5 = 42{,}5.$$

Теперь из треугольника *ABD* имеем:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = 24^2 + 42{,}5^2 = 2\,380;$$
$$AB = 49.$$

Итак, искомая ширина озера около 49 м.

Если бы в треугольнике *ABC* нужно было вычислить и другие два угла, то, найдя *AB* = 49, поступаем далее так:

$$\sin B = \frac{AD}{AB} = \frac{24}{49}\text{; отсюда } B = 29°.$$

Третий угол *A* найдем, вычитая из 180° сумму углов 29° и 43°; он равен 108°.

Может случиться, что в рассматриваемом случае решения треугольника (по двум сторонам и углу между ними) данный угол не острый, а тупой. Если, например, в треугольнике *ABC* (рис. 75) известны тупой угол *A* и две стороны, *AB* и *AC*, то ход вычисления остальных его элементов таков. Опустив высоту *BD*, определяют *BD* и *AB* из треугольника *BDA*; затем, зная *DA* + *AC*, находят *BC* и sin *C*, вычислив отношение $\dfrac{BD}{BC}$.

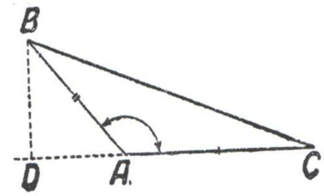


Рис. 75.

231. ТРЕУГОЛЬНЫЙ УЧАСТОК

Задача № 25

Во время экскурсии вы измерили шагами стороны треугольного участка и нашли, что они равны 43, 60 и 54 шагам. Каковы углы этого треугольника?

Решение

Это – наиболее сложный случай решения треугольника: по трем сторонам. Однако и с ним можно справиться, не обращаясь к другим функциям, кроме синуса.

Опустив (рис. 76) высоту *BD* на длиннейшую сторону *AC*, имеем:

$$BD^2 = 43^2 - \overline{AD}^2$$
$$BD^2 = 54^2 - \overline{DC}^2$$

откуда:

$$43^2 - \overline{AD}^2 = 54^2 - \overline{DC}^2$$
$$\overline{DC}^2 - \overline{AD}^2 = 54^2 - 43^2 = 1070$$

$$\text{Но } \overline{DC}^2 - \overline{AD}^2 = (DC + AD)(DC - AD) = 60\,(DC - AD).$$

Следовательно:

60 (*DC* – *AD*) = 1070 и

DC – *AD* = 17,8.

Из двух уравнений

DC – *AD* = 17,8 и *DC* + + *AD* = 60

получаем

2*DC* = 77,8,

т. е. *DC* = 38,9.

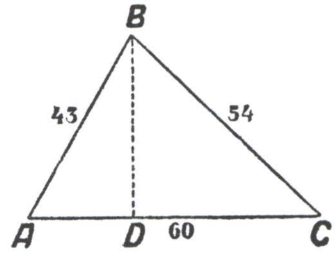


Рис. 76.

Теперь легко вычислить высоту:

$$BD = \sqrt{54^2 - 38{,}9^2} = 37{,}4,$$

откуда находим

$$\sin A = \frac{BD}{AB} = \frac{37{,}4}{43} = 0{,}87;\ A = \text{около } 60°.$$

$$\sin C = \frac{BD}{BC} = \frac{37{,}4}{54} = 0{,}69;\ C = \text{около } 44°.$$

Третий угол B = 180 – (*A* + *C*) = 76°.

Если бы мы в данном случае вычисляли помощью таблиц, по всем правилам «настоящей» тригонометрии, то получили бы углы, выраженные в градусах и минутах. Но эти минуты были бы заведомо ошибочны, так как стороны, измеренные шагами, заключают погрешность не менее 2–3%. Значит, чтобы не обманывать самого себя, следовало бы полученные точные величины углов округлить, по крайней мере, до целых градусов. И тогда у нас получился бы тот же самый результат, к которому мы пришли, прибегнув к упрощенным приемам. Польза нашей «походной» тригонометрии выступает здесь очень наглядно.

Повальное увлечение персональными электронными устройствами привело к их широкому распространению и, одновременно с этим, незаслуженным забвением вычислительных устройств еще недавнего прошлого. Да, они вероятно устарели и выглядят не так привлекательно, как хороший смартфон. Однако, полностью списывать «старье» было бы весьма легкомысленно. Здесь есть особенности применения. Все зависит от того, какие задачи ставятся перед человеком и в каких условиях их необходимо решать.

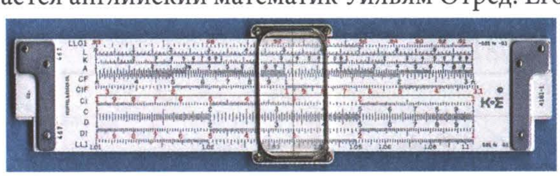
Уильям Отред (1574-1660)

Чтобы развеять туман, скажем сразу: речь идет о логарифмических линейках, коих за прошедшее время было разработано великое множество различных видов и всевозможного приложения к самым разнообразным задачам. Безусловно, если начать сравнивать в настоящее время логарифмическую линейку со смартфоном, то можно, мягко говоря, выглядеть смешным. Однако, не будем торопиться.

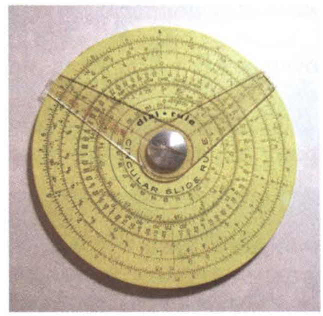
Все хорошо, пока хорошо. А если плохо? А если сел аккумулятор или у смартфона треснул экран и отслоился кристаллический слой сенсорного экрана.... Да, это, конечно, ситуация из ряда вон выходящая. Но, в этом случае логарифмическая линейка, которой не нужны батарейки и которой раньше «забивали гвозди» даст возможность выйти из затруднительного положения.

Еще одним плюсом линейки является очень простая форма представления большинства данных: в виде, похожем на таблицу. Увидел и сразу получил результат.

В современном виде логарифмическую линейку впервые, как это часто было в науке, представили сразу два ученых, которые, вероятно, примерно в одно и тоже время пришли к этой идее. Первый из них обычно упоминается английский математик Уильям Отред. Его линейка датируется 1622 г. и отличается от современной лишь отсутствием прозрачного бегунка с рисками для выполнения стандартных операций. Попутно заметим, что Отреду принадлежат еще два «изобретения», которыми мы пользуемся и по сей день. Это знак умножения «×», тот самый «крестик», а также обозначение тригонометрических функций синус и косинус. Ученый предложил для них сокращенную запись «sin» и «cos» соответственно.



Логарифмическая линейка.



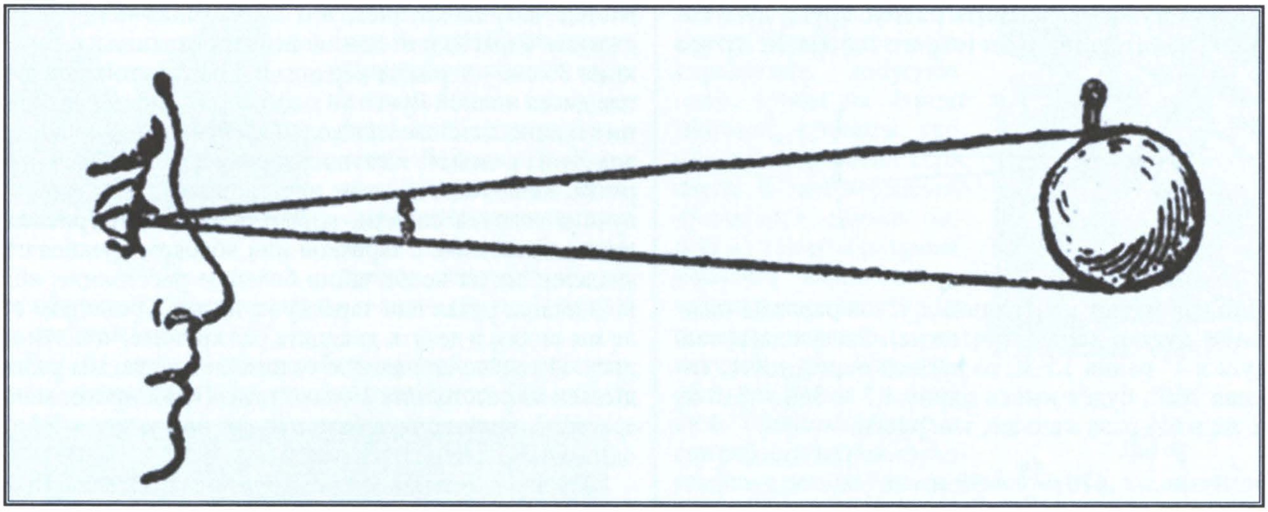
Круговая логарифмическая линейка

Другим претендентом на первенство изобретения стал так же английский математик Ричард Деламейн, который еще разабатывал различные виды солнечных часов. Ученые долго оспаривали первенство изобретения, но потомки решили, что они оба изобретатели линейки.

Конструктивно существует два вида логарифмических линеек: прямоугольная, действительно похожая на обычную линейку, вернее на несколько, сложенных особым образом вместе. Другой вид – круговая линейка. Здесь есть противоречие в названии, но уже решили, что менять его не стоит, поскольку «итак все знают». Она состоит из нескольких круговых шкал, одетых на общую ось.

С помощью нескольких шкал можно производить операции умножения, деления, возведения чисел в квадрат, куб и дробные степени, нахождение логарифмов, значений тригонометрических функций и еще очень много различных действий. Кроме этого, на обратной стороне линейки обычно располагались таблицы значений важных констант и характеристик материалов.

Подытоживая, заметим, что логарифмическая линейка представляла собой не только счетный прибор, но и «высококонцентрированную выжимку» или компактный справочник по многим отраслям знаний. И в ней заключается еще один важнейший нюанс: вы должны были знать, как ей пользоваться, вы должны были понимать ход вычислений, поскольку линейка дает, как правило, лишь 3, иногда 4 значащих цифры, которые надо уметь интерпретировать. То есть, что бы пользоваться линейкой, надо быть образованным человеком. Нынче эту ложную уверенность всем подряд дарит компьютер.....



232. ВИДИМЫЕ РАЗМЕРЫ ЛУНЫ

Какой величины кажется вам полный месяц на небе? От разных людей приходится слышать весьма различные ответы на этот вопрос. Самый неожиданный услышал я от одного крестьянина:

– Не знаю. Не здешний ведь я, издалеча.

Хотя в подлунном мире все мы здешние, однако то, что сообщает, о кажущихся размерах Луны большинство людей, не многим лучше этого наивного ответа крестьянина. Луна величиною «с тарелку», «яблоко», «с человеческое лицо» и т. п, – это крайне смутные, неопределенные оценки, свидетельствующие лишь о том, что отвечающие не отдают себе отчета в существе вопроса.

Правильный ответ на столь, казалось бы, обыденный вопрос может дать лишь тот, кто ясно понимает, что, собственно, надо разуметь под «кажущейся», или «видимой» величиной предмета. Мало кто подозревает, что речь идет здесь о величине некоторого угла, – именно того угла, который составляется двумя прямыми линиями, проведенными к нашему глазу от крайних точек рассматриваемого предмета; угол этот называется «углом зрения», или «угловой величиной предмета». И когда кажущуюся величину Луны на небе оценивают, сравнивая ее с размерами тарелки, яблока и т. п., то такие ответы либо вовсе лишены смысла, либо же должны означать что Луна видна на небе под тем же углом зрения, как тарелка или яблоко. Но такое указание само по себе еще недостаточно: тарелку или яблоко мы видим ведь под самыми различными углами, в зависимости от их отдаления: вблизи – под большими углами, вдали – под меньшими. Чтобы внести определенность, необходимо еще указать, с какого расстояния тарелка или яблоко рассматриваются.

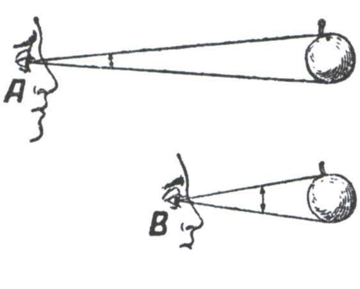


Рис. 77. Углы зрения.

Расстояние это оказывается гораздо большим, чем обычно думают. Держа яблоко в вытянутой руке, вы заслоняете им не только Луну, но и обширную часть неба. Подвесьте яблоко на нитке и отходите от него постепенно все дальше, пока оно не покроет как раз полный лунный диск: в этом положении яблоко и Луна будут иметь для вас одинаковую видимую величину. Измерив расстояние от вашего глаза до яблока, вы убедитесь, что оно равно примерно 10 м. Вот как далеко надо отодвинуть от себя яблоко, чтобы оно действительно казалось одинаковой величины с Луною на небе! А тарелку пришлось бы удалить метров на 30, т. е. на полсотни шагов.

Сказанное кажется невероятным каждому, кто слышит об этом впервые, – между тем, это неоспоримо и вытекает из того, что Луна усматривается нами под углом зрения всего лишь в полградуса. Оценивать углы нам в обиходной жизни почти никогда не приходится, и потому большинство людей имеют очень смутное представление о величине угла в 1°, в 2°, в 5° и т. п. небольшое число градусов (не говорю о землемерах, чертежниках и других специалистах, привыкших на практике измерять углы). Только большие углы оцениваем мы более или менее правдоподобно, особенно если догадываемся сравнить их со знакомыми нам углами между стрелками часов; всем, конечно, знакомы углы в 90°, в 60°, в 30°, в 120°, в 150°, которые мы настолько привыкли видеть на циферблате (в 3 часа, в 2 ч., в 1 ч., в 4 ч., в 5 ч.), что даже, не различая цифр, угадываем время по величине угла между стрелками. Но мелкие и отдаленные предметы мы видим обычно под гораздо меньшим углом, и потому совершенно не умеем даже приблизительно оценивать углы зрения.

233. УГОЛ ЗРЕНИЯ

Желая привести наглядный пример угла в один градус, рассчитаем, как далеко должен отойти от нас человек среднего роста (1,7 м), чтобы казаться под таким углом. Переводя задачу на язык геометрии, скажем что нам нужно вычислить радиус круга, дуга которого в 1° имеет длину 1,7 м (строго говоря, не дуга, а

Рис. 78.

хорда, но для малых центральных углов разница между длиною дуги и хорды ничтожна). Рассуждаем так: если дуга в 1° равна 1,7 м, то полная окружность, содержащая 360°, будет иметь длину 1,7 × 360 = 610 м, радиус же в $6\frac{2}{7}$ раза меньше, т. е. равен:

$$610 : \frac{44}{7} = 98 \text{ м.}$$

Итак, человек кажется под углом в 1°, если находится от нас, примерно, в расстоянии 100 м. Если он отойдет вдвое дальше – на 200 м – он будет виден под углом в ½°; если подойдет до расстояния в 50 м, то угол зрения возрастет до 2° и т. п.

Не трудно вычислить также, что палка в 1 м длины должна представляться нам под углом в 1° на расстоянии $360 : \frac{44}{7} = 57$ с небольшим метров. Под таким же углом усматриваем мы 1 см с расстояния 57 см, 1 км – расстояния в 57 км и т. д. – вообще, всякий предмет с расстояния, в 57 раз большего, чем его поперечник. Если запомним это число – 57, то сможем быстро и просто производить все расчеты, относящиеся к угловой величине предмета. Например, если желаем определить, как далеко надо отодвинуть яблоко в 9 см поперечником, чтобы видеть его под углом 1°, то достаточно умножить 9 × 57 – получим 510 см, или около 5 м; с двойного расстояния оно усматривается под вдвое меньшим углом – ½, т. е. кажется величиною с Луну.

Таким же образом для любого предмета можем мы вычислить то расстояние, на котором он кажется одинаковых размеров с лунным диском.

234. ТАРЕЛКА И ЛУНА

Задача № 26

На какое расстояние надо удалить тарелку диаметром в 25 см, чтобы она казалась такой же величины, как Луна на небе?

Решение

$$25 \times 57 \times 2 = 28 \text{ м.}$$

235. ЛУНА И МЕДНЫЕ МОНЕТЫ

Задача № 27

Сделайте тот же расчет для 5-копеечной (диаметр 32 мм) и для 2-х копеечной монеты (24 мм).

Решение

$$0{,}032 \times 57 \times 2 = 3{,}6 \text{ м,}$$

$$0{,}024 \times 57 \times 2 = 2{,}7 \text{ м.}$$

Если вам кажется невероятным, что Луна представляется глазу не крупнее, чем 2-копеечная монета с расстояния 4 шагов или обыкновенный карандаш с расстояния 80 см, – держите карандаш в вытянутой руке против диска полной Луны: он с избытком закроет ее. И, как ни странно, наиболее подходящим предметом сравнения для Луны в смысле кажущихся размеров является не тарелка, не яблоко, даже не вишня, а горошина или, еще лучше, головка спички, которую мы рассматриваем в руках! Сравнение с тарелкой или яблоком предполагает удаление их на необычайно большое расстояние; яблоко в наших руках или тарелку на нашем обеденном столе мы видим в десять-двадцать раз крупнее, чем лунный диск. И только спичечную головку, которую мы разглядываем на расстоянии 25 см от глаза («расстояние ясного зрения»), видим мы действительно под углом в ½° т. е, одинаковых с Луною размеров.

То, что лунный диск обманчиво вырастает в глазах большинства людей в 10-20 раз, есть один из любопытнейших обманов зрения. Он зависит, надо думать, всего больше от яркости Луны: полный месяц выделяется на темном фоне неба гораздо резче, чем выступают среди окружающей обстановки тарелки, яблоки, монеты и иные предметы сравнения. Иллюзия навязывается нам с такой неотразимой принудительностью, что даже художники, отличающиеся верным глазом, поддаются ей наряду с прочими людьми и изображают на своих картинах полный месяц гораздо крупнее, чем следовало бы. Достаточно сравнить ландшафт, написанный художником, с фотографическим, чтобы убедиться в этом.

Сказанное относится и к Солнцу, которое мы видим с Земли под тем же углом в ½°, хотя истинный поперечник солнечного шара в 400 раз больше лунного, но и удаление его от нас также больше в 400 раз.

236. СЕНСАЦИОННЫЕ ФОТОГРАФИИ

Чтобы пояснить важное понятие угла зрения, отклонимся немного от нашей прямой темы – геометрия в открытом поле – и приведем несколько примеров из области кинематографии и фотографии.

На экране кинематографа вы, конечно, видели такие катастрофы, как столкновение поездов, или такие невероятные сцены, как автомобиль, едущий по морскому дну. Никто не думает, что подобные фотографии сняты непосредственно с натуры. Но каким же способом они получены?

Рис. 79.

Секрет раскрывается приложенными здесь иллюстрациями. На рис. 79 вы видите игрушечные поезда в игрушечной обстановке; на рис. 80 – игрушечный автомобиль, который везут на нитке позади аквариума. Это и есть та «натура», с которой снята была кинематографическая лента. Но почему же в таком случае, видя эти снимки на экране, мы поддаемся иллюзии, будто перед нами *подлинные* поезда и автомобиль? Ведь вот здесь, на иллюстрациях мы сразу заметили бы их миниатюрные раз-

Рис. 80.

меры, даже если бы и не могли сравнить их с величиной других предметов. Причина проста: игрушечные поезда и автомобиль сняты для экрана с очень близкого расстояния; поэтому они представляются зрителю, примерно, под тем же углом зрения, под каким мы видим обычно настоящие вагоны и автомобили. В этом и весь секрет иллюзии.

Рис. 81 представляет собою другой образчик иллюзии, основанный на том же принципе. Вы видите

Рис. 81. Загадочный ландшафт, воспроизведенный с натуры.

на нем странный ландшафт, напоминающий природу древнейших геологических эпох: причудливые деревья, сходные с гигантскими мхами, на них – огромные водяные капли, а на переднем плане – исполинское чудовище, имеющее, однако, сходство с нашими безобидными мокрицами. Несмотря на столь необычный вид, рисунок исполнен с натуры: это не что иное, как небольшой уголок леса, только срисованный под необычным углом зрения. Мы никогда не видим стеблей мха, капель воды, мокрицы и т. п. под столь большим углом зрения, – и оттого рисунок кажется нам таким чуждым, незнакомым. Это – ландшафт, какой мы видели бы, если бы уменьшились до размеров муравья.

Так же поступают иногда для изготовления мнимых сенсационных фотографий. В нью-йоркской газете помещена была однажды заметка с упреками по адресу городского самоуправления, допускающего, чтобы на улицах мировой столицы скоплялись огромные горы снега. В подтверждение прилагался снимок одной из таких гор, производящий внушительное впечатление (рис. 82). На поверку оказалось, что натурой для фотографии послужил небольшой снежный бугорок, снятый шутником-фотографом с весьма близкого расстояния, т. е. под необычно большим углом зрения (рис. 83).

Рис. 82.

В другой раз та же газета воспроизвела снимок широкой расселины в скале близ города; она служила, по словам газеты, входом в обширное подземелье, где пропала без вести группа неосторожных туристов, отважившихся проникнуть в грот для исследования. Отряд добровольцев, снаряженный на розыски заблудившихся, обнаружил, что расселина сфотографирована с... едва заметной трещины в обледенелой стене, трещины в сантиметр шириною!

Рис. 83.

237. ЖИВОЙ УГЛОМЕР

Изготовить самому угломерный прибор простого устройства не особенно трудно. Но и самодельный угломер не всегда бывает под рукою во время загородной прогулки. В таких случаях можно пользоваться услугами того «живого угломера», который всегда при нас. Это – наши собственные пальцы. Чтобы пользоваться ими для приблизительной оценки углов зрения, нужно лишь произвести предварительно несколько измерений и расчетов.

Прежде всего, надо установить, под каким углом зрения видим мы ноготь указательного пальца своей вытянутой вперед руки. Обычная ширина ногтя – 1 см, а расстояние его от глаза в таком положении – около 60 см; поэтому мы видим его, примерно, под углом в 1° (немного менее, потому что угол в 1° получился бы при расстоянии в 57 см). У подростков ноготь меньше, но и рука короче, так что угол зрения для них, примерно, тот же – 1°. Читатель хорошо сделает, если, не полагаясь на книжные данные, выполнит для себя это измерение и расчет, чтобы убедиться, не слишком ли отступает результат от 1°; если уклонение велико, надо испытать другой палец.

Зная это, вы располагаете способом оценивать малые углы зрения буквально голыми руками. Каждый отдаленный предмет, который как раз покрывается ногтем указательного пальца вытянутой руки, виден вами под углом в 1° и, следовательно, отодвинут в 57 раз дальше своего поперечника. Если ноготь покрывает половину предмета, значит – угловая величина его 2°, а расстояние равно 28 поперечникам.

Полная Луна покрывает только половину ногтя, т. е. видна под углом в 1° и, значит, отстоит от нас на 114 своих поперечников; вот ценное астрономическое измерение, выполненное буквально голыми руками!

Для углов побольше воспользуйтесь ногтевым суставом вашего большого пальца, держа его согнутым на вытянутой руке. У взрослого человека длина (заметьте: длина, а не ширина) этого сустава – около 3½ см, а расстояние от глаза, при вытянутой руке, – около 55 см. Легко рассчитать, что угловая величина его в таком положении должна равняться 4°. Это дает средство оценивать углы зрения в 4°, а значит – и в 8°.

Сюда надо присоединить еще два угла, которые могут быть измерены пальцами, – именно те, под которыми нам представляются на вытянутой руке промежутки: 1) между средним и указательным пальцами, расставленными возможно шире; 2) между большим и указательным, также раздвинутыми в наибольшей степени. Не трудно вычислить, что первый угол равен, примерно, 7–8°, второй 15–16°.

Заодно укажем также способ проводить на местности прямые углы, пользуясь лишь своим собственным телом.

Если вам нужно провести через некоторую точку перпендикуляр к данному направлению, то став на эту точку, лицом в направлении данной линии, вы, не поворачивая пока головы, свободно протягиваете руку в ту сторону, куда желаете провести перпендикуляр. Сделав это, приподнимите большой палец своей вытянутой руки, поверните к нему голову и заметьте, какой предмет – камешек, кустик и т. п. – покрывается большим пальцем, если на него смотреть соответствующим глазом (т. е. правым, когда вытянута правая рука, и левым – когда левая).

Вам остается лишь отметить на земле прямую линию от места, где вы стояли, к замеченному предмету, – это и будет искомый перпендикуляр. Способ, как будто не обещающий хороших результатов, но после недолгих упражнений вы научитесь ценить услуги этого «живого эккера» [1] не ниже настоящего, крестообразного.

Случаев применить ваш живой угломер во время прогулок по открытой местности может представиться множество. Пусть вдалеке виден товарный вагон, который покрывается, примерно, половиною сустава большого пальца вашей вытянутой руки, т. е. виден под углом около 2°. Так как длина товарного вагона вам известна (около 6 м), то вы легко находите, какое расстояние вас от него отделяет: 6 × 28 = 170 м, или около того. Измерение, конечно, грубо приближенное, но все же более надежное, чем необоснованная оценка просто на-глаз.

Далее, помощью «живого угломера» вы можете, при отсутствии всяких приспособлений, измерять угловую высоту светил над горизонтом, взаимное удаление звезд в градусной мере, видимые размеры огненного пути метеора и т. п. Наконец, умея без приборов проводить прямые углы на местности, вы можете снять план небольшого участка – по способу, сущность которого ясна из рис. 84: например, при съемке озера измеряют, прямоугольник $ABCD$, а также длины перпендикуляров, спущенных из выдающихся точек берега, и расстояния их оснований от вершин прямоугольника. Словом, в положении Робинзона уменье пользоваться собственными руками для измерения углов (и ногами для измерения расстояний) могло бы пригодиться для самых разнообразных надобностей.

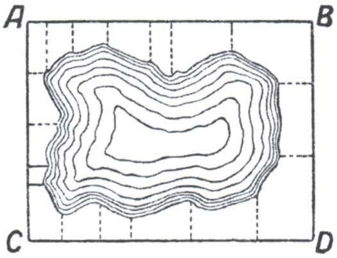


Рис. 84.

238. ПОСОХ ЯКОВА

При желании располагать более точным измерителем углов, нежели сейчас описанный нами природный «живой угломер», вы можете изготовить себе простой и удобный прибор, некогда служивший нашим предкам. Это так называемый «посох Якова» – прибор, бывший в широком употреблении у мореплавателей до XVIII в. (рис. 85), – до того как его постепенно вытеснили еще более удобные и точные угломеры (секстанты).
Он состоит из длинной линейки, в 70–100 см (рис. 86, AB), по которой может скользить перпендикулярный к ней брусок CD; обе части CO и OD скользящего бруска равны между собою. Если вы желаете помощью этого прибора определить угловое расстояние между звездами S и S', то приставляете к глазу конец A линейки


Рис. 85. Посох Якова.

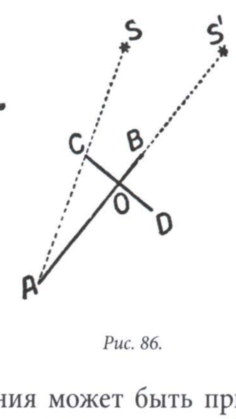


Рис. 86.

(где для удобства наблюдения может быть приделана просверленная пластинка) и направляете линейку так, чтобы звезда S' была видна у конца ее B: затем двигаете поперечину CD вдоль линейки до тех пор, пока звезда S не будет видна как раз у конца C. Теперь остается лишь измерить расстояние AO, чтобы, зная длину CO, вычислить величину угла SAS'. Знакомые с тригонометрией сообразят, что тангенс искомого угла равен

[1] Эккером называется землемерный прибор для проведения на местности линий под прямым углом.

отношению $\frac{CO}{AC}$; наша «походная тригонометрия», изложенная в гл. 225-231 , также достаточна для выполнения этого расчета; вы вычисляете, по теореме Пифагора длину AC, затем находите угол, синус которого равен $\frac{CO}{AC}$. Наконец, вы можете узнать искомый угол и графическим путем: построив треугольник ACO на бумаге в произвольном масштабе, измеряете угол А транспортиром.

Для чего же нужна другая половина поперечины? На тот случай, когда измеряемый угол слишком велик, так что его не удается измерить сейчас указанным путем. Тогда на звезду S' направляют не линейку AB, а прямую AD, подвигая поперечину так, чтобы ее конец C пришелся в то же время у звезды S (рис. 87). Найти величину угла SAS' вычислением или построением, конечно, не составит труда.

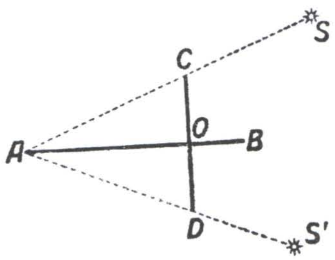


Рис. 87.

Чтобы при каждом измерении не приходилось делать расчета или построения, можно выполнить их заранее, еще при изготовлении прибора, и обозначить результаты на линейке AB; тогда, направив прибор на звезды, вы прочитываете лишь показание, записываете у точки 0, – это и есть величина измеряемого угла.

239. ГРАБЕЛЬНЫЙ УГЛОМЕР

Еще легче изготовить другой прибор для измерения угловой величины – так называемый «грабельный угломер» действительно, напоминающий по виду грабли. Главная часть его – дощечка любой формы, у одного края которой укреплена просверленная пластинка; ее отверстие наблюдатель приставляет к глазу. У противоположного края дощечки втыкают ряд тонких булавок (употребляемых для коллекций насекомых), промежутки между которыми составляют 57-ю долю их расстояния от отверстия просверленной пластинки. Мы уже знаем, что при этом каждый промежуток усматривается, под углом в один градус. Можно разместить булавки также следующим приемом, дающим более точный результат: на стене чертят две параллельные линии в расстоянии одного метра одну от другой и, отойдя от стены по перпендикуляру к ней на 57 м, рассматривают эти линии в отверстие просверленной пластинки: булавки втыкают в дощечку так, чтобы каждая пара смежных булавок покрывала начерченные на стене линии.

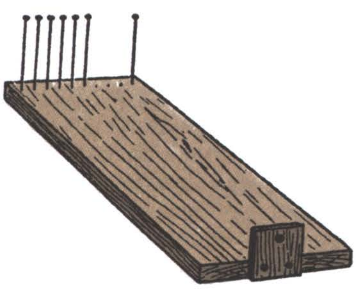


Рис. 88.

Когда булавки поставлены, можно некоторые из них снять, чтобы получить углы в 2°, в 3° в 5°. Способ употребления этого угломера, конечно, понятен читателю и без объяснений. Помощью его можно измерять углы зрения с довольно большою точностью, не меньшей, чем ¼°.

240. ОСТРОТА ВАШЕГО ЗРЕНИЯ

Освоившись с понятием угловой величины предмета, вы можете теперь понять, как измеряется острота зрения, и даже сами выполнить такого рода измерение.

Начертите на листе бумаги 20 равных черных линий длиною в спичку (5 см) и в миллиметр толщины, так, чтобы они заполняли квадрат (рис. 89).

Прикрепив этот чертеж на хорошо освещенной стене, отходите от него до тех пор, пока не заметите, что линии уже не различаются раздельно, а сливаются в сплошной серый фон. Измерьте это расстояние и вычислите – вы уже знаете как – угол зрения, под которым вы перестаете различать полоски в 1 мм толщины. Если этот угол равен 1′ (одной минуте), то острота вашего зрения нормальная; если трем минутам – острота составляет ½ нормального, и т. д.

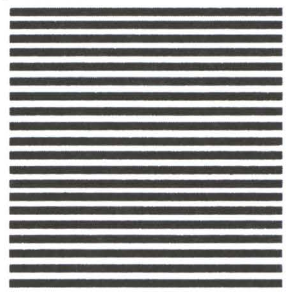


Рис. 89.

Задача № 28

Линии рис. 89 сливаются для вашего глаза на расстоянии 2 м. Нормальна ли у вас острота зрения?

Решение

Мы знаем, что с расстояния 57 мм полоска в 1 мм ширины видна под углом 1°, т. е. 60′. Следовательно, с расстояния 2 000 мм она видна под углом x который определяется из пропорции

$$x : 60 = 57 : 2\,000,$$

$$x = 1{,}7'.$$

Острота зрения ниже нормальной и составляет

$$1 : 1{,}7 = \text{около } 0{,}6.$$

241. ПРЕДЕЛЬНАЯ МИНУТА

Сейчас мы сказали, что полоски, рассматриваемые под углом зрения менее одной минуты, перестают различаться раздельно нормальным глазом. Это справедливо для всякого предмета: каковы бы ни были очертания наблюдаемого объекта, они перестают различаться нормальным глазом, если видны под углом меньше 1′. Каждый предмет превращается при этом в едва различимую точку, в пылинку без размеров и формы. Таково свойство нормального человеческого глаза: одна угловая минута – предел его остроты. Чем это обусловлено – вопрос особый, касающийся физики и физиологии зрения. Мы же говорим здесь лишь о геометрической стороне явления.

Это в равной степени относится и к предметам крупным, но чересчур далеким, и к близким, но слишком мелким. Мы не различаем простым глазом формы пылинок, реющих в воздухе: озаряемые лучами солнца, они представляются нам одинаковыми крошечными точками, хотя в действительности имеют весьма разнообразную форму. Мы не различаем мелких подробностей тела насекомого опять потому, что видим их под углом меньше 1′.

По той же причине не видим мы без телескопа деталей на поверхности Луны, планет и других небесных светил; они лежат ниже предела остроты нашего зрения, усматриваются под углом меньше 1′.

Мир представлялся бы нам совершенно иным, если бы этой границы естественного зрения не существовало, или если бы она была отодвинута далее. Человек, предел остроты зрения которого был бы не 1′, а, например, ¼′, видел бы окружающий мир глубже и дальше, чем мы. Очень картинно описано это преимущество зоркого глаза у Чехова в повести «Степь».

«Зрение у него (Васи) было поразительно острое. Он видел так хорошо, что бурая пустынная степь была для него всегда полна жизни и содержания. Стоило ему только вглядеться в даль, чтобы увидеть лисицу, зайца, дрохву или другое какое-нибудь животное, держащее себя подальше от людей. Немудрено увидеть убегающего зайца или летящую дрохву, – это видел всякий, проезжавший степью, – но не всякому доступно видеть диких животных в их домашней жизни, когда они не бегут, не прячутся и не глядят встревоженно по сторонам. А Вася видел играющих лисиц, зайцев, умывающихся лапками, дрохв, расправляющих крылья, стрепетов, выбивающих свои «точки». Благодаря такой остроте зрения, кроме мира, который видели все, у Васи был еще другой мир, свой собственный, никому недоступный и, вероятно, очень хороший, потому что, когда он глядел и восхищался, трудно было не завидовать ему».

Странно подумать, что для такой поразительной перемены достаточно лишь понизить предел различимости с 1′ до ½′ или около того...

Волшебное действие микроскопов и телескопов обусловлено той же самой причиной. Назначение этих приборов – так изменять ход лучей рассматриваемого предмета, чтобы они вступали в глаз более круто расходящимся пучком; благодаря этому, объект представляется под большим углом зрения. Когда говорят, что микроскоп или телескоп увеличивает в 100 раз, то это значит, что помощью их мы видим предметы под углом в 100 раз большим, чем невооруженным глазом. И тогда подробности, скрывающиеся от простого глаза за пределом остроты зрения, становятся доступны нашему зрению. Полный месяц мы видим под углом в 30′; а так как поперечник луны = 3 500 км, то каждый участок Луны, имеющий в поперечнике $\frac{3500}{30}$, т. е. около 120 км, сливается для невооруженного глаза в едва различимую точку. В трубу же, увеличивающую в 100 раз, неразличимыми будут уже гораздо более мелкие участки с поперечником в $\frac{120}{100}$ = 1,2 км, а в телескоп с 1000-краткратным увеличением – участок в 120 м шириною. Отсюда следует, между прочим, что будь на Луне такие, например, сооружения, как наши крупные океанские пароходы, мы могли бы их видеть в современные телескопы. [1]

Правило предельной минуты имеет большое значение и для обычных наших повседневных наблюдений. В силу этой особенности нашего зрения каждый предмет, удаленный на 3 400 (т. е. 57 × 60) своих поперечников, перестает различаться нами в своих очертаниях и сливается в точку. Поэтому, если кто-нибудь станет уверять вас, что простым глазом узнал лицо человека с расстояния четверти километра, не верьте ему, – разве только он обладает феноменальным зрением. Ведь расстояние между глазами человека – всего 3 см; значит оба глаза сливаются в точку уже на расстоянии 3×3 400 см, т. е. 100 м. Артиллеристы (см. следующую главу) пользуются этим для глазомерной оценки расстояния. По их правилам, если глаза человека кажутся издали двумя раздельными точками, то расстояние до него не превышает 100 шагов (т. е. 60–70 м). У нас получилось большее расстояние – в 100 м: это показывает, что примета военных имеет в виду несколько пониженную (на 30%) остроту зрения.

Задача № 29

Может ли человек с нормальным зрением различить всадника на расстоянии 10 км, пользуясь биноклем, увеличивающим в 3 раза?

Решение

Высота всадника 2,2 м, Фигура его превращается в точку для простого глаза на расстоянии 2,2×3400 = 7 км; в бинокль же, увеличивающий втрое, – на расстоянии 21 км. Следовательно, в 10 км его различить в такой бинокль возможно (если воздух достаточно прозрачен).

242. ЛУНА И ЗВЕЗДЫ У ГОРИЗОНТА

Самый невнимательный наблюдатель знает, что полный месяц, стоящий низко у горизонта, имеет заметно большую величину, чем когда он висит высоко в небе. Разница так велика, что трудно ее не заметить. То же верно и для солнца; известно, как велик солнечный диск при заходе или восходе по сравнению с его размерами высоко в небе, – например, когда он просвечивает сквозь облака (смотреть прямо на незатуманенное солнце вредно для глаз).

Для звезд эта особенность проявляется в том, что расстояние между ними увеличивается, когда они приближаются к горизонту. Кто видел зимою красивое созвездие Ориона (или летом – Лебедя) высоко на небе и низко близ горизонта, тот не мог не поразиться огромной разницей размеров созвездия в обоих положениях. Все это тем загадочнее, что, когда мы смотрим на светила при восходе или заходе, они не только не ближе к нам, но, напротив, дальше от нас (на величину земного радиуса), как легко понять из рис. 90: в зените мы рас-

[1] При условии полной прозрачности и однородности нашей атмосферы. В действительности воздух не однороден и не вполне прозрачен; поэтому при больших увеличениях видимая картина туманится и искажается. Это ставит предел пользованию весьма сильными увеличениями и побуждает астрономов воздвигать телескопы в ясном воздухе высоких горных вершин.

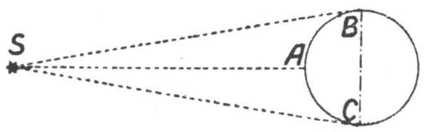


Рис. 90.

сматриваем светило из точки ***A***, а у горизонта – из точек ***B*** или ***C***. Почему же луна, солнце и созвездия увеличиваются у горизонта?

«Потому что это не верно», – можно бы ответить. Это обман зрения. Помощью грабельного или иного угломера не трудно убедиться, что лунный диск виден в обоих случаях под одним и тем же углом зрения в ½°. Пользуясь тем же прибором или посохом Якова, можно удостовериться, что и угловые расстояния между звездами не меняются, где бы созвездие ни стояло; у зенита или у горизонта. Значит, увеличение – оптический обман, которому поддаются все люди без исключения.

Чем объясняется столь сильный и всеобщий обман зрения? Бесспорного ответа на этот вопрос наука еще не дала, хотя и стремится разрешить его 2000 лет, со времени Птолемея. Иллюзия находится в связи с тем, что весь небесный свод представляется нам не полушаром в геометрическом смысле слова, а шаровым сегментом, высота которого в 2–3 раза меньше радиуса основания. Это потому, что все расстояния в горизонтальном направлении и близком к нему оцениваются нами как более значительные, по сравнению с вертикальными: по первому направлению мы видим земные предметы, по второму – перед нами пустой, ничем не заполненный промежуток; а известно, что заполненные пространства всегда кажутся нам больше пустых (рис. 91).

Рис. 91. Правая заштрихованная половина кажется длиннее левой.

На рис. 92 наглядно показано, как должна влиять приплюснутая форма небесного свода на величину светил в разных его частях. На своде неба лунный диск всегда виден под углом в ½°, – будет ли Луна у горизонта (на высоте 0°), или у зенита (на высоте 90°). Но глаз наш относит этот диск не всегда на одно и то же расстояние: Луна в зените отодвигается нами на более близкое расстояние, нежели у горизонта, и потому величина его представляется неодинаковой – внутри одного и того же угла ближе к вершине помещается меньший кружок, чем подальше от нее. На левой стороне того же рисунка

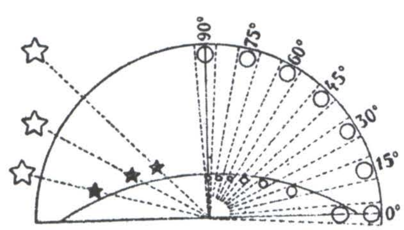


Рис. 92. Почему светила близ горизонта кажутся крупнее, чем близ зенита.

92-го показано, как, благодаря этой причине, расстояния между звездами словно растягиваются с приближением их к горизонту: одинаковые угловые расстояния между ними кажутся тогда неодинаковыми.

Здесь есть и другая поучительная сторона. Любуясь огромным лунным диском близ горизонта, заметили ли вы на нем хоть одну новую черточку, которой не удалось вам различить на диске высоко стоящей Луны? Нет. Но ведь перед вами увеличенный диск, – отчего же не видно новых подробностей? Оттого, что здесь нет того увеличения, какое дает, например, бинокль: здесь не увеличивается угол зрения, под которым представляется нам предмет. Только увеличение этого угла помогает нам различать новые подробности; всякое иное «увеличение» есть просто обман зрения, для нас совершенно бесполезный. [1]

243. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ БЕССМЫСЛИЦА

О видимой величине предметов приходится слышать нередко совершенно бессмысленные утверждения, причем люди, их высказывающие, твердо уверены, что говорят о чем-то вполне ясном, бесспорном. У одного известного советского беллетриста находим, например, такую фразу:

«Была невероятная луна диаметром в аршин».

Коротко и просто.

Видный сельскохозяйственный писатель рассказывает: «Дело было к вечеру; солнце стояло на горизонте (над горизонтом?) каких-нибудь 3–4 аршина».

Печальнее всего то, что эти образчики аршинной астрономии попали в школьные учебники.

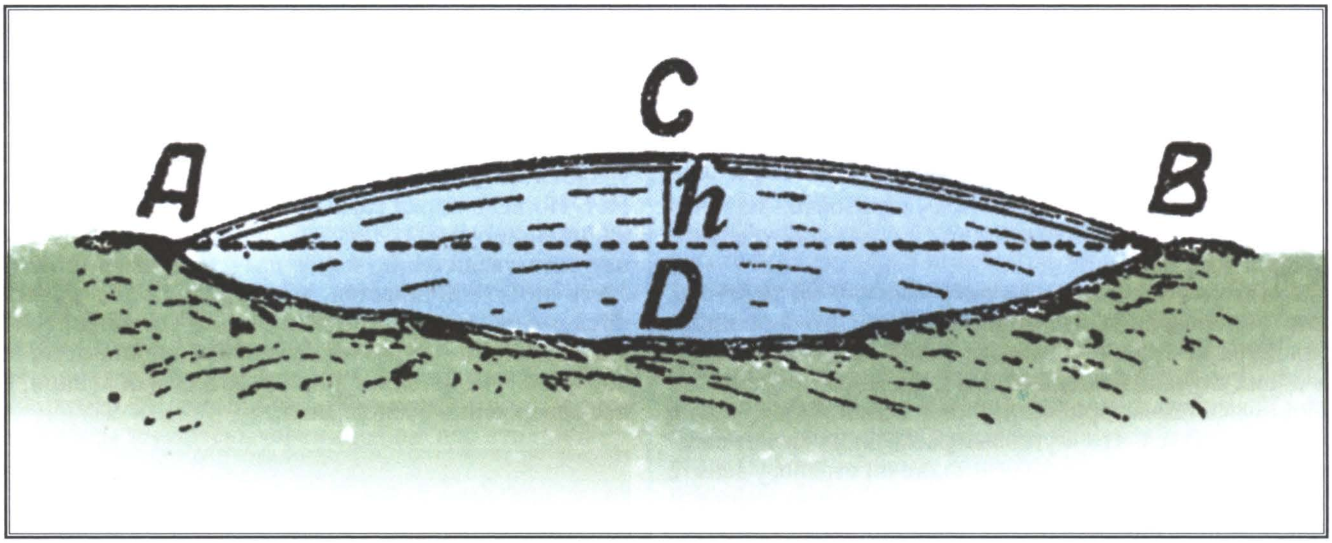
Еще удивительнее по полному отсутствию смысла то, что помещено в одной общепонятной брошюре, носящей заглавие, весьма сходное с «Занимательной геометрией». Там приведена следующая таблица «степени уменьшения предметов по высоте с различных расстояний»:

Расстояние в метрах	Степень уменьшения	
100	⅔	
200	½	
300	⅓	
400	¼	
500	⅕	и т. д.

Пояснительное примечание завершает бессмыслицу: «Таким образом, человек 170 см роста с расстояния 500 м покажется ростом в $\frac{170}{5} = 34$ см».

Таблица, расчет – все это имеет внушительный, солидный вид. А между тем, в том и другом не больше смысла, чем в знаменитой дате гоголевского героя: «Мартобря 86 числа, между днем и ночью».

[1] Подробнее см. в книге того же автора «Занимательная физика», кн. 2-я, гл. IX.



244. ИСКУССТВО МЕРИТЬ ШАГАМИ

Очутившись во время загородной прогулки у железнодорожного полотна или на шоссе, вы можете выполнить ряд интересных геометрических упражнений.

Прежде всего, воспользуйтесь шоссе, чтобы измерить длину своего шага и скорость ходьбы. Это даст вам возможность измерять расстояние шагами, – искусство, которое приобретается довольно легко после недолгого упражнения. Главное здесь – приучить себя делать шаги всегда одинаковой длины, т. е. усвоить определенную «мерную» походку.

Затем необходимо научиться вести счет шагов. Остановимся на этом подробнее.

Считать шаги просто, как считают орехи и т. п., очень неудобно: добравшись до длинных наименований, вы не будете успевать мысленно произносить числа и начнете либо сбиваться в счете, либо невольно замедлять шаги. Лучше поэтому считать шаги парами, так что мысленно произносимые числа будут совпадать всегда с выставлением одной и той же ноги, – например правой. Кроме того, если руки свободны, можно помочь себе применением счета на пальцах. Счет пар ведут при этом только до 10. Досчитав до этого числа, загибают на левой руке первый палец; досчитав вторично до 10, загибают второй палец, и т. д. Когда все пальцы этой руки будут загнуты, т. е. после 50 пар шагов, разгибают все пальцы левой руки и загибают первый палец правой. После следующего десятка загибают снова первый палец левой руки, продолжая держать загнутым палец правой, как отметку об отсчитанных 50 парах. Загнув последовательно при дальнейшем счете все пальцы левой руки, загибают второй палец правой и, освободив пальцы левой, начинают пользоваться ими сызнова. Таким образом, можно, использовав все пальцы обеих рук, досчитать до $50 \times 5 = 250$ пар, т. е. до 500 шагов.

Тогда начинают счет опять, как прежде, запомнив, что 500 шагов уже пройдено. Напрактиковавшись в таком счете, можно научиться считать шаги автоматически, не отвлекаясь от наблюдения окружающего. Результат словно сам собою записывается на пальцах: если при последнем шаге мы произносим «семь» и обнаруживаем у себя загнутыми два пальца правой руки и три левой, то нами сделано:

$$2 \times 50 + 3 \times 10 + 7 = 137 \text{ пар шагов,}$$

т. е. 274 отдельных шага (если только нами не пройдено было раньше один или несколько раз по 500 шагов, – что запомнить не трудно).

Сосчитать число шагов – еще не значит определить пройденное расстояние. Необходимо знать длину одного шага. На шоссе через каждые 100 метров установлен белый камень; пройдя такой 100-метровый промежуток своим обычным «мерным» шагом и сосчитав число шагов, вы легко найдете среднюю длину своего шага. Подобное измерение следует повторять ежегодно, – например, каждую весну, потому что длина шага, особенно у молодых людей, не остается неизменной.

Отметим любопытное соотношение, обнаруженное многократными измерениями: средняя длина шага взрослого человека равна, примерно, половине его роста считая до уровня глаз. Если, например, рост человека до глаз 1 м 40 см, то длина его шага – около 70 см. Интересно при случае проверить это правило.

Кроме длины своего шага, полезно знать также скорость своей ходьбы – число километров, проходимых в час. Иногда пользуются для этого следующим правилом: мы проходим в час столько километров, сколько делаем шагов в три секунды; например, если мы в три секунды делаем 4 шага, то в час проходим 4 км. Однако правило это применимо лишь при известной длине шага. Не трудно определить, при какой именно: обозначив длину шага в метрах через x, а число шагов в 3 сек. через n, имеем уравнение

$$\frac{3600}{3} \cdot nx = n \cdot 1000$$

откуда $1\,200\,x = 1\,000$, и $x = \frac{5}{6}$ м. т, е. около 80–85 см. Это сравнительно большой шаг; такие шаги делают люди высокого роста. Если ваш шаг отличается от 80–85 см, то вам придется произвести измерение скорости своей ходьбы иным способом, определив по часам, во сколько времени проходите вы расстояние между двумя дорожными столбами.

245. ГЛАЗОМЕР

Приятно уметь не только измерять расстояния без мерной цепи, шагами, но и оценивать их прямо на глаз без измерения. Это искусство достигается только путем упражнения. В мои школьные годы, когда с группой товарищей я участвовал в летних экскурсиях за город, подобные упражнения были у нас очень обычны. Они осуществлялись в форме особого спорта, нами самими придуманного, – в форме состязания на точность глазомера. Выйдя на дорогу, мы намечали глазами какое-нибудь придорожное дерево или другой отдаленный предмет, – и состязание начиналось.

– Сколько шагов до дерева? – спрашивал кто-либо из участников игры.

Остальные называли предполагаемое число шагов, и затем совместно считали шаги, чтобы определить, чья оценка ближе к истинной, – это и был выигравший. Тогда наступала его очередь намечать предмет для глазомерной оценки расстояния.

Кто определял расстояние удачнее других, тот получал одно очко. После 10 раз подсчитывали очки: получавший наибольшее число очков считался победителем в состязании.

Помню, на первых порах наши оценки расстояний давались с грубыми ошибками. Но очень скоро, – гораздо скорее, чем можно было ожидать, мы так изощрились в искусстве определять на-глаз расстояния, что ошибались очень мало. Лишь при резкой перемене обстановки, например, при переходе с пустынного поля в редкий лес или на заросшую кустарником поляну, при возвращении в пыльные, тесные городские улицы, а также ночью, при обманчивом освещении луны, мы ловили друг друга на крупных ошибках. Потом, однако, научились применяться ко всяким обстоятельствам, мысленно учитывать их при глазомерных оценках. Наконец группа наша достигла такого совершенства в глазомерной оценке расстояний, что пришлось отказаться совсем от этого спорта: все угадывали одинаково хорошо, и состязания утратили интерес. Зато мы приобрели недурной глазомер, сослуживший нам хорошую службу во время наших загородных странствований.

Любопытно, что глазомер как будто не зависит от остроты зрения. Среди нашей группы был близорукий мальчик, который не только не уступал остальным в точности глазомерной оценки, но иной раз даже выходил победителем из состязаний. Наоборот, одному мальчику с вполне нормальным зрением искусство определять расстояния на-глаз никак не давалось. Впоследствии мне пришлось наблюдать то же самое и при глазомерном определении высоты деревьев: упражняясь в этом с другими студентами – уже не для игры, а для нужд будущей профессии, – я заметил, что близорукие овладевали этим искусством нисколько не хуже других. Это может служить утешением для близоруких: не обладая зоркостью, они все же способны развить в себе вполне удовлетворительный глазомер.

Упражняться в глазомерной оценке расстояний можно во всякое время года, в любой обстановке. Идя по улице города, вы можете ставить себе глазомерные задачи, пытаясь отгадывать, сколько шагов до ближайшего фонаря, до того или иного попутного предмета. В дурную погоду вы незаметно заполните таким образом время переходов по безлюдным улицам.

Глазомерному определению расстояний много внимания уделяют военные: хороший глазомер необходим разведчику, стрелку, артиллеристу. Интересно познакомиться с теми признаками, которыми пользуются военные на практике глазомерных оценок. Вот несколько замечаний из учебника артиллерии:

«На-глаз расстояния определяют или по навыку различать по известной степени отчетливости видимых предметов их разные удаления от наблюдателя, или оценивая расстояния некоторым привычным глазу протяжением в 100–200 шагов, кажущимся тем меньшим, чем далее от наблюдателя оно откладывается.

При определении расстояний по степени отчетливости видимых предметов следует иметь в виду, что кажутся ближе предметы освещенные или ярче отличающиеся по цвету от местности или на воде; предметы, расположенные выше других; группы – сравнительно с отдельными предметами и, вообще, предметы более крупные.

Можно руководствоваться следующими признаками: до 50 шагов можно ясно различать глаза и рот людей; до 100 шагов глаза кажутся точками; на 200 шагов пуговицы и подробности обмундирования все еще можно различать; на 300 – видно лицо; на 400 – различается движение ног; на 500 – виден цвет мундира».

При этом наиболее изощренный глаз делает ошибку до 10% определяемого расстояния в ту или другую сторону.

Бывают, впрочем, случаи, когда ошибки глазомера гораздо значительнее. Во-первых, при определении расстояния на ровной, совершенно одноцветной поверхности – на водной глади рек или озера, на чистой песчаной равнине, на густо заросшем поле.

Тут расстояние всегда кажется меньшим истинного, и, оценивая его на-глаз, мы непременно ошибемся вдвое, если не больше. Во-вторых, ошибки легко возможны, когда определяется расстояние до такого предмета, основание которого заслонено железнодорожной насыпью, холмиком, зданием, вообще каким-нибудь возвышением. В таких случаях мы невольно считаем предмет находящимся не позади возвышения, а на нем самом, и, следовательно, делаем ошибку опять-таки в сторону уменьшения определяемого расстояния (рис.93).

Рис. 93.

В подобных случаях полагаться на глазомер опасно, и приходится прибегать к другим приемам оценки расстояния, о которых мы уже говорили и еще будем говорить.

245. УКЛОНЫ

Вдоль железнодорожного полотна, кроме верстовых (или теперь – километровых) столбов, вы видите еще и другие невысокие столбы с непонятными для многих надписями на косо прибитых дощечках, в роде таких:

$$\boxed{\frac{0{,}002}{140}} \qquad \boxed{\frac{0{,}006}{55}}$$

Это – «уклонные знаки». В первой, например, надписи верхнее число 0,002 означает, что уклон пути здесь (в какую сторону – показывает положение дощечки) равен 0,002: путь поднимается или опускается на 2 мм при каждой тысяче миллиметров. А нижнее число 140 показывает, что такой уклон идет на протяжении 140 м, где поставлен следующий знак с обозначением нового уклона. (Когда дороги не были еще переустроены по метрической системе мер, такая дощечка означала, что на протяжении 140 сажен путь поднимается или опускается каждую сажень на 0,002 сажени.) Вторая дощечка с надписью 0,006/55 – показывает, что на протяжении ближайших 55 метров путь поднимается или опускается на 6 мм при каждом метре. Зная смысл знаков уклона, вы легко можете вычислить разность высот двух соседних точек пути, отмеченных этими знаками. В первом случае, например, разность высот составляет $0{,}002 \times 140 = 0{,}28$ м; во втором – $0{,}006 \times 55 = 0{,}33$ м.

В железнодорожной практике, как видите, величина наклона пути определяется не в градусной мере. Однако, легко перевести эти путевые обозначения уклона в градусные. Если ***AB*** (рис. 94) есть линия пути, а ***BC*** – разность высот точек ***A*** и ***B***, то наклон линии пути ***AB*** к горизонтальной линии ***AC*** будет на столбике обозначен отношением $\frac{BC}{BA}$. Так как угол ***A*** очень мал, то можно принять ***AB*** и ***AC*** за радиусы окружности, дуга которой есть ***AC***[1]. Тогда вычисление угла ***A***, если известно отношение ***BC*** : ***AB***, не составит труда. При наклоне, например, обозначенном 0,002, рассуждаем так; при длине дуги, равной $\frac{1}{57}$ радиуса, угол составляет 1° (см. стр. 160); какой же угол соответствует дуге в 0,002 радиуса? Находим его величину ***x*** из пропорции:

Рис. 94.

$$x : 1^\circ = 0{,}002 : \frac{1}{57}, \text{ откуда } x = 0{,}002 \times 57 = 0{,}11 \text{ градуса},$$

т. е. около 7 минут.

На железнодорожных путях допускаются лишь весьма малые уклоны. У нас установлен предельный уклон в 0,008, т. е. в градусной мере $0{,}008 \times 57$ – менее ½°: это наибольший уклон. Только для Закавказской железной дороги допускаются, в виде исключения, уклоны до 0,025, соответствующие в градусной мере почти 1½°.

Столь незначительные уклоны совершенно не замечаются нами. Пешеход начинает ощущать наклон почвы под своими ногами лишь тогда, когда он превышает $\frac{1}{24}$: это отвечает в градусной мере $\frac{57}{24}$, т. е. около 2½°.

Пройдя по железнодорожному пути несколько километров и записав замеченные при этом знаки уклона, вы сможете вычислить, насколько, в общей сложности, вы поднялись или опустились, т. е. какова разность высот между начальными и конечными пунктами.

Задача № 30

Вы начали прогулку вдоль полотна железной дороги у столбика с знаком подъема $\frac{0{,}004}{153}$ и встретили далее следующие знаки:

$$\frac{0{,}000}{60},\quad \overset{\text{подъем}}{\frac{0{,}0017}{84}},\quad \overset{\text{подъем}}{\frac{0{,}0032}{121}},\quad \frac{0{,}0000}{45},\quad \overset{\text{падение}}{\frac{0{,}004}{210}}.$$

Прогулку вы кончили у очередного знака уклона. Какой путь вы прошли и какова разность высот между первым и последним знаками? [2]

Решение

Всего пройдено

$$153 + 60 + 84 + 121 + 45 + 210 = 673 \text{ м}.$$

Вы поднялись на

$$0{,}004 \times 153 + 0{,}0017 \times 84 + 0{,}0032 \times 121 = 1{,}15 \text{ м},$$

а опустились на

$$0{,}004 \times 210 = 0{,}84 \text{ м},$$

значит, в общей сложности, оказались выше исходной точки на

$$1{,}15 - 0{,}84 = 0{,}31 \text{ м} = 31 \text{ см}.$$

246. КУЧИ ЩЕБНЯ

Кучи щебня по краям шоссейной дороги также представляют предмет, заслуживающий внимания «геометра на вольном воздухе». Задайте вопрос, какой объем заключает лежащая перед вами куча, и вы поставите себе геометрическую задачу, довольно замысловатую для человека, привыкшего преодолевать математические трудности только на классной доске. Придется вычислить объем конуса, высота и радиус ко-

[1] Иному читателю покажется, быть может, недопустимым считать наклонную AB равною перпендикуляру AC. Поучительно поэтому убедиться, как мала разница в длине AC и AB, когда BC составляет, например, 0,01 от AB. По теореме Пифагора, имеем

$$\overline{AC}^2 = \sqrt{\overline{AB}^2 - \left(\frac{AB}{100}\right)^2} = \sqrt{0{,}99\, AB^2} = 0{,}995\, AB.$$

Разница в длине составляет всего 0,005, т. е. полпроцента. Для приближенных вычислений подобной ошибкой можно, конечно, пренебречь.

[2] Знак 0,000 означает горизонтальный участок пути («площадку»).

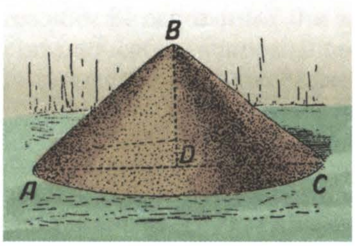


Рис. 95.

торого недоступны для непосредственного измерения. Ничто не мешает, однако, определить их величину косвенным образом. Радиус вы находите, измерив рулеткой или шнуром окружность основания и разделив ее длину[1] на 6,28.

Сложнее обстоит с высотой: приходится (рис.95) измерять длину образующей **AB** – или, как делают дорожные десятники, обеих образующих **ABC** сразу (перекидывая мерную ленту через вершину кучи), а затем, зная радиус основания, вычисляют высоту **BD**) по теореме Пифагора. Рассмотрим пример.

Задача № 31

Окружность основания конической кучи щебня 12,1 м; длина двух образующих 4,6 м. Каков объем кучи?

Решение

Радиус основания кучи равен:

$$12{,}1 \times 0{,}159 \text{ (вместо } 12{,}1 : 6{,}28) = 1{,}9 \text{ м.}$$

Высота равна:

$$\sqrt{2{,}3^2 - 1{,}9^2} = 1{,}2,$$

откуда объем кучи:

$$\tfrac{1}{3} \times 3{,}14 \times 1{,}9^2 \times 1{,}2 = 4{,}5 \text{ куб. м}$$

(или около ½ куб. сажени).

Обычные объемные размеры куч щебня на наших дорогах, согласно прежним дорожным правилам, были равны ½, ¼ и ⅛ куб. сажени, т. е. в метрических мерах 4,8, 2,4 и 1,2 куб. м.

247. «ГОРДЫЙ ХОЛМ»

При взгляде на конические кучи щебня или песка, мне вспоминается старинная легенда восточных народов рассказанная у Пушкина в «Скупом рыцаре»:

Читал я где-то,
Что царь однажды воинам своим
Велел снести земли по горсти в кучу, —
И гордый холм возвысился,
И царь мог с высоты с весельем озирать
И дол, покрытый белыми шатрами,
И море, где бежали корабли.

Это одна из тех немногих легенд, в которых, при кажущемся правдоподобии, нет зерна реальной правды. Можно доказать геометрическим расчетом, что если бы какой-нибудь древний деспот вздумал осуществить такого рода затею, он был бы обескуражен мизерностью результата: перед ним высилась бы настолько жалкая кучка земли, что никакая фантазия не в силах была бы раздуть ее в легендарный «гордый холм».

Сделаем примерный расчет. Сколько воинов могло быть у древнего царя? Старинные армии были не так многочисленны, как в наше время. Войско в 100 000 человек было уже очень внушительно по численности. Остановимся на этом числе, т. е. примем, что холм составился из 100 000 горстей. Захватите самую большую горсть земли и насыпьте в стакан: вы не наполните его одною горстью. Мы примем, что горсть древнего воина была больше вашей и равнялась объему стакана, т. е. $\frac{1}{5}$ л (куб. дм). Отсюда определяется объем холма:

$$\tfrac{1}{5} \times 100\,000 = 20\,000 \text{ куб. дм} = 20 \text{ куб. м.}$$

Значит, холм представлял собою конус, объемом не более 20 куб. м (или 2 куб. сажен). Такой скромный объем уже разочаровывает. Но будем продолжать вычисления, чтобы определить высоту холма. Для этого нужно знать, какой угол составляют образующие конуса с его основанием. В нашем случае можем принять его равным углу естественного откоса, т. е. 45°: более крутых склонов нельзя допустить, так как земля будет осыпаться (правдоподобнее было бы взять даже более пологий уклон, например, полуторный). Остановившись на угле в 45°, заключаем, что высота такого конуса равна радиусу его основания; следовательно,

$$20 = \frac{\pi x^3}{3},$$

откуда

$$x = \sqrt[3]{\frac{60}{\pi}} = 2{,}4 \text{ м.}$$

Надо обладать богатым воображением, чтобы земляную кучу в 2,4 м (1½ человеческих роста) назвать «гордым холмом». Сделав расчет для случая полуторного откоса, мы получили бы еще более скромный результат.
У Атиллы было самое многочисленное войско, какое знал древний мир. Историки оценивают его в 700 тыс. человек. Если бы все эти воины участвовали в насыпании холма, образовалась бы куча повыше вычисленной нами, но не очень: так как объем ее был бы в 7 раз больше, чем у нашей, то высота превышала бы высоту нашей кучи всего в $\sqrt[3]{7}$, т. е. в 1,9 раза: она сравнялась бы $2{,}4 \times 1{,}9 = 4{,}6$ м. Сомнительно, чтобы курган подобных размеров мог удовлетворить честолюбие Атиллы.

С таких небольших возвышений легко было, конечно, видеть «дол, покрытый белыми шатрами», но обозревать море было возможно разве только, если дело происходило невдалеке от берега.

О том, как далеко можно видеть с той или иной высоты, мы побеседуем подробнее в следующей главе.

248. У ДОРОЖНОГО ЗАКРУГЛЕНИЯ

Ни шоссейная, ни железная дороги никогда не заворачивают круто, а переходят всегда с одного направления на другое плавной, без переломов, дугой. Дуга эта обычно есть дуга окружности, расположенная так, что прямолинейные части дороги служат касательными к ней. Например, на рис. 96 прямые участки **AB** и **CD** дороги соединены дугою **BC** так, что **AB** и **CD** касаются (геометрически) этой дуги в точках **B** и **C** т. е. **AB** составляет прямой угол с радиусом **OB**, а **CD** –

Рис. 96.

[1] На практике это действие заменяют умножением на обратное число 0,318, если ищут диаметр, и 0,159 – если желают вычислить радиус.

такой же угол с радиусом **OC**. Делается это, конечно, для того, чтобы путь плавно переходил из прямого направления в кривую часть и обратно.

Радиус дорожного закругления обыкновенно берется весьма большой – на железных дорогах не менее 600 м; наиболее же обычный радиус закругления на главном жел.-дор. пути – 1 000 и даже 2 000 м.

249. РАДИУС ЗАКРУГЛЕНИЯ

Стоя близ одного из таких закруглений, могли ли бы вы определить величину его радиуса? Это не так легко, как найти радиус дуги, начерченной на бумаге. На чертеже дело просто: вы проводите две произвольные хорды и из середин их – восставляете перпендикуляры: в точке их пересечения лежит, как известно, центр дуги; расстояние его от какой-либо точки кривой и есть искомая длина радиуса.

Но сделать подобное же построение на местности было бы, конечно, очень неудобно: ведь центр закругления лежит в расстоянии 1–2 км от дороги, зачастую в недоступном месте.

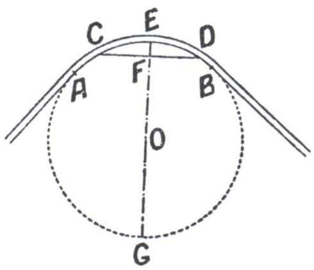


Рис. 97.

Можно было бы выполнить построение на плане, но снять закругление на план тоже не легкая работа.

Все эти затруднения устраняются, если прибегнуть не к построению, а к вычислению радиуса.

Для этого можно воспользоваться следующим приемом. Дополним (рис. 97) мысленно дугу **AB** закругления до полной окружности. Соединив произвольные точки **C** и **D** дуги закругления, измеряем хорду **CD**, а также «стрелку» **EF** (т. е. высоту сегмента **CED**). По этим двум данным уже не трудно вычислить искомую длину радиуса. Рассматривая прямые **CD** и **EG** (диаметр), как пересекающиеся хорды, имеем

$$AF \times FB = EF \times FG.$$

Обозначим длину хорды через **a**, длину стрелки – через **h** и радиус – через **R**; тогда имеем:

$$\frac{a^2}{4} = h\,(2\,R - h),$$

откуда

$$\frac{a^2}{4} = 2Rh - h^2.$$

И искомый радиус: [1]

$$R = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}.$$

[1] То же могло быть получено и иным путем – из прямоугольного треугольника *COF*, где $OC = R$, $CF = \frac{a}{2}$; $OF = R - h$. По теореме Пифагора,

$$R^2 = (R - h)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

откуда

$$R^2 = R^2 - 2Rh + h^2 + \frac{a^2}{4},$$

$$R^2 = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}.$$

Например, при стрелке в 0,5 м и хорде 48 м, искомый радиус

$$R = \frac{48^2 + 4 \times 0{,}5^2}{8 \times 0{,}5} = 580.$$

Это вычисление можно упростить, если считать $2R - h$ равным $2\,R$, – вольность позволительная, так как **h** весьма мало по сравнению с **R**, (ведь **R** – сотни метров, а **h** – единицы их). Тогда получается весьма удобная для вычислений приближенная формула:

$$R = \frac{a^2}{8h}.$$

Применив ее в сейчас рассмотренном случае, мы получили бы ту же величину:

$$R = 580.$$

Вычислив длину радиуса закругления и зная, кроме того, что центр закругления находится на перпендикуляре к середине хорды, вы можете приблизительно наметить и то место, где должен лежать центр кривой части дороги.

Если на дороге уложены рельсы, то нахождение радиуса закругления еще более упрощается. В самом деле, проводя касательную к внутреннему рельсу, мы получаем хорду дуги наружного рельса, стрелка которой **h**

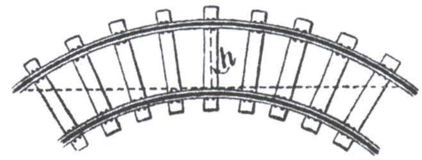


Рис. 98.

(рис. 98) равна ширине колеи – величине, хорошо известной: 1,52 м. Радиус закругления в таком случае (если **a** – длина хорды) равен приближенно:

$$R = \frac{a^2}{8 \times 1{,}52} = \frac{a^2}{12{,}2}.$$

При $a = 120$ метрам радиус закругления в этом случае равен 1200 м.

250. ДНО ОКЕАНА

От дорожного закругления к дну океана – скачок как будто слишком неожиданный, во всяком случае не сразу понятный. Но геометрия связывает обе темы вполне естественным образом.

Речь идет о кривизне дна океана, о том, какую форму оно имеет: вогнутую, плоскую или выпуклую. Многим, без сомнения, покажется невероятным, что океаны, при своей огромной глубине, вовсе не представляют на земном шаре впадин; как сейчас увидим, их дно не только не вогнуто, но даже выпукло. Считая океан «бездонным и безбрежным», мы забываем, что его «безбрежность» во много сотен раз больше

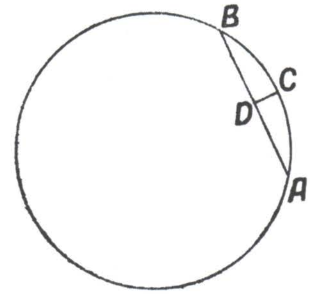


Рис. 99.

его «бездонности», т. е. что водная толща океана представляет собою широко простирающийся слой, который, конечно, повторяет кривизну нашей планеты.

Возьмем для примера Атлантический океан. Ширина его близ экватора составляет, примерно, шестую часть полной окружности. Если круг рис. 99 – экватор, то дуга *ACB* изображает водную скатерть Атлантического океана. Если бы дно его было плоско, то глубина равнялась бы *CD* = стрелке дуги *ACB*. Зная, что дуга *AB* = ⅙ окружности и, следовательно, хорда *AB* есть сторона правильного вписанного шестиугольника (которая, как известно, равна радиусу *R* круга), мы можем вычислить *CD* из выведенной раньше формулы для дорожных закруглений:

$$R = \frac{a^2}{8h}, \quad \text{откуда } h = \frac{a^2}{8R}.$$

Зная, что $a = R$ получаем для данного случая

$$h = \frac{R}{8}.$$

При R = 6 400 км имеем:

$$h = 800 \text{ км.}$$

Итак, чтобы дно Атлантического океана было плоско, наибольшая глубина его должна была бы достигать 800 км. В действительности же она нигде не достигает даже и 10 км. Отсюда прямой вывод: дно этого океана представляет, по общей своей форме, выпуклость, лишь немного менее искривленную, чем выпуклость его водной глади.

Это справедливо и для других океанов: все они представляют собою на земной поверхности места уменьшенной кривизны, почти не нарушая ее общей шарообразной формы.

Наша формула для вычисления радиуса кривизны дороги показывает, что чем водный бассейн обширнее, мы прямо видим, что с возрастанием ширины *a* океана или моря его глубина *h* должна, – чтобы дно было плоское, – возрастать очень быстро, пропорционально квадрату ширины *a*. Между тем, при переходе от небольших водных бассейнов к более обширным, глубина вовсе не возрастает в такой стремительной прогрессии. Океан шире иного моря, скажем, в 100 раз, но глубже его вовсе не в 100 × 100, т. е. в 10 000 раз. Поэтому сравнительно мелкие бассейны имеют дно более вдавленное, нежели океаны. Дно Черного моря между Крымом и Малой Азией не выпукло, как у океанов, даже и не плоско, а несколько вогнуто. Водная поверхность этого моря представляет дугу приблизительно в 2° (точнее в $\frac{1}{170}$ долю окружности Земли). Глубина Черного моря довольно равномерна и равна 2,2 км. Приравняв в данном случае дугу хорде, получаем, что для обладания плоским дном море это должно было бы иметь наибольшую глубину

$$h = \frac{40\,000^2}{170^2 \times 8R} = 1{,}1.$$

Значит, действительное дно Черного моря лежит более чем на километр (2,2–1,1) ниже воображаемой плоскости, проведенной через крайние точки его противоположных берегов, т. е. представляет собою впадину, а не выпуклость.

251. СУЩЕСТВУЮТ ЛИ ВОДЯНЫЕ ГОРЫ?

Выведенная ранее формула для вычисления радиуса кривизны дорожного закругления поможет нам ответить на этот вопрос.

Предыдущая задача уже подготовила нас к ответу. Водяные горы существуют, но не в физическом, а в геометрическом значении этих слов. Не только каждое море, но даже каждое озеро представляет собою в некотором роде водяную гору. Когда вы стоите у берега озера, вас отделяет от противоположной точки берега водная выпуклость, высота которой тем больше, чем озеро шире.

Высоту эту мы можем вычислить: из формулы $R = \frac{a^2}{8h}$ имеем величину стрелки $h = \frac{a^2}{8R}$; здесь *a* – расстояние между берегами по прямой линии, которое можем приравнять ширине озера (хорду – дуге). Если эта ширина, скажем, 100 км, то высота водной «горы»

$$h = \frac{10\,000}{8 \times 6400} = \text{около } 200 \text{ м.}$$

Водяная гора внушительной высоты!

Даже небольшое озеро в 10 км ширины возвышает вершину своей выпуклости над прямой линией, соединяющей ее берега, на 2 м, т. е. выше человеческого роста.

Но в праве ли мы называть эти водные выпуклости «горами»? В физическом смысле нет: они не поднимаются над горизонтальной поверхностью, – значит, это равнины. Ошибочно думать, что прямая *AB* (рис. 100) есть горизонтальная линия, над которой поднимается дуга *ACB*. Горизонтальная линия здесь не *AB*, а *ACB*, совпадающая с свободной поверхностью спокойной воды. Прямая же *ADB* – наклонная к горизонту: *AD* уходит наклонно вниз под земную поверхность до точки *D*, ее глубочайшего пункта, и затем вновь поднимается вверх, выходя из-под земли (или воды) в точке *B*. Если бы вдоль прямой *AB* были проложены трубы, то шарик, помещенный в точке *A*, не удержался бы здесь, а (если стенки трубы гладки) скатился бы до точки *D* и отсюда, разогнавшись, вкатился бы к точке *B*; затем, не удержавшись здесь, скатился бы к *D*, добежал бы до *A*, снова скатился бы и т. д. Идеально гладкий шарик по идеально гладкой трубе (притом при отсутствии воздуха, мешающего движению) катался бы так туда и назад вечно...

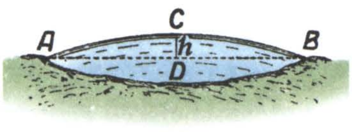
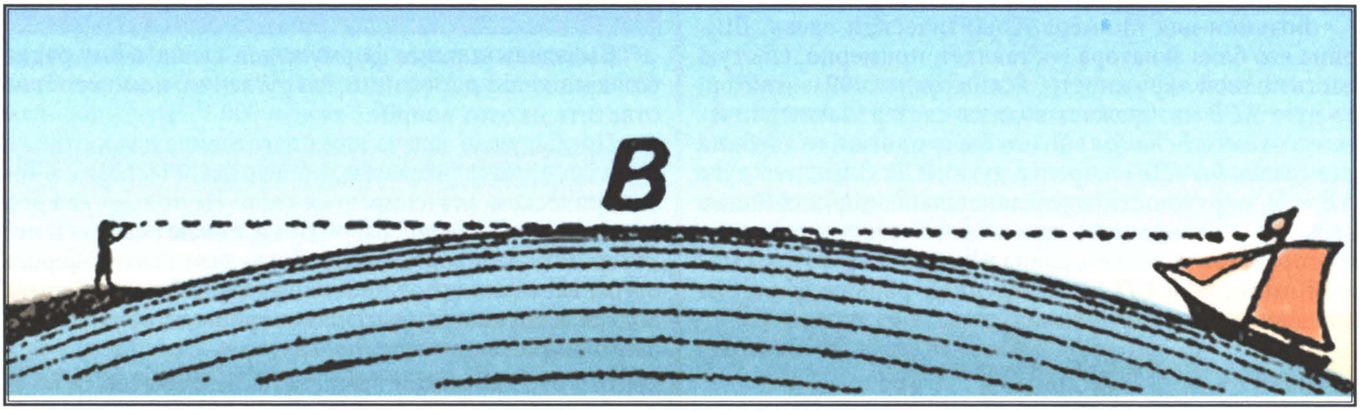


Рис. 100.

Итак, хотя глазу кажется на рис. 100, что *ACB* – гора, но в физическом значении слова здесь ровное место. Гора – если хотите – существует тут только в геометрическом смысле.



252. ГОРИЗОНТ

В степи или на ровном поле вы видите себя в центре окружности, которая ограничивает доступную вашему глазу земную поверхность. Это – горизонт. Линия горизонта неуловима: когда вы идете к ней, она от вас отодвигается. Но, неуловимая, она все же реально существует; это не обман зрения, не мираж. Для каждой точки наблюдения имеется определенная граница видимой из нее земной поверхности, и дальность этой границы не трудно вычислить. Чтобы уяснить себе геометрические отношения, связанные с горизонтом, обратимся к рис. 101. Дуга *AB* – часть окружности земного шара. В точке *C* помещается глаз наблюдателя на высоте *CD* над земной поверхностью. Как далеко видит кругом себя, на ровном месте, этот наблюдатель? Очевидно, только до точек *M*, *N*, где луч зрения касается земной поверхности: дальше земля лежит ниже луча зрения. Эти точки *M*, *N* (и другие, лежащие на окружности *MEN*) представляют собою границу видимой части земной поверхности, т. е. образуют линию горизонта. Наблюдателю должно казаться, что здесь небо опирается на землю, потому что в этих точках он видит одновременно и небо и земные предметы.

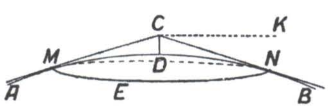


Рис. 101.

Быть может, вам покажется, что рис. 101 не дает верной картины действительности: ведь на самом деле горизонт всегда находится на уровне глаз, между тем как на чертеже круг явно лежит ниже наблюдателя. Действительно, нам всегда кажется, что линия горизонта расположена на одном уровне с глазами и даже повышается вместе с нами, когда мы поднимаемся. Но это – обман зрения: на самом деле линия горизонта всегда ниже наших глаз, как и показано на рис. 101. Но угол, составляемый прямыми линиями *CN* и *CM* с прямой *CK*, перпендикулярной к радиусу в точке *C* (этот угол называется «понижением горизонта»), весьма мал, и уловить его без инструмента невозможно.

Отметим попутно и другое любопытное обстоятельство. Мы сейчас сказали, что при поднятии наблюдателя над земной поверхностью, например, на аэроплане, линия горизонта кажется остающейся на уровне глаз, т. е. как бы поднимается вместе с наблюдателем. Если он достаточно высоко поднимается, ему будет казаться, что почва под аэропланом лежит ниже линии горизонта, – другими словами, земля представится словно вдавленной в форме чаши, краями которой служит линия горизонта. Это очень хорошо описано и объяснено у Эдгара По в фантастическом «Приключении Ганса Пфаля»

Рис. 102.

«Больше всего, – рассказывает его герой-аэронавт, – удивило меня то обстоятельство, что поверхность земного шара казалась вогнутой. Я ожидал, что увижу ее непременно выпуклой во время подъема кверху: только путем размышления нашел я объяснение этому явлению. Отвесная линия, проведенная от моего шара к земле, образовала бы катет прямоугольного треугольника, основанием которого была бы линия от основания отвеса до горизонта, а гипотенузой – линия от горизонта до моего шара. Но моя высота была ничтожна по сравнению с полем зрения: другими словами, основание и гипотенуза воображаемого прямоугольного треугольника были так велики по сравнению с отвесным катетом, что их можно было считать почти параллельными. Поэтому каждая точка, находящаяся как раз под аэронавтом, всегда кажется лежащей ниже уровня горизонта. Отсюда впечатление вогнутости. И это должно продолжаться до тех пор, пока высота подъема не станет настолько значительной, что основание треугольника и гипотенуза перестанут казаться параллельными».

В дополнение к этому объяснению добавим следующий пример. Вообразите прямой ряд телеграфных столбов (рис. 103, вверху). Для глаза, помещенного в

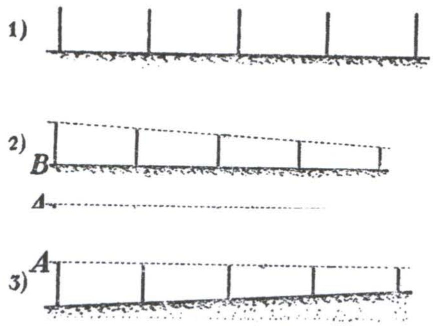


Рис. 103. Ряд телеграфных столбов. A и B – положение глаза наблюдателя.

точке *B*, на уровне оснований столбов, ряд принимает вид, обозначенный цифрой 2. Но для глаза в точке *A*, на уровне вершин столбов, ряд принимает вид 3, т. е. почва кажется ему словно приподнимающейся у горизонта.

253. КОРАБЛЬ НА ГОРИЗОНТЕ

Когда с берега моря или большого озера мы наблюдаем за кораблем, появляющимся из-под горизонта, нам кажется, что мы видим судно не в той точке (рис. 104), где

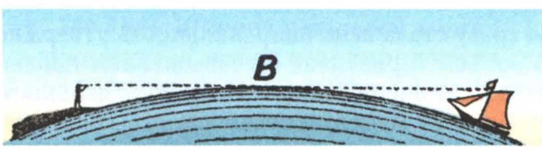


Рис. 104.

оно действительно находится, а гораздо ближе, в точке *B*, где линия нашего зрения скользит по выпуклости моря. При наблюдении невооруженным глазом трудно отделаться от впечатления, что судно находится в точке *B*, а не дальше за горизонтом.

Однако в зрительную трубу это различное отдаление судна воспринимается гораздо отчетливее. Труба не одинаково ясно показывает нам предметы близкие и отдаленные: в трубу, наставленную в даль, близкие предметы видны расплывчато, и, обратно, наставленная на близкие предметы труба показывает нам даль в тумане. Если поэтому направить трубу (с достаточным увеличением) на водный горизонт и наставить так, чтобы ясно видна была водная поверхность, то корабль представится в расплывчатых очертаниях, обнаруживая этим свою большую отдаленность от наблюдателя (рис. 105). Наоборот, установив трубу так, чтобы резко видны были очертания корабля, полускрытого под горизонтом, мы заметим, что водная поверхность у горизонта утратила свою прежнюю ясность и рисуется словно в тумане (рис. 106). Английский астроном Проктор, подметивший это поучительное явление, говорит

Рис. 105.

Рис. 106.

по этому поводу:

«Все, кому случалось произвести такое наблюдение, единогласно утверждали, что, как ни крепка была их уверенность в шарообразности Земли, они нашли в этом наблюдении убедительнейшее подтверждение этой истины».

254. ДАЛЬНОСТЬ ГОРИЗОНТА

Как же далеко лежит от наблюдателя линия горизонта? Другими словами: как велик радиус того круга, в центре которого мы видим себя на ровной местности? Как вычислить дальность горизонта, зная величину возвышения наблюдателя над земной поверхностью?

Задача сводится к вычислению длины отрезка *CN* (рис. 107) касательной, проведенной из глаза наблюдателя к земной поверхности. Квадрат касательной, – мы знаем из геометрии, равен произведению внешнего отрезка (*h*) секущей на всю длину этой секущей, т. е. на *h* + 2*R*, где *R* – радиус земного шара. Так как возвышение глаза наблюдателя над землею обычно крайне мало по сравнению с диаметром (2*R*) земного шара,

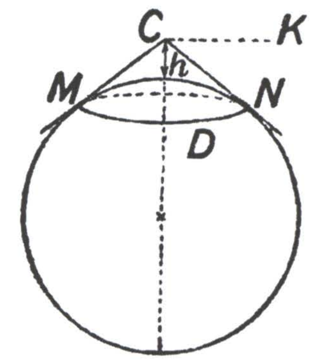


Рис. 107.

составляя, например, для высочайшего поднятия аэроплана только 0,001 его долю, то 2*R* + *h* можно принять равным 2*R*, и тогда формула упростится:

$$CN^2 = h \times 2R$$

Значит, дальность горизонта можно вычислять по очень простой формуле:

$$\text{дальность горизонта} = \sqrt{2Rh},$$

где *R* – радиус земного шара (около 6 400 км), а *h* – возвышение глаза наблюдателя над земной поверхностью. Так как $\sqrt{6\,400} = 80$, то формуле можно придать вид:

$$\text{дальность горизонта} = 80\sqrt{2h} = 113\sqrt{h},$$

где *h* непременно должно быть выражено в частях километра.

Это – расчет чисто геометрический, упрощенный. Если пожелаем уточнить его учетом физических факторов, влияющих на дальность горизонта, то должны принять в соображение так называемую «атмосферную рефракцию». Рефракция, т. е. преломление (искривление) световых лучей в атмосфере, увеличивает дальность горизонта примерно на $^1/_{15}$ долю (на 6%). Число это – 6% – только среднее. Дальность горизонта несколько увеличивается или уменьшается в зависимости от многих условий, а именно, она:

увеличивается:	уменьшается:
при высоком давлении	при низком давлении
близ поверхности земли;	на высоте;
в холодную погоду	в теплую погоду днем;
утром и вечером;	в сухую погоду
в сырую погоду над морем.	над сушей.

В ряде приведенных далее задач влияние атмосферной рефракции в расчет (в большинстве случаев) не принимается. Нетрудно, впрочем, – как будет показано, – ввести и требуемую поправку.

Задача № 32

Как далеко может видеть человек, стоящий на равнине?

Решение

Считая, что глаз взрослого человека возвышается над почвой на 1,6 м, или на 0,0016 км, имеем:

$$\text{дальность горизонта} = 113\sqrt{0{,}0016} = 4{,}52 \text{ км}.$$

Человек среднего роста видит на ровном месте не далее 4½ км. Рефракция увеличивает эту дальность до 4,8 км. Поперечник обозреваемого им круга – всего 9,6 км, а площадь – 72 кв. км. Это гораздо меньше, чем обычно думают люди, описывающие далекий простор степей, окидываемый глазом.

Задача № 33

Как далеко видит на море человек, сидящий в лодке?

Решение

Если возвышение глаза сидящего в лодке человека над уровнем воды примем за 1 м, или 0,001 км, то дальность горизонта равна

$$113\sqrt{0{,}001} = 3{,}58 \text{ км, т. е. немного более } 3½ \text{ км}.$$

При более низком положении глаза горизонт суживается: для полуметра, например, до 2 ½ км. Напротив, при наблюдении с возвышенных пунктов (с мачты) дальность горизонта возрастает: для 4 м, например, до 7 км.

Задача № 34

Как далеко может видеть летчик, поднявшийся на высоту 5 км?

Решение

Дальность горизонта = $113\sqrt{5}$ – около 250 км (конечно, на ровном месте, например, над морской поверхностью).

Задача № 35

Как высоко должен подняться летчик, чтобы видеть кругом себя на 50 км?

Решение

Из формулы дальности горизонта имеем в данном случае уравнение:

$$50 = \sqrt{2Rh},$$

откуда

$$h = \frac{50^2}{2R} = \frac{2500}{12800} = 0{,}2 \text{ км}.$$

Значит, достаточно подняться всего на 200 м.

Все получаемые по указанной формуле результаты были бы вполне верны лишь в том случае, если бы земная атмосфера не влияла на прямолинейное распространение лучей света. В действительности, как было сказано выше, воздушная оболочка Земли искривляет путь лучей, вследствие чего горизонт отодвигается на 6% дальше того расстояния, которое получается из формулы. Эту поправку не трудно внести. Например, в задаче № 34 правильный ответ будет 250 × 1,06 = 265 км, а задачу № 35 нужно бы решить так; скинув 6% от 50 км, имеем 47 км; далее

$$h = \frac{47^2}{2R} = \frac{2200}{12800} = 0{,}17 \text{ км}.$$

т. е. 170 м (вместо 200).

255. БАШНЯ ГОГОЛЯ

Задача № 36

Интересно узнать, что увеличивается быстрее: высота поднятия или дальность горизонта? Многие думают, что с возвышением наблюдателя горизонт возрастает необычайно быстро. Так думал, между прочим, и Гоголь, писавший в статье «Об архитектуре нашего времени» следующее:

«Башни огромные, колоссальные, необходимы в городе... У нас обыкновенно ограничиваются высотой, дающей возможность оглядеть один только город, между тем как для столицы необходимо видеть, по крайней мере, на полтораста верст во все стороны, и для этого, может быть, один только или два этажа лишних, – и все изменяется. Объем кругозора по мере возвышения распространяется необыкновенною прогрессией».

Так ли в действительности?

Решение

Достаточно взглянуть на формулу

$$\text{дальность горизонта} = \sqrt{2Rh},$$

чтобы сразу стала ясна неправильность утверждения, будто «объем горизонта» с возвышением наблюдателя возрастает очень быстро. Напротив, дальность горизонта растет медленнее, чем высота поднятия: она пропорциональна квадратному корню из высоты. Когда возвышение наблюдателя увеличивается в 100 раз, горизонт отодвигается всего только в 10 раз дальше; когда высота становится в 1000 раз больше, горизонт отодвигается всего в 31 раз дальше. Поэтому ошибочно утверждать, что «один только или два этажа лишних, – и все изменяется». Если к 8-этажному дому пристроить еще два этажа, дальность горизонта возрастет в $\sqrt{10/8}$ т. е. в 1,1 раза – всего на 10%, Такая прибавка почти не чувствуется.

Что же касается проекта сооружения башни, с которой можно было бы видеть, «по крайней мере, на полтораста верст», то он совершенно несбыточен. Гоголь, конечно, не подозревал, что такая башня должна иметь огромную высоту.

Действительно, из уравнения

$$150 = \sqrt{2Rh}$$

получаем:

$$h = \frac{150^2}{2R} = \frac{22\,500}{12\,800} = 1{,}9.$$

Самая высокая из всех сооруженных до недавнего времени башен – Эйфелева – в 6 раз ниже этих проектируемых Гоголем вышек. А во времена Гоголя даже и Эйфелевой башни еще не существовало!

256. ХОЛМ ПУШКИНА

Задача № 37

Сходную ошибку делает и Пушкин, говоря в «Скупом рыцаре» о далеком горизонте, открывающемся с вершины «гордого холма»:

И царь мог с высоты с весельем озирать
И дол, покрытый белыми шатрами,
И море, где бежали корабли...

Мы уже видели (стр. 169), как скромна была высота этого «гордого» холма: даже полчища Атиллы не могли бы по этому способу воздвигнуть холма выше 4,4 м. Теперь мы можем завершить расчеты, определив, насколько холм этот расширял горизонт наблюдателя, поместившегося на его вершине. Глаз такого зрителя возвышался бы над почвой на 4½ + 1½, т. е. на 6 м, и, следовательно, дальность горизонта равна была бы $\sqrt{2 \times 6\,400 \times 0{,}006} = 8{,}8$ км. Это всего на 4 км больше того, что можно видеть стоя на ровной земле.

257. ГДЕ РЕЛЬСЫ СХОДЯТСЯ

Задача № 38

Конечно, вы не раз замечали, как суживается уходящая в даль рельсовая колея. Но случалось ли вам видеть ту точку, где оба рельса, наконец, встречаются друг с другом? Да и возможно ли видеть такую точку? У вас теперь достаточно знаний, чтобы решить эту задачу.

Решение

Вспомним, что каждый предмет превращается для нормального глаза в точку тогда, когда виден под углом в 1′, т. е. когда он удален на 3 400 своих поперечников (см. стр. 163-164). Ширина рельсовой колеи – 1,52 м. Значит, промежуток между рельсами должен слиться в точку на расстоянии 1,52 × 3400 = 5,2 км. Итак, если бы мы могли проследить за рельсами на протяжении 5,2 км, мы увидели бы, как оба они сходятся в одной точке. Но на ровной местности горизонт лежит ближе 5,2 км, – именно, на расстоянии всего 4,4 км. Следовательно, человек с нормальным зрением, стоя на ровном месте, не может видеть точку встречи рельсов. Он мог бы наблюдать ее лишь при одном из следующих условий:

1) если острота зрения его понижена, так что предметы сливаются для него в точку при угле зрения, большем 1′;

2) если железнодорожный путь не горизонтален;

3) если глаз наблюдателя возвышается над землей более чем на

$$\frac{5{,}2^2}{2R} = \frac{27}{12\,800} = 0{,}0021 \text{ км.}$$

т. е. 210 см.

258. ЗАДАЧА О МАЯКЕ

Задача № 39

На берегу находится маяк, верхушка которого возвышается на 40 м над поверхностью воды.

С какого расстояния откроется этот маяк для корабля, если матрос-наблюдатель («марсовой») находится на «марсе» корабля на высоте 10 м над водной поверхностью?

Решение

Из рис. 108 видно, что задача сводится к вычислению длины прямой *AC*, составленной из двух частей *AB* и *BC*.

Часть *AB* есть дальность горизонта маяка, при высоте над землей 40 м, а *BC* – дальность горизонта «марсового» при высоте 10 м. Следовательно, искомое расстояние равно (см. стр. 173):

$$113\sqrt{0{,}04} - 113\sqrt{0{,}01} =$$
$$= 113\,(0{,}2 + 0{,}1) = 34 \text{ км.}$$

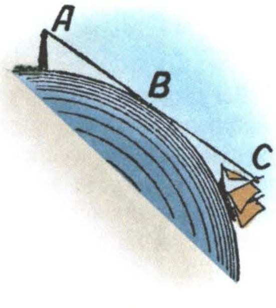


Рис. 108.

Задача № 40

Какую часть этого маяка увидит тот же «марсовой» с расстояния 30 км?

Решение

Из рис. 109 ясен ход решения задачи: нужно прежде всего вычислить длину *BC*, затем отнять полученный результат от общей длины *AC*, т. е. от 30 км, чтобы узнать расстояние *AB*. Зная *AB*, мы вычислим высоту, с которой дальность горизонта равна *AB*. Выполним же все эти расчеты:

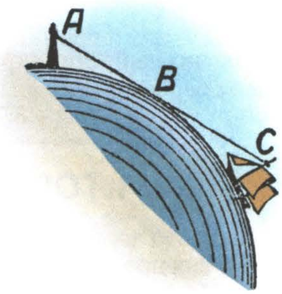


Рис. 109.

$$BC = 113\sqrt{0{,}01} = 11{,}3;$$
$$30 - 11{,}3 = 18{,}7;$$
$$\text{высота} = \frac{18{,}7^2}{2R} = \frac{350}{12\,800} = 0{,}027.$$

Значит, с расстояния 30 км не видно 27 м высоты маяка; остается видимым только 13 м.

259. МОЛНИЯ

Задача № 41

Над вашей головой, на высоте 1,5 км, сверкнула молния. На каком расстоянии от вашего места еще можно было видеть молнию?

Решение

Надо вычислить дальность горизонта для высоты 1,5 км. Она равна

$$113\sqrt{1{,}5} = 138 \text{ км.}$$

Значит, если местность ровная, то молния была видна человеку, – глаз которого находится на уровне земли, – на расстоянии 138 км (а с 6%-й поправкой – на 146 км). В точках, удаленных на 146 км, она была видна на самом горизонте; а так как на такое расстояние звук не доносится, то наблюдалась она здесь, как зарница, – молния без грома.

Рис. 110.

260. ПАРУСНИК

Задача № 42

Вы стоите на берегу озера или моря, у самой воды, и наблюдаете за удаляющимся от вас парусником. Вам известно, что верхушка мачты возвышается на 6 м над уровнем воды. На каком расстоянии от вас парусник начнет кажущимся образом опускаться в воду (т. е. за горизонт) и на каком расстоянии он скроется окончательно?

Решение

Парусник начнет скрываться под горизонт (см. рис. 104) в точке ***B*** – на расстоянии дальности горизонта для человека среднего роста, т. е. 4,4 км. Совсем скроется он под горизонт в точке, расстояние которой от ***B*** равно

$$113\sqrt{0{,}006} = 8{,}7.$$

Значит, парусник скроется под горизонт на расстоянии от берега

$$4{,}4 + 8{,}7 = 13{,}1 \text{ км.}$$

261. ГОРИЗОНТ НА ЛУНЕ

Задача № 43

До сих пор все расчеты наши относились к земному шару. Но как бы изменилась дальность горизонта, если бы наблюдатель очутился на другой планете, например, на одной из равнин Луны?

Решение

Задача решается по той же формуле: дальность горизонта = $\sqrt{2Rh}$, но в данном случае вместо $2R$ надо подставить длину не диаметра земного шара, а диаметра Луны, равного 3 500 км. При возвышении глаза над почвой на 1,5 м, имеем:

$$\text{дальность горизонта} = \sqrt{3500 \times 0{,}0015} = 2{,}3.$$

На лунной равнине мы видели бы вдаль примерно всего на 2 ⅓ км.

262. В ЛУННОМ КРАТЕРЕ

Задача № 44

Наблюдая Луну в зрительную трубу даже скромных размеров, мы видим на ней множество так называемых кольцевых гор – образований, подобных которым на Земле нет. Одна из величайших кольцевых гор – «кратер Коперника» – имеет в диаметре снаружи 124 км, внутри 90 км. Высочайшие точки кольцевого вала возвышаются над почвой внутренней котловины на 1500 м. Но если бы вы очутились в средней части внутренней котловины, увидели бы вы оттуда этот кольцевой вал?

Решение

Чтобы ответить ка вопрос, нужно вычислить дальность горизонта для гребня вала, т. е. для высоты 1,5 км. Она равна на Луне $\sqrt{3500 \times 1{,}5} = 23$ км. Прибавив дальность горизонта для человека среднего роста, получим расстояние, на котором кольцевой вал скрывается под горизонтом наблюдателя,

$$23 + 2{,}3 = \text{около } 25 \text{ км.}$$

А так как центр вала удален от его краев на 45 км, то видеть этот вал из центра невозможно, – разве только взобравшись на склоны центральных гор, возвышающихся на дне этого кратера до высоты 600 м. [1]

263. НА ЮПИТЕРЕ

Задача № 45

Как велика дальность горизонта на Юпитере, диаметр которого в 11 раз больше земного?

Решение

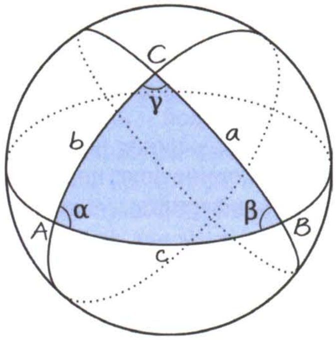
Если Юпитер покрыт твердой корой и имеет ровную поверхность, то человек, перенесенный на его равнину, мог бы видеть вдаль на

$$\sqrt{11 \times 12800 \times 0{,}0015} = 14{,}4,$$

т. е. ≈ на 14 ½ км.

[1] См. книгу того же автора: «Занимательная астрономия», гл. II, статью «Лунные пейзажи».

Задачи о дальности горизонта, дальности видимости предметов выводят нас на совершенно новую геометрическую науку. Все мы со школьной скамьи знаем что сумма углов треугольника всегда равна 180 градусам. Однако, это не всегда так. Та наука о которой пойдет речь подразумевает, что эта сумма может быть и больше.



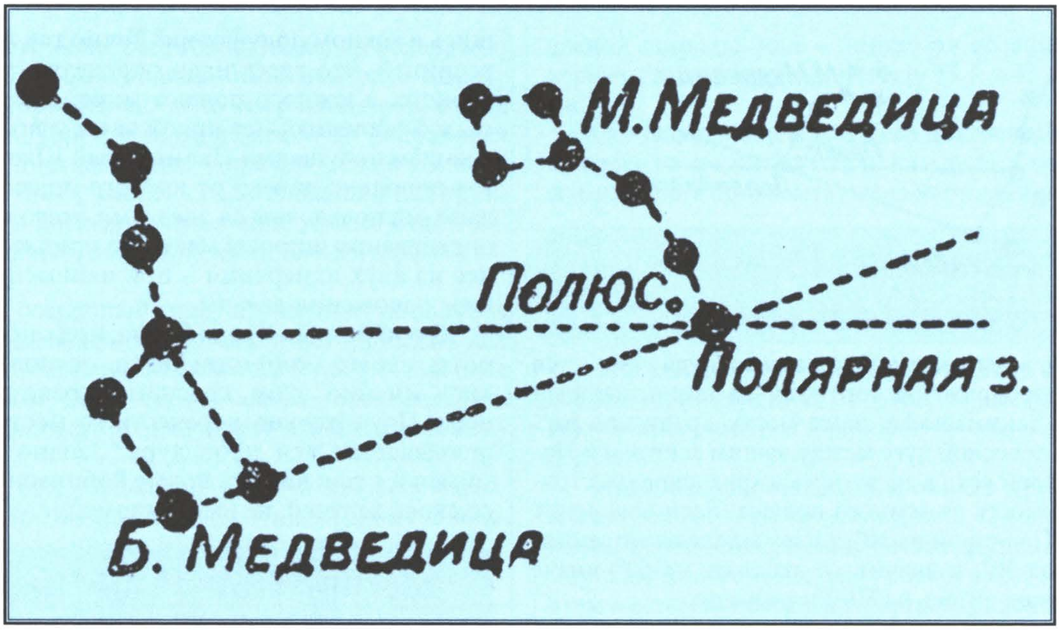
Сферический треугольник

Речь идет о совершенно необходимом на Земле, как планете, разделе геометрии - Сферической геометрии. Этот раздел занят вопросом о геометрии на поверхности сферы, коей и является наша планета.

Человек с древности обратил внимание, что обычная «плоская» геометрия заводит мореплавателя в тупик. Дело тут в том, что плавания на дальние расстояния надо уже рассматривать как движение по поверхности сферы со всеми вытекающими из этого обстоятельства последствиями.

Обычно, в повседневной жизни, в поле или в лесу мы идем по азимуту на необходимую нам, как говорят моряки, точку пришествия. То есть мы движемся по прямой линии, нашему азимуту, который проложен под постоянным углом к направлению на север.

Однако, если вы возьмете глобус, и проложите на нем курс под постоянным углом к направлению на север, то есть к меридиану, то ваш путь превратится в винтовую линию и уведет вас на северный полюс. Вот это и другие противоречия и вынудили ученых с древности разбираться в этих вопросах. В результате появилась наука «Сферическая геометрия», которая с помощью тригонометрии и строгой логики приведет вас из любой точки Земли в любую другую, вам необходимую. Ей и пользуются до сих пор мореплаватели, прокладывая кратчайшие курсы для своих судов.



264. ГЕОМЕТРИЯ ЗВЕЗДНОГО НЕБА

Было время, когда автор этой книги готовил себя к не совсем обычной будущности: к карьере человека, потерпевшего кораблекрушение. Короче сказать, я мечтал сделаться Робинзоном. Если бы это осуществилось, настоящая книга была бы составлена гораздо интереснее, чем теперь, но может быть – и вовсе осталась бы ненаписанной. Мечта моя до сих пор не сбылась, и теперь я не жалею об этом. Однако в юности я горячо верил в свое призвание Робинзона и готовился к нему вполне серьезно. Ведь даже самый посредственный Робинзон должен обладать знаниями и навыками, необязательными для людей других профессий.

Что, прежде всего, придется сделать человеку, закинутому крушением на необитаемый остров? Конечно, определить географическое положение своего невольного обиталища – широту и долготу. Об этом, к сожалению, слишком кратко говорится в большинстве историй старых и новых Робинзонов. В полном издании подлинного «Робинзона Крузо» вы найдете об этом всего одну строку, да и ту в скобках:

«В тех широтах, где лежит мой остров (т. е., по моим вычислениям, на 9° 22′ севернее экватора)...»

Эта досадная краткость приводила меня в отчаяние, когда я запасался сведениями, необходимыми для моей воображаемой будущности. Я готов был уже отказаться от завидной карьеры единственного обитателя пустынного острова, когда секрет раскрылся передо мною в «Таинственном острове» Жюля Верна.

Я не готовлю моих читателей поголовно в Робинзоны, но все же считаю нелишним остановиться здесь на простейших способах определения географической широты. Умение это может иметь практическое значение не для одних только обитателей неведомых островов. У нас еще столько населенных мест, не обозначенных на картах (да и всегда ли под руками подробная карта?), что задача определения географической широты может встать перед многими из моих читателей. Правда, мы не можем утверждать, как некогда Лермонтов, что даже губернский «Тамбов на карте генеральной кружком означен не всегда»; но множество местечек, сел и колхозов, в которых живет добрая половина обитателей Союза [1], не обозначены на общих картах еще и в наши дни. Не надо пускаться в морские приключения, чтобы оказаться в роли Робинзона, впервые определяющего географическое положение места своего обитания.

Дело это в основе сравнительно несложное. Наблюдая в ясную звездную ночь за небом, вы заметите, что звезды медленно описывают на небесном своде наклонные круги, словно весь купол неба плавно вращается на косо утвержденной невидимой оси. В действительности же, конечно, вы сами, вращаясь вместе с Землею, описываете круги около ее оси в обратную сторону. Единственная точка звездного купола в нашем северном полушарии, которая сохраняет неподвижность, – та, куда упирается мысленное продолжение земной оси. Этот северный «полюс мира» приходится невдалеке от яркой звезды на конце хвоста Малой Медведицы – Полярной звезды. Найдя ее на нашем северном небе, мы тем самым найдем и положение северного полюса мира. Отыскать же ее не трудно, если найти сначала положение всем известного созвездия Большой Медведицы: проведите прямую линию через ее крайние звезды, как показано на рис. 111, и, продолжив ее на расстояние, примерно, равное длине всего созвездия, вы наткнетесь на Полярную.

Это одна из тех точек на небесной сфере, которые понадобятся нам для определения географической широты. Вторая – так наз. «зенит» – есть точка, приходящаяся на небе отвесно над вашей головой. Други-

[1] Автор имеет в виду СССР - Союз Советских Социалистических Республик, государство, существовавшее с 1922 по 1991 г. В результате распада СССР возникла Российская Федерация и другие независимые страны, прежде входившие в его состав.

Рис. 111. Как найти Полярную звезду.

ми словами: зенит есть точка на небе, куда упирается мысленное продолжение того радиуса Земли, который проведен к занимаемому вами месту. Градусное расстояние по небесной дуге между вашим зенитом и Полярной звездой есть в то же время градусное расстояние вашего места от земного полюса. Если ваш зенит отстоит от Полярной на 30°, то вы отдалены от земного полюса на 30°, а, значит, от экватора на 60°; иначе говоря, вы находитесь на 60-й параллели.

Следовательно, чтобы найти широту какого-либо места, надо лишь измерить в градусах (и его долях) «зенитное расстояние» Полярной звезды: после этого останется только вычесть эту величину из 90° – и широта определена. Практически обычно поступают иначе. Так как дуга между зенитом и горизонтом содержит 90°, то, вычитая зенитное расстояние Полярной звезды из 90°, мы получаем в остатке не что иное, как длину небесной дуги от Полярной до горизонта; иначе говоря, мы получаем «высоту» Полярной звезды над горизонтом. Поэтому географическая широта какого-либо места равна высоте Полярной звезды над горизонтом этого места.

Теперь вам понятно, что нужно сделать для определения широты. Дождавшись ясной ночи, вы отыскиваете на небе Полярную звезду и измеряете ее угловую высоту над горизонтом; результат сразу даст вам искомую широту вашего места. Если хотите быть точным, вы должны принять в расчет, что Полярная звезда не строго совпадает с полюсом мира, а отстоит от него на 1¼°. Поэтому Полярная звезда не остается совершенно неподвижной: она описывает около неподвижного небесного полюса маленький кружок, располагаясь то выше его, то ниже, то справа, то слева – на 1¼°. Определив высоту Полярной звезды в самом высоком и в самом низком ее положении (астроном сказал бы: в моменты ее верхней и нижней «кульминаций»), вы берете среднее из обоих измерений. Это и есть истинная высота полюса, а, следовательно, и искомая широта места.

Но если так, то незачем избирать непременно Полярную звезду: можно остановиться на любой незаходящей звезде и, измерив ее высоту в обоих крайних положениях над горизонтом, взять среднюю из этих измерений. В результате получится высота полюса над горизонтом, т. е. широта места. На практике так и делают. Но при этом необходимо уметь улавливать моменты наивысшего и наинизшего положения избранной звезды, что усложняет дело. Вот почему для первых приближенных измерений лучше работать с Полярной звездой, пренебрегая небольшим удалением ее от полюса.

До сих пор мы воображали себя находящимися в северном полушарии. Как поступили бы вы, очутившись в южном полушарии? Точно так же, с той лишь разницей, что здесь надо определять высоту не северного, а южного полюса мира. Близ этого полюса, к сожалению, нет яркой звезды вроде Полярной в нашем полушарии. Знаменитый Южный Крест сияет довольно далеко от южного полюса; и если желаем воспользоваться звездами этого созвездия для определения широты места, то придется брать среднее из двух измерений – при наивысшем и наинизшем положении звезды.

Герои романа Жюля Верна, при определении широты своего «таинственного острова», пользовались именно этим красивым созвездием южного неба. Поучительно перечесть то место романа, где описывается вся процедура. Заодно мы познакомимся и с тем, как эти новые Робинзоны справились со своей задачей, не имея угломерного инструмента.

265. ШИРОТА «ТАИНСТВЕННОГО ОСТРОВА»

«Было 8 часов вечера. Луна еще не взошла, но горизонт серебрился уже нежными бледными оттенками, которые можно было назвать лунной зарей. В зените блистали созвездия южного полюса и между ними созвездие Южного Креста. Инженер Смит некоторое время наблюдал это созвездие.

– Герберт, – сказал он после некоторого раздумья, – у нас сегодня 15 апреля?

– Да, – ответил юноша.

– Если не ошибаюсь, завтра один из тех четырех дней в году, когда истинное время равно среднему времени: завтра солнце вступит на меридиан ровно в полдень по нашим часам [1]. Если погода будет ясная, мне удастся приблизительно определить долготу острова.

– Без инструментов?

– Да. Вечер ясный, и потому я сегодня же попытаюсь определить широту нашего острова, измерив высоту звезд Южного Креста, т. е. высоту южного полюса над горизонтом. А завтра в полдень определю и долготу острова.

Если бы у инженера был секстант – прибор, позволяющий точно измерять угловые расстояния предметов помощью отражения световых лучей, – задача не представляла бы никаких затруднений. Определив в этот вечер высоту полюса, а завтра днем – момент прохождения солнца через меридиан, он получил бы географические координаты острова: широту и долготу. Но секстанта не имелось, и надо было его заменить.

Инженер вошел в пещеру. При свете костра он вырезал две прямоугольные планки, которые соединил в одном конце в форме циркуля так, что ножки его можно было сдвигать и раздвигать. Для шарнира он воспользовался крепкой колючкой акации, найденной среди валежника у костра.

[1] Наши часы идут не строго согласованно с солнечными часами: между «истинным солнечным временем» и тем «средним временем», которое показывается точными часами, есть расхождение, равняющееся нулю только четыре дня в году: около 16 апреля, 14 июня, 1 сентября и 24 декабря.

Когда инструмент был готов, инженер возвратился на берег. Ему необходимо было измерить высоту полюса над горизонтом, ясно очерченным, т. е. над уровнем моря. Для своих наблюдений он отправился на площадку Далекого Вида, – причем нужно принять во внимание также высоту самой площадки над уровнем моря. Это последнее измерение можно будет выполнить на другой день приемами элементарной геометрии.

Горизонт, озаренный снизу первыми лучами луны, резко обрисовывался, представляя все удобства для наблюдения. Созвездие Южного Креста сияло на небе в опрокинутом виде: звезда альфа, обозначающая его основание, всего ближе лежит к южному полюсу (мира).

Это созвездие расположено не так близко к южному полюсу, как Полярная звезда – к северному. Звезда альфа отстоит от полюса на 27 градусов; инженер знал это и предполагал ввести это расстояние в свои вычисления. Он поджидал момента прохождения звезды через меридиан, – это облегчает выполнение операции.

Смит направил одну ножку своего деревянного циркуля вдоль горизонта, другую – к звезде альфа Креста, и отверстие образовавшегося угла дало угловую высоту звезды над горизонтом. Чтобы закрепить этот угол надежным образом, он прибил с помощью шипов акации к обеим планкам третью, пересекающую их поперек, так что фигура сохраняла неизменную форму.

Оставалось лишь определить величину полученного угла, относя наблюдение к уровню моря, т. е. учитывая понижение горизонта, для чего необходимо было измерить высоту скалы [1]. Величина угла даст высоту звезды альфа Креста, а, следовательно, и высоту полюса над горизонтом, т. е. географическую широту острова, так как широта всякого места земного шара равна высоте полюса над горизонтом этого места. Эти вычисления предполагалось произвести завтра.

Как выполнено было измерение высоты скалы, наши читатели знают уже из отрывка, приведенного в 199 главе нашей книги (стр. 137). Пропустив здесь это место, проследим за дальнейшей работой инженера: «Инженер взял циркуль, который был устроен им накануне и помощью которого он определил угловое расстояние между звездой альфа Южного Креста и горизонтом. Он тщательно измерил величину этого угла помощью круга, разделенного на 360 частей, и нашел, что он равен 10°. Отсюда высота полюса над горизонтом – после присоединения к 10° тех 27°, которые отделяют названную звезду от полюса, и приведения к уровню моря высоты скалы, с вершины которой было выполнено измерение, – получилась равной 37°. Смит заключил, что остров Линкольн расположен на 37° южной широты, или – принимая во внимание несовершенство измерения – между 35-й и 40-й параллелями.

Оставалось еще узнать его долготу. Инженер рассчитывал определить ее в тот же день, в полдень, когда солнце будет проходить через меридиан острова»

266. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОГРАФИЧЕСКОЙ ДОЛГОТЫ

«Но как инженер определит момент прохождения солнца через меридиан острова, не имея для этого никакого инструмента? Вопрос этот очень занимал Герберта.

Инженер распорядился всем, что нужно было для его астрономического наблюдения. Он выбрал на песчаном берегу совершенно чистое место, выровненное морским отливом. Шестифутовый шест, воткнутый на этом месте, был перпендикулярен к этой площадке.

Герберт понял тогда, как намерен был действовать инженер для определения момента прохождения солнца через меридиан острова, или, иначе говоря, для определения местного полудня. Он хотел определить его по наблюдению тени, отбрасываемой шестом на песок. Способ этот, конечно, недостаточно точен, но, за отсутствием инструментов, он давал все же довольно удовлетворительный результат.

Момент, когда тень шеста сделается наиболее короткой, будет полдень. Достаточно внимательно проследить за движением конца тени, чтобы заметить момент, когда тень, перестав сокращаться, вновь начнет удлиняться. Тень как бы играла в этом случае роль часовой стрелки на циферблате.

Когда, по расчету инженера наступило время наблюдения, он стал на колени и, втыкая в песок маленькие колышки, начал отмечать постепенное укорочение тени отбрасываемой шестом.

Журналист (один из спутников инженера) держал в руке свой хронометр готовясь заметить момент, когда тень станет наиболее короткой. Так как инженер производил наблюдение 16 апреля, т. е. в один из тех дней, когда истинный полдень совпадает со средним, то момент, замеченный журналистом по его хронометру, будет установлен по времени меридиана Вашингтона (места отправления путешественников).

Солнце медленно подвигалось. Тень постепенно укорачивалась. Заметив, наконец, что она начала удлиняться, инженер спросил:

– Который час?

– Пять часов и одна минута, – ответил журналист.

Наблюдение было окончено. Оставалось только проделать несложный расчет.

Наблюдение установило, что между меридианом Вашингтона и меридианом острова Линкольна разница во времени почти ровно 5 часов. Это значит, что когда на острове полдень, в Вашингтоне уже 5 часов вечера. Солнце в своем кажущемся суточном движении вокруг земного шара пробегает один градус в 4 минуты, а в час – 15 градусов. А 15 градусов, умноженные на 5 (число часов), составляют 75 градусов.

Вашингтон лежит на меридиане 77°3'11" от Гринвичского меридиана, принимаемого американцами,

[1] Так как измерение производилось инженером не на уровне моря, а с высокой скалы, то прямая линия, проведенная от глаза наблюдателя к краю горизонта, не строго совпадала с перпендикуляром к земному радиусу, а составляла с ним некоторый угол. Однако угол этот так мал, что для данного случая можно было им смело пренебречь (при высоте в 100 м он едва составляет третью долю градуса): поэтому Смиту, вернее, Жюлю Верну, не было надобности усложнять расчета введением этой поправки. Я П.

как и англичанами, за начало счета долгот. Значит, остров лежал приблизительно на 152 градусах западной долготы.

Принимая во внимание недостаточную точность наблюдений, можно было утверждать, что остров лежит между 35-й и 40-й параллелями южной широты и между 150-м и 155-м меридианами к западу от Гринвича».

Отметим в заключение, что способов определений географической долготы имеется несколько и довольно разнообразных; способ, примененный героями Жюля Верна, лишь один из них (известный под названием «способа перевозки хронометров»). Точно так же существуют и другие приемы определения широты, нежели здесь описанный (для мореплавания, например, непригодный).

История создания надежного метода определения местоположения объектов на поверхности Земли весьма интересна и захватывающа. Это целый историко-детективный роман, если так можно выразиться. Он начался в глубокой древности и, видимо, закончился в конце XX в., когда появилась Глобальная Система Позиционирования (GPS), использующая высокие технологии, в том числе, и космические аппараты.

Первый известный историкам мореплаватель-исследователь древнего мира был грек Гиппал. Существует легенда, впрочем, основанная на древних записях, что он первым из европейцев придумал способ «точного» плавания. Попутно заметим, что наука, которая изучает вопрос о том, как безопасно и в кратчайшее время привести корабль из пункта выхода в пункт назначения, называется навигация.

Древние рукописи гласят, что Гиппал учитывая форму и размеры моря, ориентировался по ветру. Таким образом он мог плыть через него прямо, без прямой видимости берегов. А в древние времена оторваться от берега и уйти в море означало почти верную гибель. Поясним, что речь идет о плаваниях древних моряков примерно во II в. до н. э.: греков, египтян и других в Индию. Путешествие начиналось на северном берегу Красного моря и продолжалось по Индийскому океану в направлении к западному побережью полуострова Индостан.

Но ориентироваться по ветру можно было лишь в тех широтах, где существовали сезонные ветра устойчивого направления. Например - муссоны. И, конечно, надо признать, что такой метод мореплавания был очень далек от требуемой точности. Благо, что западный берег Индии простирался на 2000 тыс. км и мог «поймать» самого плохого навигатора.

Переломный момент в науке мореплавания наступил в первом тысячелетии нашей эры, когда в Китае изобрели компас. Плавания на короткие расстояния с уходом в открытое море вне видимости берегов становится обычным делом. В Европу это чудо техники попало лишь между XII-м и XIII-м в. Сообразительные итальянцы быстро поняли суть дела и значительно усовершенствовали привезенный из Китая прибор. Веком позже, с помощью трудов итальянского моряка Флавио Джойя, магнитный компас обретает черты современного навигационного инструмента. У него появляется вертикальная ось, на которую насаживался круг, разбитый сначала на 16, а затем на 32 направления, которые стали звать румбами. Круг с осью (катушка) помещались в закрытый котелок, который устанавливался на карданов подвес для уменьшения влияния качки на компас и повышения удобства пользования.

Но проблема дальних переходов оставалась. С одним лишь компасом у которого цена деления, то есть один румб, составляла 11¼ градуса на точное кораблевождение рассчитывать не приходилось. Ошибки были еще весьма велики. Требовалось, во-первых, увеличить точность компаса чтобы точнее измерять направления в море, а во вторых надо было придумать способ как-то ориентироваться в море, где из наблюдаемых объектов были лишь Солнце, Луна и звезды....

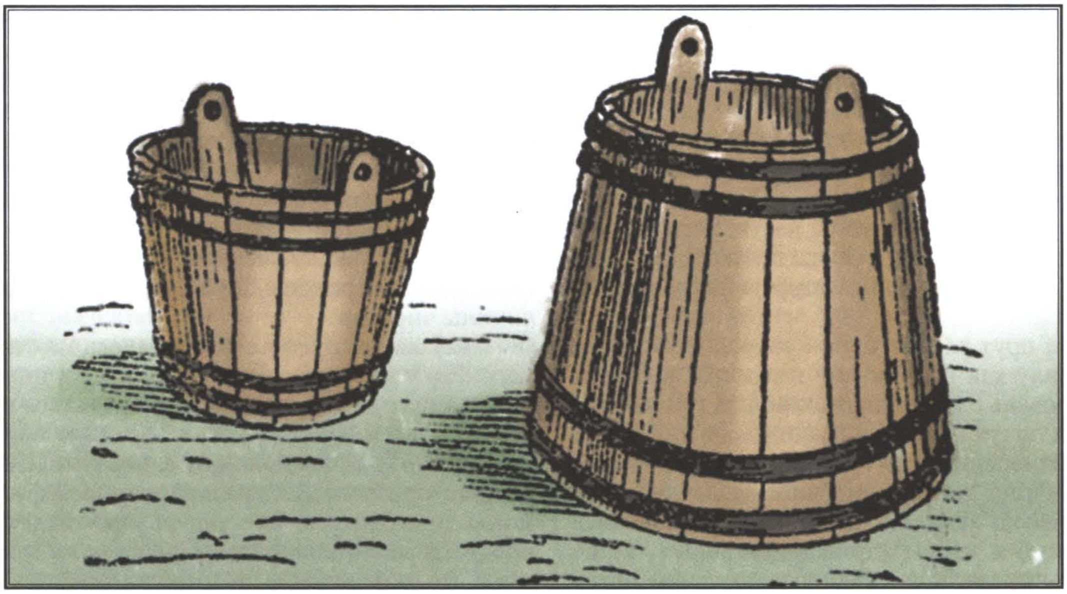
Это обстоятельство и стало ключевым пунктом в нахождении места корабля. Суть метода заключалась в том, что светила, занимая в определенный момент времени определенное положение на небосклоне, наблюдаются мореплавателями в разных местах земной поверхности под различными, но соответствующими месту углами над горизонтом. То есть, под одним и тем же углом светило можно видеть только если вы находитесь на окружности, с центром на пересечении прямой, проведенной вдоль радиуса Земли к светилу и земной поверхности. Если взять аналогичный угол на второе светило, то вы получите еще одну окружность на поверхности земли, которые пересекутся в двух точках: где-то возле вашего места и на «другом конце земли». А если вы берете в расчет еще и третье светило, то получите треугольник ошибок, в котором вы точно находитесь. Все параметры данной задачи вам позволит вычислить сферическая геометрия, которую мы упомянули выше.

Логотип Глобальной системы позиционирования GPS

Таким образом ключевым элементом борьбы за возможность определения координат места стала борьба за изобретение точных часов, которые могли бы работать на корабле в условиях качки. И такой инструмент был изобретен. Английский часовщик-самоучка Джон Гаррисон в 1731 г. изобрел морской хронометр и к 1734 г. усовершенствовал его настолько, что Британское Адмиралтейство приняло его прибор и выплатило изобретателю учрежденную в 1714 г. премию.

До конца XX в. принцип определения положения не менялся. Добавился лишь метод определения места по радиомаякам, но он так и не стал основным. Высококвалифицированный штурман на корабле должен был получить место корабля через 15 минут после начала обсерваций, то есть измерения высот светил, выбранных для наблюдений.

Ситуация кардинально изменилась лишь в конце XX в. В 1993 г. в США был запущен последний 24-й спутник системы NavStar, который был необходим для полного покрытия земной поверхности сигналами, по которым происходит ориентирование и расчет местоположения и скорости объекта. Система GPS позволила определять положение на земной поверхности с точностью до нескольких метров и, причем, в реальном времени.



267. НА ДНЕ ТРЮМА

От вольного воздуха полей и моря перенесемся в тесный и темный трюм старинного корабля, где юный герой одного из романов Майн Рида успешно разрешил геометрическую задачу при такой обстановке, при которой, наверное, ни одному из моих читателей заниматься математикой не приходилось. В романе «Мальчик-моряк» (или «На дне трюма») Майн Рид повествует о юном любителе морских приключений, который, не имея средств заплатить за проезд, пробрался в трюм незнакомого корабля – и здесь неожиданно оказался закупоренным на все время морского перехода. Роясь среди багажа, заполнявшего его темницу, он наткнулся на ящик сухарей и бочку воды. Рассудительный мальчик понимал, что с этим ограниченным запасом еды и питья надо быть возможно бережливее, и потому решил разделить его на ежедневные порции. Пересчитать сухари было нетрудным делом, но как установить порции воды, не зная ее общего запаса? Вот задача, которая стояла перед юным героем Майн Рида. Послушаем, как он справился с нею.

268. ИЗМЕРЕНИЕ БОЧКИ

(Задача Майн Рида)

«Мне необходимо было установить для себя дневную порцию воды. Для этого нужно было узнать, сколько ее содержится в бочке, и затем разделить по порциям. К счастью, в деревенской школе учитель сообщил нам на уроках арифметики некоторые начальные сведения из геометрии: я имел понятие о кубе, пирамиде, цилиндре, шаре; знал я также, что бочку можно рассматривать как два усеченных конуса, сложенных своими большими основаниями.

Чтобы определить вместимость моей бочки, нужно было знать ее высоту (или, в сущности, половину этой высоты), затем окружность одного из доньев и окружность срединного сечения, т. е. самой широкой части бочки. Зная эти три величины, я мог точно определить, сколько кубических единиц содержится в бочке.

Мне оставалось только измерить эти величины, – но в этом-то и заключалась вся трудность. Как выполнить это измерение? Узнать высоту не трудно: она была передо мною; что же касается окружностей, то я не мог к ним подступиться. Я был слишком мал ростом, чтобы достать до верху; кроме того, мешали ящики, стоявшие по сторонам.

Было еще одно затруднение: у меня не было ни масштаба, ни шнурка, которыми можно было бы воспользоваться для измерения; как мог я определять величины, если у меня не было никакой меры? Однако я решил не отказываться от своего плана, пока не обдумаю его со всех сторон».

269. МОЯ МЕРНАЯ ЛИНЕЙКА

«Размышляя о бочке, с твердым решением ее измерить, я внезапно открыл то, чего мне не хватало. Мне поможет прут такой длины, чтобы он мог пройти насквозь через бочку в самом широком ее месте. Если я введу прут в бочку и уткнусь им в противоположную стенку, я буду знать длину диаметра. Останется лишь утроить длину прута, чтобы получить длину окружности. Это не вполне точно, но вполне достаточно для обиходных измерений. А так как отверстие, которое я раньше проделал в бочке, приходилось в самой широкой ее части, то, введя в него прут; я буду иметь тот диаметр, который мне нужен.

Но где найти прут? Это было не трудно. Я решил воспользоваться доской от ящика с сухарями, и тотчас же принялся за работу. Правда, доска была длиною всего в 60 см, бочка же – более чем вдвое шире. Но это не могло составить затруднения, нужно было лишь приготовить три палочки и связать их вместе, чтобы получить прут достаточной длины.

Разрезав доску вдоль волокон, я приготовил три хорошо округленных и обглаженных палочки. Чем связать их? Я воспользовался шнурками от моих ботинок, имевшими в длину чуть не целый метр. Связав палочки, я получил планку достаточной длины — около полутора метров.

Я приступил было к измерению, но наткнулся на новое препятствие. Оказалось невозможным ввести мой прут в бочку: помещение было слишком тесно. Нельзя было и согнуть прута, — он наверное бы сломался.

Вскоре я придумал, как ввести в бочку мой измерительный прут: я разобрал его на части, ввел первую часть и лишь тогда привязал к ее выступающему концу вторую часть; затем, протолкнув вторую часть, привязал третью.

Я направил прут так, чтобы он уперся в противоположную стенку как раз против отверстия, и сделал на нем знак вровень с поверхностью бочки. Отняв толщину стенок, я получил величину, которая необходима была мне для измерений.

Я вытащил прут тем же порядком, как и ввел его, стараясь тщательно замечать те места, где отдельные части были связаны, чтобы потом придать пруту ту же длину, какую он имел в бочке. Небольшая ошибка могла бы в конечном результате дать значительную погрешность.

Итак, у меня был диаметр нижнего основания усеченного конуса. Теперь нужно найти диаметр дна бочки, которое служило верхним основанием конуса. Я положил прут на бочку, уперся им в противоположную точку края и отметил на ней величину диаметра. На это потребовалось не больше минуты.

Оставалось только измерить высоту бочки. Надо было, скажете вы, поместить палку отвесно возле бочки и сделать на ней отметку высоты. Но мое помещение ведь было совершенно темным, и, поместив палку отвесно, я не мог видеть, до какого места доходит верхнее дно бочки. Я мог действовать только ощупью: пришлось бы нащупать руками дно бочки и соответствующее место на палке. Кроме того, палка, вращаясь возле бочки, могла наклониться, и я получил бы неверную величину для высоты.

Подумав хорошенько, я нашел, как преодолеть это затруднение. Я связал только две планки, а третью положил на верхнее дно бочки так, чтобы она выдавалась за край его на 30—40 см; затем я приставил к ней длинный прут так, чтобы он образовал с нею прямой угол и, следовательно, был параллелен высоте бочки. Сделав отметку в том месте бочки, которое больше всего выступало, т. е. посредине, и откинув толщину дна, я получил таким образом половину высоты бочки, или – что то же самое – высоту одного усеченного конуса.

Теперь у меня были все необходимые данные для решения задачи».

270. ЧТО И ТРЕБОВАЛОСЬ ВЫПОЛНИТЬ

«Выразить содержимое бочки в кубических единицах и затем перечислить в галлоны [1] представляло простое арифметическое вычисление, с которым не трудно было справиться. Правда, для вычислений у меня не было письменных принадлежностей, но они были бы и бесполезны, так как я находился в полной темноте. Мне часто приходилось выполнять в уме все четыре арифметических действия без пера и бумаги. Теперь предстояло оперировать с не слишком большими числами, и задача меня нисколько не смущала.

Но я столкнулся с новым затруднением. У меня были три данных: высота и оба основания усеченного конуса; но какова численная величина этих данных? Необходимо, прежде чем вычислить, выразить эти величины числами.

Сначала это препятствие казалось мне непреодолимым. Раз у меня нет ни фута, ни метра, никакой измерительной линейки, приходится отказаться от решения задачи.

Однако я вспомнил, что в порту я измерил свой рост, который оказался равным четырем футам. Как же могло пригодиться мне теперь это сведение? Очень просто: я мог отложить четыре фута на моем пруте и взять это за основание при вычислениях.

Чтобы отметить свой рост, я вытянулся на полу, затем положил на себя прут так, чтобы один его конец касался моих ног, а другой лежал на лбу. Я придерживал прут одной рукой, а свободной отметил на нем место, против которого приходилось темя.

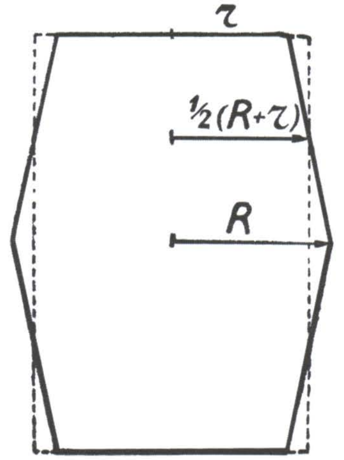


Рис. 112.

Дальше – новые затруднения. Прут, равный 4 футам, бесполезен для измерений, если на нем не отмечены мелкие деления – дюймы. Не трудно как будто разделить 4 фута на 48 частей (дюймов) и нанести эти деления на линейки. В теории это действительно весьма просто; но на практике, да еще в той темноте, в какой я находился, это было далеко не так легко и просто.

Каким образом найти на пруте середину этих 4 футов? Как разделить каждую половину прута снова пополам, а затем каждый из футов на 12 дюймов, в точности равные друг другу?

Я начал с того, что приготовил палочку немного длиннее 2 футов. Сравнив ее с прутом, где отмечены были 4 фута, я убедился, что двойная длина палочки немного больше 4 футов. Укоротив палочку и повторив операцию несколько раз, я на пятый раз достиг того, что двойная длина палочки равнялась ровно 4 футам.

Это отняло много времени. Но времени у меня было достаточно: я даже был доволен, что имел чем заполнить его.

Впрочем, я догадался сократить дальнейшую работу, заменив палочку шнуром, который удобно было складывать пополам. Для этого хорошо пригодились шнурки от моих ботинок. Связав их прочным узлом, я принялся за работу – и вскоре мог уже отрезать кусок длиною ровно в 1 фут. До сих пор приходилось складывать вдвое,— это было легко. Дальше пришлось сложить втрое, что было

[1] Галлон – мера емкости. Английский галлон заключает 277 куб. дюймов (около 4½ л). В галлоне 4 «кварты»; в кварте – 2 «пинты».

труднее. Но я с этим справился, и вскоре у меня в руках было три куска по 4 дюйма каждый. Оставалось сложить их вдвое и еще раз вдвое, чтобы получить кусочек длиною в 1 дюйм.

У меня было теперь то, чего мне нехватало, чтобы нанести на пруте дюймовые деления; аккуратно прикладывая к нему куски моей мерки, я сделал 48 зарубок, означавших дюймы. Тогда в моих руках оказалась разделенная на дюймы линейка, помощью которой можно было измерить полученные мною длины. Только теперь мог я довести до конца задачу, которая имела для меня столь важное значение.

Я немедленно занялся этим вычислением. Измерив оба диаметра, я взял среднее из их длин, затем нашел площадь, соответствующую этому среднему диаметру. Так я получил величину основания цилиндра, равновеликого двойному конусу равной высоты. Умножив результаты на высоту, я определил кубическое содержание искомого объема.

Разделив число полученных кубических дюймов на 69 (число кубических дюймов в одной кварте) [1], я узнал, сколько кварт в моей бочке.

В ней вмещалось свыше ста галлонов, – точнее, 108».

271. ПОВЕРКА РАСЧЕТА

Читатель, сведущий в геометрии, заметит, без сомнения, что способ вычисления объема двух усеченных конусов, примененный юным героем Майн Рида, не вполне точен. Если обозначим радиус меньших оснований через r, радиус большего — через R, а высоту бочки, т. е. двойную высоту каждого усеченного конуса, через h, то объем, полученный мальчиком, выразится формулой:

$$\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)h = \frac{\pi h}{4}(R^3 + r^3 + 2Rr).$$

Между тем, поступая по правилам геометрии, т. е. применяя формулу объема усеченного конуса, мы получили бы для искомого объема выражение:

$$\frac{\pi h}{3}(R^3 + r^3 + Rr).$$

Оба выражения не тождественны, и легко убедиться, что второе больше первого на

$$\frac{\pi h}{12}(R - r)^2.$$

Знакомые с алгеброй сообразят, что разность $\frac{\pi h}{12}(R - r)^2$ есть величина положительная, т. е. способ Майн Ридовского мальчика дал ему результат преуменьшенный.

Интересно определить, как, примерно, велико это преуменьшение. Бочки обычно устраиваются так, что наибольшая ширина их превышает поперечник дна на $\frac{1}{5}$ долю, т. е. $R - r = \frac{R}{5}$. Принимая, что бочка в романе Майн Рида была именно такой формы, можем найти разность между полученной и истинной величиной объема усеченных конусов:

$$\frac{\pi h}{12}(R - r)^2 = \frac{\pi h}{12}\left(\frac{R}{5}\right)^2 = \frac{\pi h R^2}{300},$$

т. е. около $\frac{hR^2}{100}$ (если считать $\pi = 3$). Ошибка равна, мы видим, объему цилиндра, радиус основания которого есть радиус наибольшего сечения бочки, а высота – трехсотая доля ее высоты.

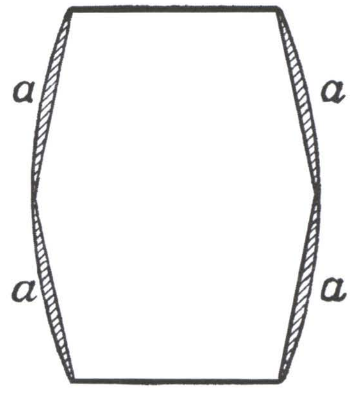


Рис. 113.

Однако, небольшое преувеличение результата в данном случае даже желательно, так как объем бочки заведомо больше объема двух вписанных в нее усеченных конусов. Это ясно из рис. 113, где видно, что при указанном способе обмера бочки отбрасывается часть ее объема, обозначенная буквами ***a***, ***a***, ***a***, ***a***.

Юный математик Майн Рида не сам придумал эту формулу для вычисления объема бочки; она приводится в некоторых начальных руководствах по геометрии, как удобный прием для приближенного определения содержания бочек. Надо заметить, что измерить объем бочки совершенно точно – задача весьма нелегкая. Над нею размышлял еще гениальный Кеплер, оставивший, в числе своих математических сочинений, специальную работу: «Об искусстве измерять бочки». Простое и точное геометрическое решение этой задачи не найдено и по настоящее время: существуют лишь выработанные, практикой приемы, дающие результат с большим или меньшим приближением. Но рассмотрение их едва ли было бы здесь уместно и занимательно.

Интереснее рассмотреть другой вопрос: почему, собственно, бочкам придается такая неудобная для обмера форма—цилиндра с выпуклыми боками? Не проще ли было бы изготовлять бочки строго цилиндрические? Такие цилиндрические бочки, правда, делаются, но не деревянные, а металлические (для керосина и т. п.). Итак, перед нами

Задача № 46

Почему деревянные бочки изготовляются с выпуклыми боками? Каково преимущество такой формы?

Решение

Выгода та, что, набивая на бочки обручи, можно надеть их плотно и туго весьма простым приемом: надвиганием их поближе к широкой части. Тогда обруч достаточно сильно стягивает клепки, обеспечивая им бочке необходимую прочность.


Рис. 114.

По той же причине деревянным ведрам, ушатам, чанам и т. д. придается обычно форма не цилиндра, а усеченного конуса: здесь также тугое

[1] См. примеч. на стр. 182.

обхватывание изделия обручами достигается простым надвиганием их на широкую часть (рис. 114).

272. НОЧНОЕ СТРАНСТВОВАНИЕ МАРКА ТВЕНА

Находчивость, проявленная Майн Ридовским мальчиком в его печальном положении, заслуживает удивления, в полной темноте, в какой он находился, большинство людей не сумели бы даже сколько-нибудь правильно ориентироваться, не говоря уже о том, чтобы выполнять при этом какие-либо измерения и вычисления. С рассказом Майн Рида поучительно сопоставить комичную историю о бестолковом странствовании в темной комнате швейцарской гостиницы – приключении, будто бы случившемся со знаменитым соотечественником Майн Рида, юмористом Марком Твеном. В этом рассказе удачно подмечено, как трудно составить себе в темноте верное представление о расположении предметов даже в обыкновенной комнате, если обстановка мало знакома. Мы приводим далее, в сокращенной передаче, этот забавный эпизод из «Странствований за границей» Марка Твена.

«Я проснулся и почувствовал жажду. Мне пришла в голову прекрасная мысль — одеться, выйти в сад и освежиться, вымывшись у фонтана.

Я встал потихоньку и стал разыскивать свои вещи. Нашел один носок. Где второй, я не мог себе представить. Осторожно спустившись на пол, я стал обшаривать кругом, но безуспешно. Стал искать дальше, шаря и загребая. Подвигался все дальше и дальше, но носка не находил и только натыкался на мебель. Когда я ложился спать, кругом было гораздо меньше мебели; теперь, же комната была полна ею, особенно стульями, которые оказались повсюду. Не вселились ли сюда еще два семейства за это время? Ни одного из этих стульев я в темноте не видел, зато беспрестанно стукался о них головой.

Наконец, я решил, что могу прожить и без одного носка. Встав, я направился к двери, как я полагал, — но неожиданно увидел свое тусклое изображение в зеркале.

Ясно, что я заблудился и не имею ни малейшего представления о том, где нахожусь. Если бы в комнате было одно зеркало, оно помогло бы мне ориентироваться, но их было два, а это так же скверно, как тысяча.

Я хотел пробраться к двери по стене. Я снова начал свои попытки — и уронил картину. Она была не велика, но натворила шуму, как целая панорама. Гаррис (сосед по комнате, спавший на другой кровати) не шевелился, но я чувствовал, что если буду действовать дальше в том же духе, то непременно разбужу его. Попробую другой путь. Найду снова круглый стол — я был около него уже несколько раз — и от него постараюсь пробраться к моей кровати; если найду кровать, то найду и графин с водой, и тогда, по крайней мере, утолю свою нестерпимую жажду. Лучше всего – ползти на руках и на коленях; этот способ я уже испытал и потому больше доверял ему.

Наконец мне удалось набрести на стол — ощутить его головой — с небольшим сравнительно шумом. Тогда я снова встал и побрел, балансируя с протянутыми вперед руками и растопыренными пальцами. Нашел стул. Затем стенку. Другой стул. Затем диван. Свою палку. Еще один диван. Это меня удивило: я прекрасно знал, что в комнате был только один диван. Опять набрел на стол и получил новый удар. Затем наткнулся на новый ряд стульев.

Только тогда пришло мне в голову то, что давно должно было придти: стол был круглый, а, следовательно, не мог служить точкой отправления при моих странствованиях. Наудачу пошел я в пространство между стульями и диваном, — но очутился в области совсем неизвестной, уронив по пути подсвечник с камина. После подсвечника я уронил лампу, а после лампы со звоном полетел на пол графин.

— Ага, – подумал я, — каконец-то я нашел тебя, голубчика!

— Воры! Грабят! — закричал Гаррис.

Шум и крики подняли весь дом. Явились со свечами и фонарями хозяин, гости, прислуга.

Я оглянулся вокруг. Оказалось, что я стою возле кровати Гарриса. Только один диван стоял у стены; только один стул стоял так, что на него можно было наткнуться, — я кружил вокруг него, подобно планете, и сталкивался с ним, подобно комете, в течение целой половины ночи.

Справившись со своим шагомером, я убедился, что сделал за ночь 47 миль».

Последнее утверждение преувеличено свыше всякой меры: нельзя в течение нескольких часов пройти пешком 47 миль, — но остальные подробности этой истории довольно правдоподобны и метко характеризуют те комические затруднения, с которыми обычно встречаешься, когда бессистемно, наудачу, странствуешь в темноте по незнакомой комнате. Тем более должны мы оценить удивительную методичность и присутствие духа юного героя Майн Рида, который не только сумел ориентироваться в полной темноте, но и разрешил при этих условиях нелегкую математическую задачу.

273. С ЗАКРЫТЫМИ ГЛАЗАМИ

По поводу кружения Твена в темной комнате интересно отметить одно загадочное явление, которое наблюдается у людей, бродящих с закрытыми глазами: они не могут идти по прямому направлению, а непременно сбиваются в сторону, описывая дугу, воображая, однако, что движутся прямо вперед (рис. 115). Вот поучительный опыт, произведенный в Венеции на площади Марка. Людям завязывали глаза, ставили их на одном конце площади, как раз против собора, и предлагали до него дойти. Хотя пройти надо было всего только 175 м, все же ни один

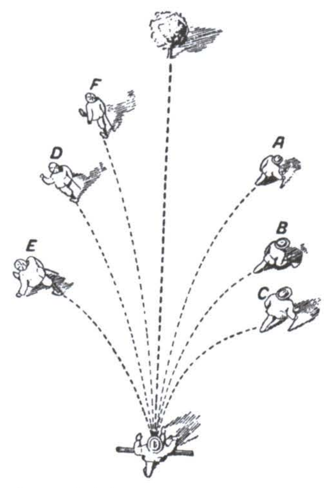


Рис. 115. Человек с закрытыми глазами не может идти по прямолинейному пути, он описывает дуги — к точкам A, B, C или D, E, F.

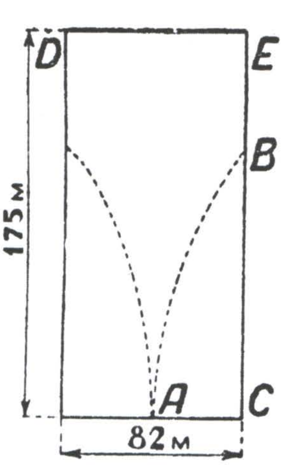


Рис. 116.

из испытуемых не дошел до фасада здания (82 м ширины), а все уклонялись в сторону, описывали дугу и упирались в одну из боковых колоннад (рис. 116).

Давно известно также, что люди, бродящие без компаса по степи в метель или в туманную погоду, — вообще во всех случаях, когда нет возможности ориентироваться, — обычно описывают круги, хотя воображают, что идут все время вперед. Рассказы о таких безнадежных кружениях по пустынной местности можно встретить в описании многих путешествий. Приведем в виде примера вполне достоверный рассказ. Трое путников намеревались в снежную ночь покинуть хижину и выбраться из долины, шириною в 4 км, чтобы достичь своего дома, расположенного в направлении, которое на прилагаемом плане отмечено пунктиром (рис. 117). В пути они бессознательно уклонились вправо, по кривой, отмеченной стрелкой. Пройдя некоторое расстояние, они, по расчету времени, полагали, что достигли цели, — на самом же деле очутились у той же хижины, которую покинули.

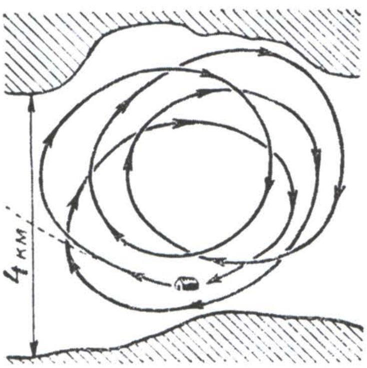


Рис. 117.

Отправившись в путь вторично, они уклонились еще сильнее и снова дошли до исходного пункта. Тоже повторилось в третий и в четвертый раз. В отчаянии предприняли они пятую попытку, — но с тем же результатом. После пятого круга они отказались от дальнейших попыток выбраться из долины и дождались утра в хижине.

Еще труднее грести на море по прямой линии в темную беззвездную ночь или в густой туман. Отмечен случай, — один из многих подобных, — когда гребцы, решив переплыть в туманную погоду пролив шириною в 4 км, дважды побывали у противоположного берега, но не достигли его, а бессознательно описали два круга и высадились наконец... в месте своего отправления (рис. 118).

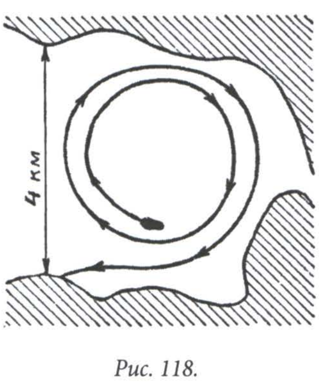


Рис. 118.

То же случается и с животными. Полярные путешественники рассказывают о кругах, которые описывают в снежных пустынях животные, запряженные в сани. Собаки, которых пускают плавать с завязанными глазами, также описывают в воде круги. По кругу же летят и ослепленные птицы. Затравленный зверь, лишившийся от страха способности ориентироваться, спасается не по прямой линии, а по спирали.

Чем же объясняется эта загадочная приверженность человека и животных к кругу, невозможность держаться в темноте прямого направления? Здесь нет ничего таинственного: она находит себе естественное объяснение в неполной симметрии тела человека и животных.

Обе половины тела развиты неодинаково: правая нога не равна левой по силе мускулов. Поэтому человек, например, делает одной ногой (чаще всего левой) более длинные шаги, нежели правой. Легко понять, что, двигаясь таким образом, человек неизбежно должен описывать дугу: вспомните, как катится игрушечная заводная тележка, колеса которой на одной стороне больше, чем на другой. Это геометрическая необходимость. Представьте себе, например, что, занося левую ногу, человек делает шаг на миллиметр длиннее, чем правой ногой. Тогда, сделав попеременно каждой ногой тысячу шагов, человек опишет левой ногой путь на 1000 мм, т. е. на целый метр, длиннее, чем правой. На прямых параллельных путях это невозможно, зато вполне осуществимо на концентрических окружностях.

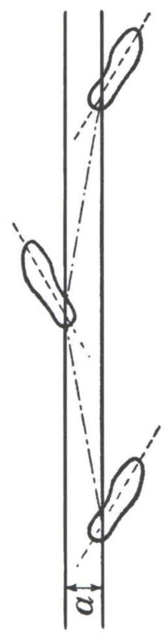


Рис. 119.

Мы можем даже, пользуясь планом описанного выше кружения в снежной долине, вычислить, насколько у тех путников левая нога делала более длинный шаг, чем правая (так как путь загибался вправо, то ясно, что более длинные шаги делала именно левая нога).

Расстояние между линиями отпечатков правой и левой ног при ходьбе (***a*** на рис. 119) равно, примерно, 10 см, т. е. 0,1 м. Когда человек описывает один полный круг, его правая нога проходит путь $2\pi R$, а левая — $2\pi(R + 0{,}1)$, где R — радиус этого круга в метрах. Разность $2\pi(R + 0{,}1) - 2\pi R = 2\pi\, 0{,}1$ т. е. 0,62 м, или 620 мм, составилась из разницы между длиною левого и правого шага, повторенной столько раз, сколько сделано было шагов. Из плана (рис. 117) видно, что путники наши описывали круги диаметром, примерно 3,5 км, т. е. длиною около 10 000 м. При средней длине шага 0,7 м, на протяжении этого пути было сделано

$$\frac{10\,000}{0{,}7} = 14000 \text{ шагов;}$$

из них 7 000 правой ногой и столько же — левой. Итак, мы узнали, что 7000 «левых» шагов больше 7000 «правых» шагов на 620 мм. Отсюда один «левый» шаг длиннее одного «правого» на $\frac{620}{7000}$ мм, или менее чем 0,1 мм. Вот какая ничтожная разница достаточна, чтобы вызвать столь поражающий результат!

Радиус того круга, который блуждающий описывает, зависит от разности длины «правого» и «левого» шага. Эту зависимость не трудно установить. Число шагов, сделанных на протяжении одного круга, при длине шага 0,7 м, равно $\frac{2\pi R}{0{,}7}$ где R — радиус круга; из них «левых» шагов $\frac{2\pi R}{2 \times 0{,}7}$ и столько же «правых». Умножив это число на величину x разности длины шагов, получим разность длины тех концентрических кругов, которые описаны левой и правой ногами, т. е.

$$\frac{2\pi Rx}{2 \times 0{,}7} = 2\pi \times 0{,}1 \text{ или } Rx = 0{,}14 \text{ м.}$$

По этой простой формуле легко вычислить радиус круга, когда известна разность шагов, и обратно. Например, для участников опыта на площади Марка в Венеции мы можем установить наибольшую величину радиуса кругов, описанных ими при ходьбе. Действительно, так как ни один не дошел до фасада ***DE*** здания (рис. 116), то по «стрелке» AC = 41 м и хорде BC, не превышающей 175 м, можно вычислить максимальный радиус дуги AB. Он определяется из равенства

$$2R = \frac{\overline{BC}^2}{AC} = \frac{175^2}{41} = \frac{30\,600}{41} = 750 \text{ м,}$$

откуда R максимальный радиус, будет около 370 м.

Зная это, мы из полученной раньше формулы Rx = = 0,14 определяем наименьшую величину разности длины шагов:

$$370x = 0{,}14, \text{ откуда } x = 0{,}4 \text{ мм.}$$

Итак, разница в длине правых и левых шагов у участников опыта была не менее 0,4 мм.

Иногда приходится читать и слышать, что факт кружения при ходьбе вслепую зависит от различия в длине правой и левой ног: так как левая нога у большинства людей длиннее правой, то люди при ходьбе должны неизбежно уклоняться вправо от прямого направления. Такое объяснение основано на геометрической ошибке. Важна разная длина шагов, а не ног. Из рис. 120 ясно, что и при наличии заметной разницы в длине ног можно все же делать строго одинаковые шаги, если выносить при ходьбе каждую ногу на одинаковый угол (треугольники ABC налево, и CBA, направо, равны). Наоборот, при строго одинаковой длине ног шаги могут быть разной длины, если одна нога дальше выносится при ходьбе, нежели другая.

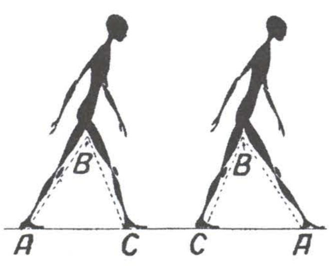


Рис. 120.

По сходной причине лодочник, гребущий правой рукой сильнее, чем левой, должен неизбежно увлекать лодку по кругу, загибая в левую сторону. Животные, делающие неодинаковые шаги правыми или левыми ногами или неравной силы взмахи правым и левым крылом, также должны двигаться по кругам всякий раз, когда лишены возможности контролировать прямолинейное направление зрением. Здесь также достаточно весьма незначительной разницы в силе рук, ног или крыльев.

При таком взгляде на дело указанные раньше факты утрачивают свою таинственность и становятся вполне естественными. Удивительно было бы, если бы люди и животные, наоборот, могли выдерживать прямое направление, не контролируя его глазами. Ведь необходимым условием этого является безукоризненная, строго геометрическая симметрия тела, абсолютно невозможная для произведения живой природы. Малейшее же уклонение от математически совершенной симметрии должно повлечь за собою, как необходимое следствие, движение по дуге. Чудо не то, чему мы здесь удивляемся, а то, что мы готовы были считать естественным.

Невозможность держаться прямого пути не составляет для человека существенной помехи; компас, дороги, карты спасают его в большинстве случаев от последствий этого недостатка.

Не то у животных, особенно у обитателей пустынь, степей, безграничного морского простора: для них несимметричность тела, заставляющая их описывать круги вместо прямых линий, — важный жизненный фактор. Словно невидимой цепью приковывает он их к месту рождения, лишая возможности удалиться от него сколько-нибудь значительно. Лев, отважившийся уйти подальше в пустыню, неизбежно возвращается обратно. Чайки, покидающие родные скалы для полета в открытое море, не могут не возвращаться к гнезду (тем загадочнее, однако, далекие перелеты птиц, пересекающих по прямому направлению материки и океаны.)

274. ИЗМЕРЕНИЕ ГОЛЫМИ РУКАМИ

Майн Ридовский мальчик мог успешно разрешить свою геометрическую задачу только потому, что незадолго до плавания измерил свой рост и твердо помнил результаты измерения. Хорошо бы каждому из нас обзавестись таким «живым аршином», чтобы в случае нужды пользоваться им для измерения. Полезно также помнить, что у большинства людей расстояние между концами расставленных рук равно росту (рис. 121), — правило, подмеченное гениальным художником и ученым Леонардо да Винчи: оно позволяет пользоваться нашими живыми аршинами удобнее, чем делал это мальчик у Майн Рида. В среднем, высота взрослого человека (славянской расы) около 1,7 метра, или 170 сантиметров; это легко запомнить. Но полагаться на среднюю величину не следует: каждый должен измерить свой рост и размах своих рук.

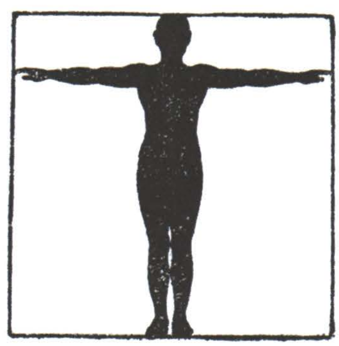


Рис. 121. Правило Леонардо да Винчи.

Для отмеривания — без масштаба — мелких расстояний следует помнить длину своей «четверти», т. е. расстояние между концами расставленных большого пальца и мизинца. У взрослого мужчины оно составляет око-

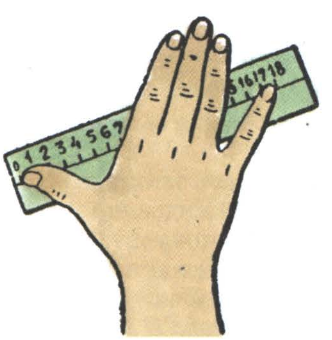


Рис. 122. «Четверть»

ло 18 см — примерно ¼ аршина (откуда и название: «четверть»); но у людей молодых оно меньше и медленно увеличивается с возрастом (до 25 лет). Далее, для этой же цели полезно измерить и запомнить длину своего указательного пальца, считая ее двояко: от основания среднего пальца (рис. 123) и от основания большого. Точно также должно быть известно вам наибольшее расстояние между концами указательного и среднего пальцев, — у взрослых около 10 см. (рис. 124). Надо, наконец, знать и ширину своих пальцев.

Вооруженные всеми этими сведениями, вы сможете довольно удовлетворительно выполнять разнообразные измерения буквально голыми руками, даже и в темноте.

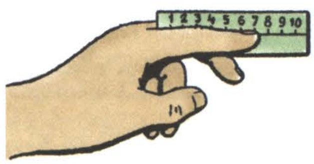


Рис. 123.

Пример такого измерения представлен на рис. 125: здесь измеряется пальцами окружность стакана. Исходя из средних величин, можно сказать, что окружность изображенного на рисунке стакана равна 18 + 5, т. е. 23 см.

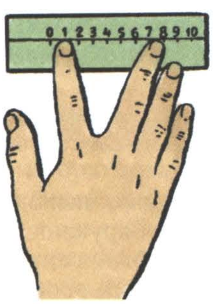


Рис. 124.

Рис. 125.

275. ПРЯМОЙ УГОЛ В ТЕМНОТЕ

Задача № 47

Возвращаясь еще раз к Майн Ридовскому математику, поставим себе задачу: как следовало ему поступить, чтобы надежным образом получить прямой угол? «Я приставил к ней (к выступающей планке) длинный прут так, чтобы он образовал с ней прямой угол», — читаем мы в романе. Сделав это в темноте, полагаясь только на мускульные ощущения, мы можем ошибиться довольно крупно. Однако у мальчика в его положении было средство построить прямой угол гораздо более надежным приемом. Каким?

Решение

Надо воспользоваться теоремой Пифагора и построить из планок треугольник, придав его сторонам такую длину, чтобы треугольник получился прямоугольный. Проще всего взять для этого планки длиною в 3, в 4 и в 5 каких-либо произвольно выбранных равных отрезков, — например, ширины ладони (рис. 126).

Это — старинный египетский способ, которым пользовались в стране пирамид несколько тысячелетий

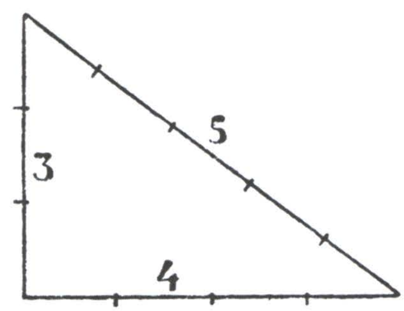


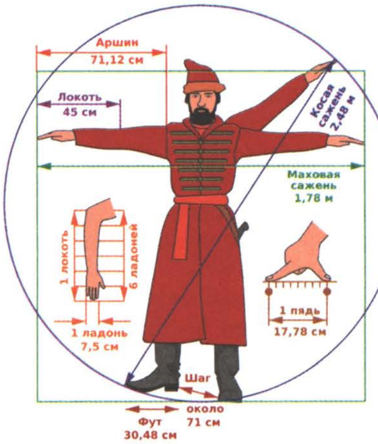
Рис. 126.

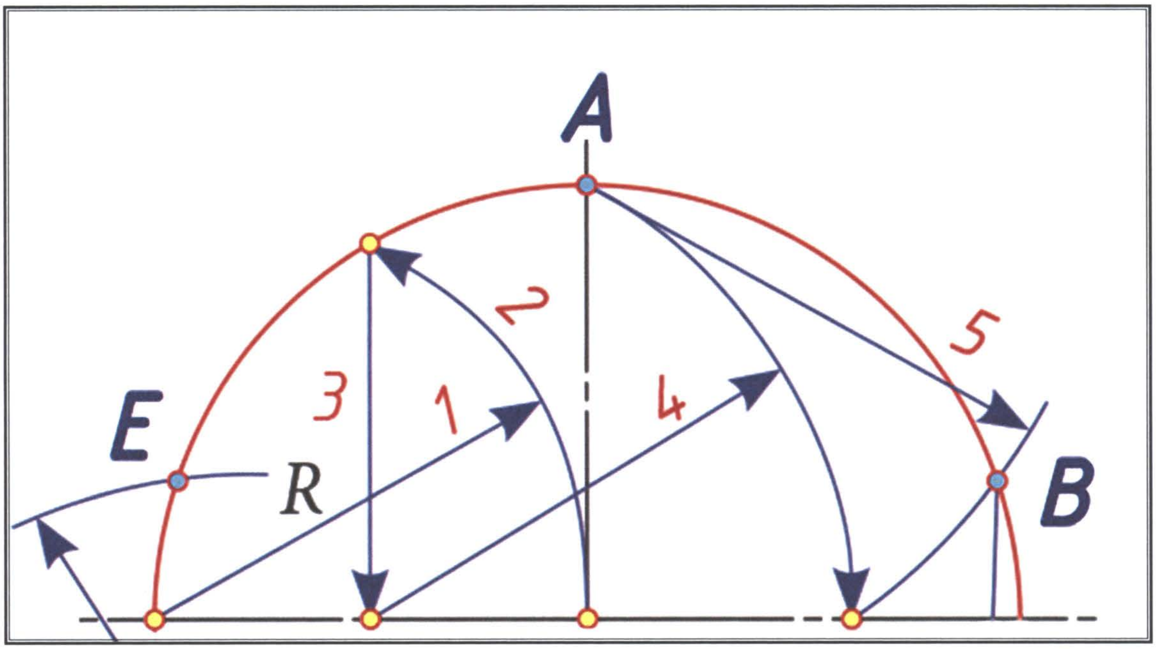
тому назад. Впрочем, еще и в наши дни при строительных работах зачастую прибегают к тому же приему.

Идея использования частей тела человека для измерений возникла, видимо, с возникновением первых людей на земле. Все мы знаем знаменитую на весь мир Имперскую систему единиц измерения. Существуют исторические легенды, показывающие, что ее возникновение основывалось на размерах частей тела человека. Причем его имя история сохранила. Это английский король Генрих I (1100-1135), который прекратил бесчисленные вариации с английским ярдом и узаконил его, как 0,9144 м. Сам ярд возник как расстояние от кончика царственного носа до кончика среднего пальца вытянутой в сторону руки его, Генриха, предшественников. А так как предшественники были весьма «разнокалиберными», то и ярд все время менялся....

Аналогичная ситуация произошла с футом. Как известно, фут по-английски означает ногу. Длина стопы так же стала эталоном длины и в настоящее время равняется 0,3048 м.

А что же с русскими единицами длины? Они также основывались на всевозможных размерах частей тела человека. Возьмем, например, локоть. Его длина определялась как расстояние от кончика среднего пальца руки до локтя. А вот и менее знакомая мера — сажень. Она равняется расстоянию между кончиками средних пальцев обеих рук, расставленных горизонтально. Была также и косая сажень, измеряемая по диагонали от кончика среднего пальца вытянутой руки, например правой, до кончика большого пальца противоположной ноги, в данном случае — левой.





276. ПРАКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ ЕГИПТЯН И РИМЛЯН

Любой школьник вычисляет теперь длину окружности по диаметру гораздо точнее, чем мудрейший жрец древней страны пирамид или самый искусный архитектор великого Рима. Древние египтяне считали, что окружность длиннее диаметра в 3,16 раза, а римляне, – в 3,12, между тем правильное отношение – 3,14159... Египетские и римские математики определили отношение окружности к диаметру не строгим геометрическим расчетом, как позднейшие математики, а нашли его просто из опыта. Но почему получились у них такие ошибки? Разве не могли они обтянуть какую-нибудь круглую вещь ниткой и затем, выпрямив нитку, просто измерить ее?

Без сомнения, они так и поступали; но не следует думать, что подобный способ должен непременно дать хороший результат. Вообразите, например, вазу с круглым дном диаметром в 100 мм. Его окружность должна равняться 314 мм. Однако на практике, измеряя ниткой, вы едва ли получите эту длину: легко ошибиться на один миллиметр, и тогда «π» окажется равным 3,13 или 3,15. А если примете во внимание, что и диаметр вазы нельзя измерить вполне точно, что и здесь ошибка в 1 мм весьма вероятна, то убедитесь, что для π получаются довольно широкие пределы между

$$\frac{313}{101} \text{ и } \frac{315}{99}$$

т, е., в десятичных дробях, между

3,09 и 3,18.

Вы видите, что, определяя указанным способом, мы можем получить результат, не совпадающий с 3,14: один раз 3,1, в другой 3,12, в третий 3,17 и т. п. Случайно окажется среди них и 3,14, но в глазах вычислителя это число не будет иметь больше веса, чем другие.

Теперь становится более понятным, почему древний мир не знал правильного отношения длины окружности к диаметру, и понадобился гений Архимеда, чтобы найти для π значение $3\,{}^1\!/_7$, найти без всяких измерений, одним лишь рассуждением.

277. «ЧТО Я ЗНАЮ О КРУГАХ»

В «Алгебре» древнего арабского математика Магомета-бен-Муза о вычислении длины окружности читаем такие строки:

«Лучший способ – это умножить диаметр на $3\,{}^1\!/_7$. Это самый скорый и самый легкий способ. Богу известно лучшее».

Теперь мы знаем, что Архимедово число, $3\,{}^1\!/_7$, не вполне точно выражает отношение окружности к диаметру. Теоретически доказано, что отношение это вообще не может быть выражено никаким дробным числом. Мы можем написать его лишь с тем или иным приближением, – впрочем, далеко превосходящим точность, необходимую для самых строгих требований практической жизни. Математик XVI в. Лудольф, в Лейдене, имел терпение вычислить его с 35 десятичными знаками и завещал вырезать это значение для π [1] на его могильном памятнике.

Вот оно:

3,14159265358979323846264338327950288.

Я знаю его наизусть до 31-й цифры и всегда могу повторить, хотя и не обладаю сверхъестественной памятью. Дело просто: немцы придумали стихотворение, слова которого подобраны так, что числа букв в них отвечают последовательно цифрам этого длинного ряда. Для знающих по-немецки привожу здесь этот единственный в своем роде образчик геометрической поэзии или поэтической геометрии:

[1] Тогда еще это обозначение (π) не было в употреблении: оно введено лишь с середины XVIII в. знаменитым математиком Эйлером.

„Wie o dies π
Macht ernstlich so vielen viele Müh!
Lernt immerhin, Jünglinge, leichte Verselein,
Wie so zum Beispiel dies dürfte zu merken sein“.

На практике пользоваться таким громоздким π никогда не приходится. Даже если бы мы пожелали вычислить длину земного экватора с точностью до 1 см, предполагая, что знаем длину его диаметра вполне точно, – нам достаточно было бы взять всего с 9 цифрами после запятой. А взяв вдвое больше цифр (18), мы могли бы вычислить длину окружности, имеющей радиусом расстояние от Земли до Солнца, — с погрешностью не свыше 0,0003 мм (волос в сто раз толще этой возможной ошибки!). И правильно замечает по этому поводу французский астроном Араго, что «в смысле точности мы ничего не выиграли бы, если бы между длиною окружности и диаметром существовало отношение, выражающееся числом вполне точно» [1].

Для обычных вычислений с π вполне достаточно запомнить два знака после запятой (3,14), а для более точных — четыре знака (3,1416: берем 6 вместо 5, потому что далее следует цифра больше 5). Первые 6 слов приведенного раньше немецкого четверостишия помогли бы нам запомнить число 3,14159. Хорошо бы, конечно, придумать подходящие русские стихи. Не отваживаясь на это, позволю себе предложить прозаическую фразу:

3	1	4	1	6
что	я	знаю	о	кругах

– вопрос, скрыто заключающий в себе ответ: 3,1416.

278. БРОСАНИЕ ИГЛЫ

Самый оригинальный и неожиданный способ для приближенного вычисления числа π состоит в следующем.

Запасаются короткой (сантиметра два) швейной иглой, – лучше с отломанным острием, чтобы игла была равномерной толщины, – и проводят на листе бумаги ряд тонких параллельных линий, отделенных одна от другой расстоянием, вдвое больше длины иглы. Затем роняют с некоторой (произвольной) высоты иглу на бумагу и замечают, пересекает ли игла одну из линий, или нет (черт. 127). Чтобы при падении игла не подпрыгивала, подкладывают под бумажный лист пропускную бумагу, или сукно. Бросание иглы повторяют много раз, например, сто или, еще лучше, тысячу, каждый раз отмечая, было ли пересечение [2]. Если потом разделить общее число падений иглы на число случаев, когда замечено было пересечение, то в результате должно получиться число π, — конечно, более или менее приближенно.

Рис. 127.

Объясним, почему так получается. Пусть вероятнейшее число пересечений иглы равно K, а длина нашей иглы — 20 мм. В случае пересечения точка встречи должна, конечно, лежать на каком-либо из этих миллиметров, и ни один из них, ни одна часть иглы, не имеет в этом отношении никаких преимуществ перед другими. Поэтому вероятнейшее число пересечений каждого отдельного миллиметра равно $\frac{K}{20}$. Для участка иглы 3 мм оно равно $\frac{3K}{20}$, для участка в 11 мм – $\frac{11K}{20}$ и т. д. Иначе говоря, вероятнейшее число пересечений прямо пропорционально длине иглы.

Эта пропорциональность сохраняется и в том случае если игла согнута. Пусть мы согнули нашу иглу в форме фиг. II рис. 128, причем участок AB = 11 мм, а BC = 9 мм. Для части AB вероятнейшее число пересечений – $\frac{11K}{20}$, а для $BC = \frac{9K}{20}$, для всей же иглы $\frac{11K}{20} + \frac{9K}{20}$, т. е. по прежнему равно K. Мы можем изогнуть иглу более затейливым образом (фиг. III, рис. 128), – число пересечений от этого также не изменилось бы. (Заметьте, что при изогнутой игле возможны пересечения черты двумя и более частями иглы сразу; такое пересечение надо, конечно, считать за 2, за 3 и т. д., потому что одно зачислялось при подсчете пересечений для одной части иглы, второе – для другой и т. д.)

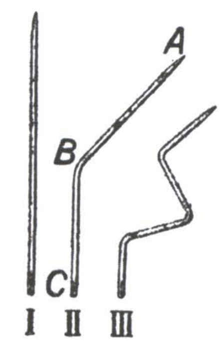


Рис. 128.

Вообразите же теперь, что мы бросаем иглу, изогнутую в форме окружности с диаметром, равным расстоянию между чертами (т. е. ровно вдвое большим, чем наша игла). Такое кольцо каждый раз должно дважды пересечь какую-нибудь черту (или по одному разу коснуться двух линий, – во всяком случае, получаются 2 встречи). Если общее число бросаний N, то число встреч — $2N$. Наша прямая игла меньше этого кольца по длине во столько раз, во сколько полудиаметр меньше длины окружности, т. е. в 2π раз. Но мы уже установили, что вероятнейшее число пересечений пропорционально длине иглы. Поэтому вероятнейшее число пересечений нашей иглы (K) должно быть меньше $2N$ в 2π раза, т. е. равно $\frac{N}{\pi}$.

Отсюда: $$\pi = \frac{\text{числу бросаний}}{\text{число пересечений}}.$$

[1] Тем не менее, математики затратили много труда, чтобы получить для π возможно больше знаков. Математик Шенке в 1873 г. опубликовал π с 707 десятичными знаками!

[2] Пересечением надо считать и тот случай, когда игла только упирается концом в зачерченную линию.

Чем большее число падений наблюдалось, тем точнее получается выражение для π. Один швейцарский астроном, Р. Вольф, в середине прошлого века наблюдал 5 000 падений иглы на разграфленную бумагу и получил для π число 3,159..., – выражение, впрочем, менее точное, чем Архимедово число.

Как видите, отношение длины окружности к диаметру находят здесь опытным путем, причем – всего любопытнее – не чертят ни круга, ни диаметра, т. е. обходятся без циркуля. Человек, не имеющий никакого представления о геометрии и даже о круге, может тем не менее определить по этому способу число если терпеливо проделает весьма большое число бросаний иглы.

279. ВЫПРЯМЛЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

Задача № 48

Выпрямить данную окружность – значит начертить Такую прямую линию, длина которой равна длине этой окружности. Если бы π можно было выразить дробным числом, то такое построение легко было бы выполнить вполне точно: мы отложили бы диаметр на прямой линии π раз. Но так как число π выражается только приближенно, то и выпрямление окружности выполнимо лишь с тем или иным приближением. Для многих практических целей вполне достаточно взять для π число $3^1/_7$ и выпрямить окружность, отложив ее диаметр $3^1/_7$ раза(деление отрезка на 7 равных частей можно выполнить, как известно, вполне точно). Существуют и другие приближенные способы выпрямления окружности, применяемые на практике при ремесленных работах – столярами, жестянщиками и т. п. Мы не будем здесь рассматривать их, а укажем лишь один довольно простой способ выпрямления, дающий результат с чрезвычайно большой точностью.

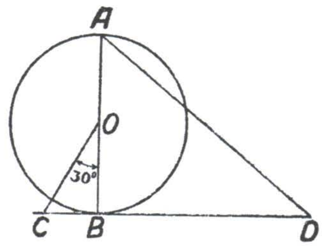


Рис. 129.

Если нужно выпрямить (рис. 129) окружность O, то проводят диаметр AB, а в точке B – перпендикулярную к ней прямую CB. Из центра O под углом 30° к AB проводят прямую OC. Затем от точки C откладывают 3 радиуса данной окружности и соединяют полученную точку D с A: прямая AD равна длине полуокружности. Ошибка менее 0,0002.

На чем основано это построение?

Решение

По теореме Пифагора,

$$\overline{CB}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2.$$

Обозначив радиус OB через r и имея в виду, что $CB = \frac{OC}{2}$,

как катет, лежащий против угла в 30°, получаем

$$\overline{CB}^2 + r^2 = 4\overline{CB}^2,$$

откуда

$$CB = \frac{r\sqrt{3}}{3}$$

Далее, в треугольнике ABD

$$BD = CD - CB = 3r - \frac{r\sqrt{3}}{3}$$

$$AD = \sqrt{\overline{BD}^2 + 4r^2} = \sqrt{\left(3r - \frac{r\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4r^2} =$$

$$= \sqrt{9r^2 - 2r^2\sqrt{3} + \frac{r^2}{3} + 4r^2} =$$

$$= 3{,}14153$$

Сравнив этот результат с тем, который получается, если взять π с большой степенью точности (π = = 3,141593...), мы видим, что разница составляет всего 0,00006 м. Если бы мы по этому способу выпрямляли окружность радиусом в 1 м, то ошибка составляла бы для полуокружности всего 0,00006 м, а для полной окружности — 0,00012 м, или 0,12 мм (примерно толщина волоса).

280. КВАДРАТУРА КРУГА

Как нельзя совершенно точно выпрямить окружность, так невозможно и построить квадрат, площадь которого в точности равнялась бы площади данного круга. Однако для практических целей вполне достаточно приближенное построение. Рассмотрим здесь одно из таких приближенных решений задачи о квадратуре круга, очень удобное для надобностей практической жизни.

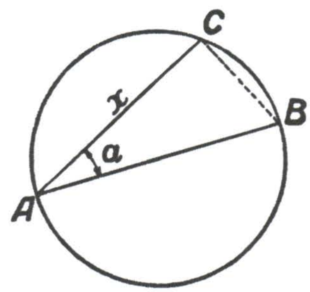


Рис. 130.

Способ этот состоит в том, что вычисляют (рис. 130) угол a, под которым надо провести к диаметру AB хорду $AC = x$, являющуюся стороною искомого квадрата. Чтобы узнать величину этого угла, придется обратиться к тригонометрии:

$$\cos a = \frac{AC}{AB} = \frac{x}{2r}, \text{ где } r \text{ – радиус круга.}$$

Значит, сторона искомого квадрата $x = 2r\cos a$, площадь же его $= 4r^2\cos^2 a$. С другой стороны, площадь квадрата равна площади πr^2 данного круга. Следовательно,

$$4r^2\cos^2 a = \pi r^2,$$

откуда

$$\cos^2 a = \frac{\pi}{4}, \quad \cos a = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 0{,}886.$$

По таблицам находим

$$a = 27°\,36'.$$

Итак, проведя в данном круге хорду под углом 27° 36′ к диаметру, мы сразу получаем сторону квадрата, площадь которого равна площади данного круга. Практически делают так, что заготовляют чертежный треугольник [1], один из острых углов которого 27° 36′ (а другой – 66° 24′). Располагая таким треугольником, можно для каждого данного круга сразу находить сторону равновеликого ему квадрата.

Для желающих изготовить себе такой чертежный треугольник полезно следующее указание.

Так как тангенс угла 27° 36′ равен 0,523 или $\frac{23}{44}$ то катеты такого треугольника относятся как 23 : 44. Поэтому, изготовив треугольник, один катет которого, например, 22 см, а другой 11,5 см, мы будем иметь то, что требуется. Само собою разумеется, что таким треугольником можно пользоваться и как обыкновенным чертежным.

281. ПОСТРОЕНИЕ БЕЗ ЦИРКУЛЯ

При решении геометрических задач на построение обычно пользуются линейкой и циркулем. Мы сейчас увидим, однако, что иной раз удается обходиться без циркуля в таких случаях, где на первый взгляд он представляется совершенно необходимым.

Задача № 49

Из точки А (рис. 131), лежащей вне полуокружности, опустить на ее диаметр перпендикуляр, обходясь при этом без циркуля. Положение центра полуокружности не указано.

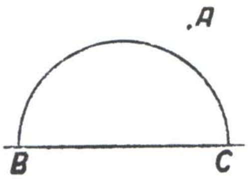


Рис. 131.

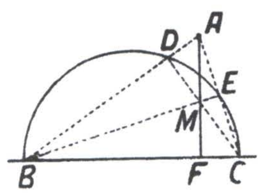


Рис. 132.

Решение

Нам пригодится здесь то свойство треугольника, что все высоты его пересекаются в одной точке. Соединим *A* с *B* и *C*; получим точки *D* и *E* (рис. 132). Прямые *BE* и *CD* очевидно, высоты треугольника *ABC*. Третья высота – искомый перпендикуляр на *BC* – должна проходить через точку пересечения двух других, т. е, через *M*. Проведя по линейке прямую через точки *A* и *M*, мы выполним требование задачи, не прибегая к услугам циркуля. Если бы точка была расположена, как на рис. 133, где искомый перпендикуляр падает на продолжение диаметра, то задача была бы разрешима лишь при условии, что дан не полукруг, а полная окружностъ. Чертеж 134 показывает, что решение по существу не отличается от того, с которым мы уже знакомы; только высоты треугольника *ABC* пересекаются здесь не внутри, а вне его.

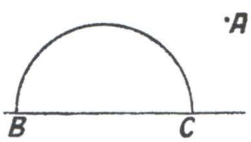


Рис. 133.

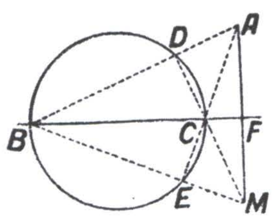


Рис. 134.

282. ЗАДАЧА НАПОЛЕОНА

Сейчас мы занимались построением, выполняемым помощью одной лишь линейки, не обращаясь к циркулю. Рассмотрим теперь несколько задач, в которых вводится обратное ограничение: запрещается пользоваться линейкой, а все построения нужно выполнить только циркулем. Одна из таких задач заинтересовала Наполеона I (бывшего, как известно, способным математиком). Прочтя книгу о таких построениях итальянского ученого Маскерони, он предложил французским математикам следующую задачу.

Задача № 50

Данную окружность разделить на 4 равные части, не прибегая к линейке. Положение центра окружности дано.

Решение

Пусть требуется разделить на 4 части окружность *O* (рис. 135). От произвольной точки *A* откладываем по окружности три раза радиус круга: получаем точки *B*, *C* и *D*. Легко видеть, что расстояние *AC* — хорда дуги, составляющей ⅓ окружности, — сторона вписанного равностороннего треугольника и, следовательно, равно $r\sqrt{3}$, где *r* — радиус окружности. *AD* — очевидно, диаметр окружности. Из точек *A* и *D* радиусом, равным *AC*, засекаем дуги, пересекающиеся в точке *M*.

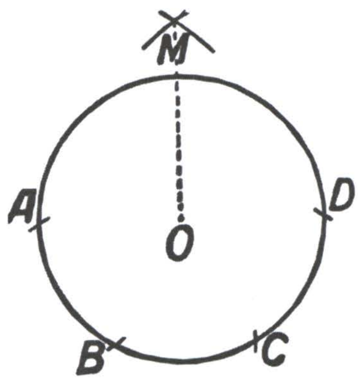


Рис. 135.

Покажем, что расстояние *MO* равно стороне квадрата, вписанного в нашу окружность. В треугольнике *AMO* катет $MO = \sqrt{\overline{AM}^2 - \overline{AO}^2} = \sqrt{3r^2 - r^2} = r\sqrt{2}$ т. е. стороне вписанного квадрата. Теперь остается только отложить по окружности расстояние *MO*, чтобы получить вершины вписанного квадрата, которые, очевидно, разделят окружность на 4 равные части.

Задача № 51

Вот другая, более легкая задача в том же роде.

Без линейки увеличить расстояние между данными точками (рис. 136) в 5 раз, – вообще, в заданное число раз.

Рис. 136.

[1] Этот удобный способ был предложен в 1836 г. русским инженером Бингом; упомянутый чертежный треугольник носит, по имени изобретателя, название «треугольник Бинга».

Решение

Из точки B радиусом AB описываем окружность (рис. 137). По этой окружности откладываем от точки A расстояние AB три раза: получаем точку C, очевидно, диаметрально противоположную A. Расстояние AC представляет собой двойное расстояние AB. Проведя окружность из C радиусом BC, мы можем таким же образом найти точку, диаметрально противоположную B и, следовательно, удаленную от A на тройное расстояние AB, – и т. д.

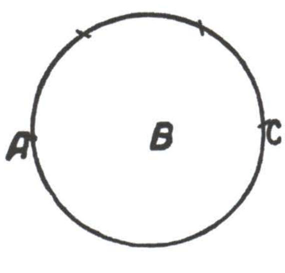


Рис. 137.

Кажется, один из героев Жюля Верна подсчитывал, какая часть его тела прошла более длинный путь за время его кругосветных странствований – голова или ноги. Это очень поучительная геометрическая задача, если поставить вопрос более определенным образом. Мы предложим ее в таком виде.

283. ГОЛОВА ИЛИ НОГИ?

Задача № 52

Вообразите, что вы обошли земной шар по экватору. Насколько при этом верхушка вашей головы прошла более длинный путь, чем кончик вашей ноги?

Решение

Ноги прошли путь $2\pi R$, где R – радиус земного шара. Верхушка же головы прошла при этом $2\pi\,(R + 1{,}7)$, где 1,7 м – рост человека. Разность путей равна $2\pi\,(R + 1{,}7) - 2\pi R = 10{,}7$ м. Итак, голова прошла путь на 10,7 м больше, чем ноги.

Любопытно, что в окончательный ответ не входит радиус земного шара. Поэтому результат получится одинаковый и на Земле, и на Юпитере, и на самой мелкой планетке. Вообще, разность двух концентрических окружностей не зависит от их радиуса, а только от расстояния между ними. Прибавка одного сантиметра к радиусу земной орбиты увеличила бы ее длину ровно на столько же на сколько удлинится от такой же прибавки радиуса окружность медного пятака.

На этом геометрическом парадоксе [1] основана следующая любопытная задача, фигурирующая во многих сборниках геометрических развлечений.

Если обтянуть земной шар по экватору проволокой и затем прибавить к ее длине 1 м, то сможет ли между проволокой и землей проскользнуть мышь?

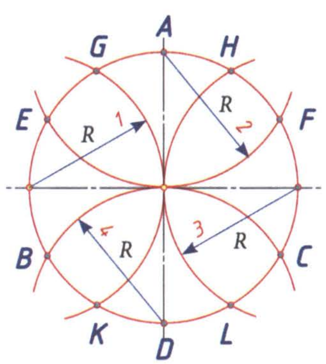
Обычно отвечают, что промежуток будет тоньше волоса: что значит один метр по сравнению с 40 миллионами метров земного экватора! В действительности же величина промежутка равна

$$\frac{100}{2\pi} = 16 \text{ см}$$

Не только мышь, но и самый крупный кот проскочит в такой промежуток.

[1] Парадоксом называется истина, кажущаяся неправдоподобной, – в отличие от софизма – ложного положения, имеющего видимость истинного.

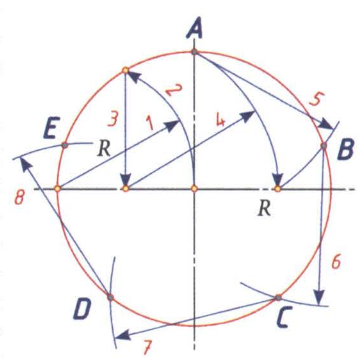
Задача разделения окружности на n частей весьма актуальна и часто встречается в повседневной практике. Правда сегодня она решается с помощью компьютеризированных прецизионных станков, например, когда речь не идет об изготовлении зубчатых колес для точных механизмов.



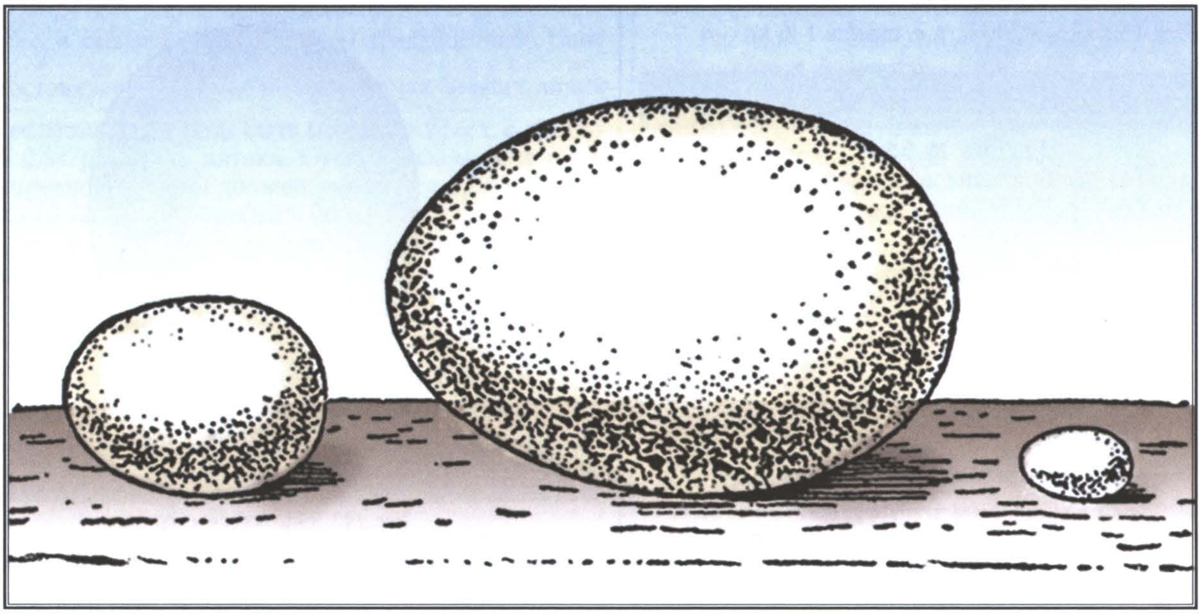
Однако есть много случаев, когда особая точность не нужна. Очень часто мы видим в парках геометрическим образом организованные клумбы, где по кругу высаживаются декоративные растения. Или мы затеяли у себя на дачном участке изготовить солнечные часы. На самом деле таких случаев много.

Для того, чтобы разбить окружность на 3, 6 и 12 часов, что соответствует последней задаче, надо провести в окружности два ее взаимно перпендикулярных диаметра. Далее из четырех точек пересечения диаметров с окружностью провести дуги радиусом равным радиусу вашей окружности. Вместе с первоначальными четырьмя, полученные 4 пары новых точек разделят нашу окружность на 12 равных частей. Получим циферблат солнечных часов.

Теперь, если оставить только точки, соответствующие 12, 2, 4, 6, 8 и 10 часам, мы получим окружность, разделенную на 6 частей. И если далее сокращать число точек, оставив только точки соответствующие 12, 4 и 8 часу, то наша окружность окажется разделенной на три равные части.



Не так очевиден способ деления окружности на 5 равных частей. Для этого из точки окружности на 9 часов проводят радиусом окружности дугу до пересечения с ней самой, например вверх. Из полученной новой точки на окружности, обозначим ее A, опускают перпендикуляр на горизонтальный диаметр окружности. Получим точку B. Затем радиусом точка B – точка соответствующая 12 часам проводим еще одну дугу до пересечения с горизонтальным диаметром. Назовем эту точку C. Мы получили хорду окружности 12 часов – C, откладывая которую по окружности, можно будет разделить ее на 5 равных частей.



284. УВЕЛИЧЕНИЕ В ТЫСЯЧУ РАЗ

Узнать, что больше и что меньше, очень просто в арифметике, когда вопрос поставлен о числах. Но не всегда легко разрешить подобный вопрос в геометрии, где приходится сравнивать не числа, а поверхности и объемы. Впрочем, в арифметике мы не всегда представляем себе отчетливо те числа, о которых говорим. Мало кто, например, имеет ясное представление о таких числовых исполинах, как миллион или биллион.

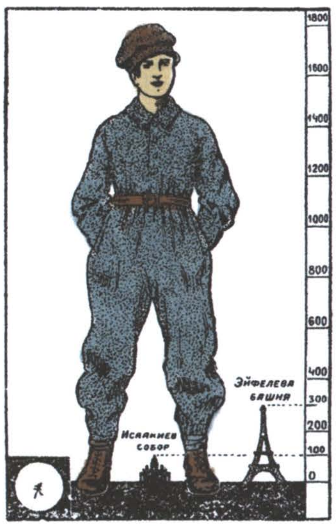


Рис. 138. Человек и бацилла тифа (внизу налево), увелич. в 1 000 раз.

Даже и более скромные числа рисуются в нашем воображении довольно смутно. Что представляете вы себе, когда вам говорят о микроскопе, увеличивающем в 1 000 раз. Не такое уж большое число тысяча, а между тем тысячекратное увеличение понимается далеко не всеми так, как надо. Мы не умеем оценивать истинной малости тех предметов, которые видим в поле микроскопа при подобном увеличении. Бактерия тифа, увеличенная в 1 000 раз, кажется нам величиной с мошку на расстоянии ясного зрения. Но как мала эта бактерия на самом деле? Едва ли вы представляете себе, что если бы вы сами были увеличены во столько же раз, рост ваш достигал бы 1 700 м.! Голова была бы выше облаков, а Эйфелева башня (300 м) приходилась бы вам гораздо ниже колен. Во сколько раз вы меньше этого воображаемого исполина, во столько раз бацилла мельче крошечной мошки.

285. ДВЕ БАНКИ

Еще хуже представляем мы себе большое и малое в геометрии, Каждый, не задумываясь, ответит, что 5 кг варенья больше, чем три килограмма его, но не всякий сразу скажет, которая больше из двух банок, стоящих на столе.

Задача № 53

Попробуйте в самом деле решить задачу: какая из двух банок (черт. 139) вместительнее – правая, широкая, или левая, втрое более высокая, но вдвое более узкая?

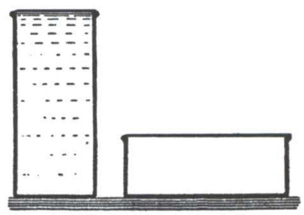


Рис. 139.

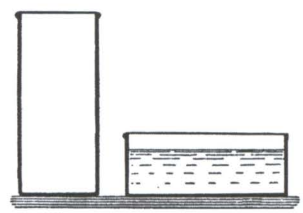


Рис. 140.

Решение

Для многих, вероятно, будет неожиданностью, что в данном случае высокая банка менее вместительна, нежели широкая. Между тем, легко удостовериться в этом расчетом. Площадь основания у широкой банки в 2×2, т. е. в 4 раза больше, чем у узкой; высота же ее всего в 3 раза меньше. Значит, объем широкой банки в $^4/_3$ раза больше, чем узкой. Если содержимое высокой перелить в широкую, оно заполнит лишь $^3/_4$ ее (рис. 140).

286. ИСПОЛИНСКАЯ ПАПИРОСА

Задача № 54

В витрине табачного треста выставлена огромная папироса, в 15 раз длиннее и толще обыкновенной. Если на набивку одной папиросы нормальных размеров нужно полграмма табаку, то сколько понадобилось, чтобы набить исполинскую папиросу в витрине?

Решение

½ × 15 × 15 ×15 = 1 700 г., т. е. свыше 1 ½ кг.

287. ЯЙЦО СТРАУСА

Задача № 55

На рис. 141 изображены в одинаковом масштабе яйцо курицы (направо) и яйцо страуса (налево). Всмотритесь в рисунок и скажите, во сколько раз содержимое страусового яйца больше куриного. При беглом взгляде кажется, что разница не может быть весьма велика. Тем поразительнее результат, получаемый правильным геометрическим расчетом.

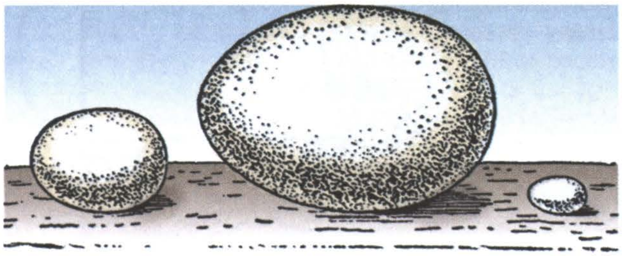


Рис. 141. Яйца страуса, эпиорниса и курицы (в уменьш. масштабе).

Решение

Непосредственным измерением на чертеже убеждаемся, что яйцо страуса длиннее куриного в 2½ раза. Следовательно, объем страусового яйца больше объема куриного в

$$2½ \times 2½ \times 2½ = \frac{125}{8},$$

т. е. около 15 раз.

Одним таким яйцом могла бы позавтракать семья из 5 человек, считая, что каждый удовлетворяется яичницей из трех яиц.

288. ЯЙЦО ЭПИОРНИСА

Задача № 56

На Мадагаскаре водились некогда огромные страусы-эпиорнисы, клавшие яйца длиною в 28 см (средняя фигура рис. 141). Между тем, куриное яйцо имеет в длину 5 см. Скольким же куриным яйцам соответствует по объему одно яйцо мадагаскарского страуса?

Решение

Перемножив $\frac{28}{5} \times \frac{28}{5} \times \frac{28}{5}$, получаем около 170. Одно яйцо эпиорниса равно чуть не двумстам куриных яиц! Более полусотни человек могло бы позавтракать одним таким яйцом, вес которого, как не трудно рассчитать, равнялся 8–9 кг.

289. ЯЙЦА РУССКИХ ПТИЦ

Задача № 57

Самый резкий контраст в размерах получится, однако, тогда, когда обратимся к нашей родной природе и сравним яйца лебедя-шипуна и желтоголового королька, миниатюрнейшей из всех русских птичек. На прилагаемом рис. 142 контуры этих яиц изображены в натуральную величину.

Рис. 142. Яйцо лебедя и королька. Во сколько раз одно больше другого по объему?

Каково отношение их объемов?

Решение

Измерив длину обоих яиц, получаем 125 мм и 13 мм Измерив также и их ширину, имеем 95 мм и 9 мм. Легко видеть, что эти числа близки к пропорциональности: проверяя пропорцию

$$\frac{125}{95} = \frac{13}{9}$$

сравнением произведений крайних и средних ее членов, имеем

1 125 и 1135, –

числа мало разнящиеся. Отсюда заключаем, что, приняв эти яйца за тела, геометрически подобные, мы не сделаем большой погрешности. Поэтому отношение их объемов равно

$$\frac{95^3}{9^3} = \frac{857000}{730} = 1\,200.$$

Итак, яйцо лебедя в 1 200 раз объемистее, чем яйцо королька!

290. РАЗМЕРЫ НАШИХ МОНЕТ

Вес наших медных монет пропорционален их достоинству, т. е. медная двухкопеечная монета весит вдвое больше копеечной, трехкопеечная – втрое и т. д. То же справедливо и для разменного серебра: двухгривенный, например, вдвое тяжелее гривенника. Наконец, и полноценные серебряные монеты (1 р. и 50 коп.) чеканились по тому же правилу. А так как монеты одного рода обычно имеют геометрически подобную форму, то, зная диаметр одной медной монеты, одной разменной серебряной и одной полноценной, можно вычислить диаметры, всех прочих. Приведем примеры, таких расчетов.

Задача № 58

Диаметр медного пятака (образца 1925 г.) равняется 25 мм. Каков диаметр трехкопеечной монеты?

Решение

Вес, а следовательно, и объем трехкопеечной монеты составляет $\frac{3}{5}$, т. е. 0,6 объема пятака. Значит, линейные ее размеры должны быть меньше в $\sqrt[3]{0,6}$, т. е. составлять 0,84 размеров пятака. Отсюда искомый диаметр 3-копеечной монеты должен равняться 0,84 × 25, т. е. 21 мм (в действительности – 20 мм).

Лучшее согласие получается для полноценного серебра: диаметр рубля относится к диаметру полтинника как 33,5 : 26,67 = 1,26, т. е. теоретическому отношению $1 : \sqrt[3]{2}$. Это показывает, что рублевая монета и полтинник представляют собою геометрически подобные цилиндры.

291. МОНЕТА В МИЛЛИОН РУБЛЕЙ

Задача № 59

Вообразите серебряную монету в миллион рублей, которая имеет ту же форму, что и рублевая монета. Какого, примерно, диаметра была бы такая монета? Если бы ее поставить на ребро рядом с вашим домом, то во сколько раз она была бы выше его?

Решение

Размеры монеты были бы не так огромны, как можно думать. Диаметр ее был бы всего 3,35 м – не выше одного этажа. В самом деле: раз объем ее больше объема рублевой монеты в 1 000 000 раз, то диаметр (а также толщина) больше в $\sqrt[3]{1\,000\,000}$, т. е. всего в 100 раз.

Умножив 33,5 мм на 100 получаем 3,35 м – размеры, неожиданно скромные для монеты такого достоинства [1]. Зато вес ее очень внушителен: 20 г × 1 000 000 = = 20 тонн – тяжелее груженого товарного вагона.

292. НАГЛЯДНЫЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Читатель, на предыдущих примерах приобревший навык в сравнении объемов геометрически подобных тел по их линейным размерам, не даст уже застигнуть себя врасплох вопросами такого рода. Он сможет поэтому легко обнаружить ошибочность некоторых мнимо-наглядных изображений, зачастую появляющихся в иллюстрированных журналах.

Задача № 60

Вот одно из таких изображений. Если человек съедает в день, круглым и средним счетом, 400 г мяса, то за 60 лет жизни это составит около 9 т. А так как вес быка – около ½ т, то человек к концу жизни может утверждать, что съел 18 быков. На прилагаемом рисунке (рис. 144), воспроизводимом из английского журнала, изображен этот исполинский бык (и другие животные) рядом с человеком, который их поглощает в течение жизни. Верен ли рисунок? Каков был бы правильный масштаб?

[1] До чего ошибаются иной раз в подобных оценках, видно из того, что при решении этой задачи мне случалось слышать утверждение, будто диаметр искомой монеты в миллион раз больше диаметра рублевой монеты, т. е. имеет ни много, ни мало 33½ километра!..

Решение

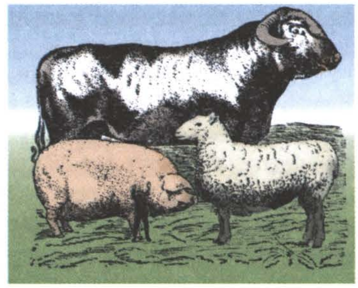


Рис. 144. Сколько мяса мы съедаем в течение жизни (обнаружить ошибку!).

Рисунок неверен. Бык, который изображен здесь, выше нормального в 18 раз и, конечно, во столько же раз длиннее и толще. Следовательно, по объему он больше нормального быка в 18 × 18 × 18 = = 5 800 раз. Такого быка человек мог бы съесть, если бы жил не менее двух тысячелетий. Правильно изображенный бык должен быть выше, длиннее и толще обыкновенного всего в $\sqrt{18}$, т. е. в 2,6 раза; это вышло бы на рисунке вовсе не так внушительно, чтобы могло служить наглядной иллюстрацией количества съедаемого человеком мяса.

Задача № 61

На рис. 145 воспроизведена другая иллюстрация из той же области: человек, расхаживающий у бассейна жидкости, которую он выпивает за всю жизнь. Художник руководился следующим подсчетом. Человек поглощает в день разных жидкостей 1½ л (7-8 стаканов). За 70 лет жизни это составляет около 40 000 л. Так как в ведре 12 л, то художнику нужно было изобразить бассейн, который больше ведра в 3300 раз. Он и полагал, что сделал это на своем рисунке. Прав ли он?

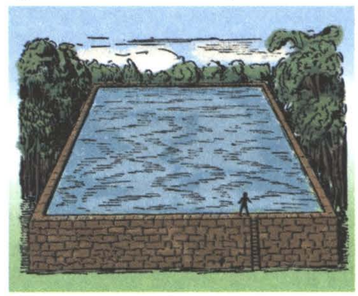


Рис. 145. Сколько воды выпивает человек в течение жизни. (В чем ошибка?)

Решение

На рисунке размеры бассейна сильно преувеличены. Ведро-бассейн должно быть выше и шире обыкновенного только в $\sqrt{3\,300}$ или круглым счетом в 15 раз. Если высота и ширина нормального ведра 30 см, то для вмещения всей воды, выпиваемой нами за целую жизнь, достаточно было бы ведро высотою 4,5 м и такой же ширины. На рисунке 146 изображена эта посудина в правильном масштабе.

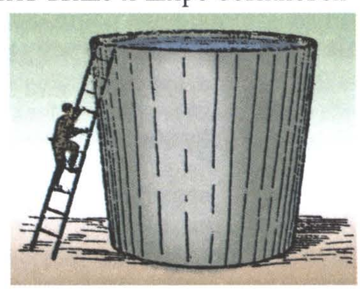


Рис. 146. Тоже – правильное изображение.

293. НАШ НОРМАЛЬНЫЙ ВЕС

Если принять, что все человеческие тела геометрически подобны (это верно лишь в среднем), то можно вычислять вес людей по их росту. Средний рост человека равен 1,75 м, а средний вес – 65 кг. Получающиеся при таких расчетах результаты могут многим показаться неожиданными.

Предположим, что вы ниже среднего роста на 10 см. Какой вес тела является для вас нормальным?

В обиходе часто решают эту задачу так: скидывают с нормального веса такой процент, какой 10 см составляют от нормального роста. В данном случае, например, уменьшают 65 кг в $^{10}/_{175}$ и полученный вес – 62 кг – считают нормальным.

Это – тот же самый неправильный расчет, который доводит иных вычислителей до монеты в 33 км диаметром (см. стр. 195).

Правильный вес получится, если вычислять его из пропорции

$$65 : x = 1{,}75^3 : 1{,}65^3.$$

Откуда:

$$x = \frac{65}{1{,}2} = \text{около } 54 \text{ кг.}$$

Разница с обычно получаемым результатом весьма значительна – 8 кг.

Наоборот, для человека, рост которого на 10 см выше среднего, нормальный вес вычисляется из пропорции:

$$65 : x = 1{,}75^3 : 1{,}85^3.$$

Из нее $x = 78$ кг – на 13 кг больше среднего. Эта прибавка гораздо значительнее, чем обычно думают.

294. ВЕЛИКАНЫ И КАРЛИКИ

Каково же, в таком случае, должно быть отношение между весом великана и карлика? Многим, я уверен, покажется неправдоподобным, что великан может быть в 50 раз тяжелее карлика. Между тем, к этому приводит правильный геометрический расчет.

Один из высочайших великанов, существование которого хорошо удостоверено, был австриец Винкельмейер, в 278 см высоты; другой, эльзасец Крау, был ростом в 275 см; третий, англичанин О'Брик, – о котором рассказывали, что он закуривал трубку от уличных фонарей, – достигал 268 см. Все они были на целый метр выше человека нормального роста. Напротив, карлики достигают в взрослом состоянии около 75 см – на метр ниже нормального роста. Каково же отношение объема и веса великана к объему и весу карлика? Оно равно

$$275^3 : 75^3, \text{ или } 11^3 : 3^3 = 49.$$

Значит, великан равен, по весу, почти полусотне карликов!

А если верить сообщению об арабской карлице Агибе, ростом в 38 см, то это отношение станет еще разительнее: высочайший великан в 7 раз выше этой карлицы и, следовательно, тяжелее в 343 раза. Более достоверно сообщение Бюффона, измерившего карлика в 43 см ростом; этот карлик был в 260 раз легче великана.

295. ГЕОМЕТРИЯ ГУЛЛИВЕРА

Автор «Путешествия Гулливера» с большой осмотрительностью избежал опасности запутаться в геометрических отношениях. Читатель помнит, без сомнения, что в стране лиллипутов нашему футу соответствовал дюйм, а в стране великанов, наоборот, дюйму – фут. Другими словами, у лиллипутов все люди, все вещи, все произведения природы были в 12 раз меньше нормальных, у великанов — во столько же раз больше. Эти на первый взгляд простые отношения, однако, сильно усложнялись, когда приходилось решать вопросы в роде следующих:

1) во сколько раз Гулливер съедал за обедом больше, чем лиллипут?

2) во сколько раз Гулливеру требовалось больше сукна на костюм, нежели лиллипутам?

3) сколько весило яблоко страны великанов?

Автор «Путешествия» справлялся с этими задачами в большинстве случаев вполне успешно. Он правильно рассчитал, что раз лиллипут ростом меньше Гулливера в 12 раз, то объем его тела меньше в 12 × 12 × 12, т. е. в 1728 раз, следовательно, для насыщения тела Гулливера нужно в 1728 раз больше пищи, чем для лиллипута. И мы читаем в «Путешествии» такое описание обеда Гулливера:

«Триста поваров готовили для меня кушанье. Вокруг моего дома были поставлены шалаши, где происходила стряпня и жили повара со своими семьями. Когда наступал час обеда, я брал в руки 20 человек прислуги и ставил их на стол, а человек 100 прислуживало с пола: одни подавали кушанье, остальные приносили бочонки с вином и другими напитками на шестах, перекинутых с плеча на плечо. Стоявшие наверху, по мере надобности, поднимали все это на стол при помощи веревок и блоков...»

Правильно рассчитал Свифт и количество материала на костюм Гулливеру. Поверхность его тела больше, чем у лиллипутов, в 12 × 12 = 144 раза; во столько же раз нужно ему больше материала, портных и т. п. Все это учтено Свифтом, рассказывающим от имени Гулливера, что к нему «было прикомандировано 300 портных-лиллипутов с наказом сшить полную пару платья по местным образцам». (Спешность работы потребовала двойного количества портных.)

Надобность производить подобные расчеты возникала у Свифта чуть не на каждой странице. И, вообще говоря, он выполнял их правильно. Лишь изредка надлежащий масштаб у него не выдерживался, особенно при описании страны великанов. Здесь иногда встречаются крупные ошибки.

«Один раз, — рассказывает Гулливер, — с нами отправился в сад придворный карлик. Улучив удобный момент, когда я, прохаживаясь, очутился под одним из деревьев, он ухватился за ветку и встряхнул ее над моей головой. Град яблок, величиной каждое с хороший бочонок, шумно посыпался на землю; одно ударило меня в спину и сбило с ног...

Гулливер благополучно поднялся на ноги после этого удара. Однако, легко рассчитать, что удар от падения подобного яблока должен был быть поистине сокрушающий: ведь яблоко в 1 728 раз тяжелее нашего, т. е. весом в 80 кило, обрушилось с 12-кратной высоты! Энергия удара должна была превосходить в 20 000 раз энергию падения обыкновенного яблока и могла бы сравниться разве лишь с энергией артиллерийского снаряда...

Наибольшую ошибку допустил Свифт в расчете мускульной силы великанов. Мы уже видели в главе 209 (стр. 144), что мощь крупных животных не пропорциональна их размерам. Если применить приведенные там соображения к великанам Свифта, то окажется, что, хотя мускульная сила их была в 144 раза больше силы Гулливера, вес их тела был больше в 1 728 раз. И если Гулливер в силах был поднять не только вес своего собственного тела, но и еще, примерно, такой же груз, то великаны не в состоянии были бы преодолеть даже груза своего огромного тела. Они должны были бы неподвижно лежать на одном месте, бессильные сделать сколько-нибудь значительное движение. Их могущество, так картинно описанное у Свифта, могло явиться лишь в результате неправильного подсчета.

296. ПОЧЕМУ ПЫЛЬ И ОБЛАКА ПЛАВАЮТ В ВОЗДУХЕ?

«Потому что они легче воздуха», – вот обычный ответ, который представляется многим до того бесспорным, что не оставляет никаких поводов к сомнению. Но такое объяснение, при всей его подкупающей простоте, совершенно ошибочно. Пылинки не только не легче воздуха, они тяжелее его в сотни, даже тысячи раз. Что такое «пылинка»? Мельчайшие частицы различных тяжелых тел: осколки камня или стекла, крупинки угля, дерева, металлов, волокна тканей и т. п. Разве все эти материалы легче воздуха? Простая справка в таблице удельных весов убедит вас, что каждый из них либо в несколько раз тяжелее воды, либо легче ее всего в 2-3 раза. А вода тяжелее воздуха раз в 800; следовательно, пылинки тяжелее его в несколько сот, если не тысяч раз. Теперь очевидна вся несообразность ходячего взгляда на причину плавания пылинок в воздухе.

Какова же истинная причина? Прежде всего надо заметить, что обычно мы неправильно представляем себе самое явление, рассматривая его, как *плавание*. Плавают — в воздухе или жидкости — только такие тела, вес которых не превышает веса равного объема воздуха (или жидкости). Пылинки же превышают этот вес во много раз; поэтому *плавать* в воздухе они не могут. Они и не плавают, а *парят*, т. е. медленно опускаются, задерживаемые в своем падении сопротивлением воздуха. Падающая пылинка должна проложить себе путь между частицами воздуха, расталкивая их или увлекая с собой. На то и на другое расходуется энергия падения. Расход тем значительнее, чем больше поверхность тела (точнее – площадь поперечного сечения) по сравнению с весом. При падении крупных массивных тел мы не замечаем замедляющего действия сопротивления воздуха, так как их вес значительно преобладает над противодействующей силой.

Но посмотрим, что происходит с уменьшением тела. Геометрия поможет нам разобраться в этом. Не трудно сообразить, что с уменьшением объема тела вес уменьшается гораздо больше, чем площадь поперечного сечения: уменьшение веса пропорционально третьей степени линейного сокращения, а ослабление сопротивления пропорционально поверхности, т. е. второй степени линейного уменьшения. Вообразите, что шар заменен другим, поперечник которого в 10 раз меньше: объем его меньше, чем у крупного шара, в $10 \times 10 \times 10 = 1000$ раз, а поверхность — только в $10 \times 10 = 100$ раз. Теперь понятно, почему для весьма мелких крупинок сопротивление воздуха так значительно по сравнению с их весом, и почему скорость их падения уменьшается до едва заметной величины. Водяная капелька радиусом 0,001 мм падает в воздухе равномерно со скоростью 0,1 мм в секунду; достаточно ничтожного, неуловимого для нас волнения воздуха, чтобы помешать такому медленному падению. Вот почему в комнатах, где много ходят, пыли осаждается меньше, чем в нежилых помещениях, а днем меньше, чем ночью, – хотя, казалось бы, должно происходить обратное: осаждению мешают возникающие в воздухе вихревые течения, которых обычно почти не бывает в спокойном воздухе мало посещаемых помещений.

Если каменный кубик в 1 см высотою раздробить на кубические пылинки высотою в 0,0001 мм, то общая поверхность той же массы камня увеличится в 10 000 раз и во столько же раз возрастет сопротивление воздуха ее движению. Пылинки нередко достигают именно таких размеров, и понятно, что сильно возросшее сопротивление воздуха совершенно меняет картину падения.

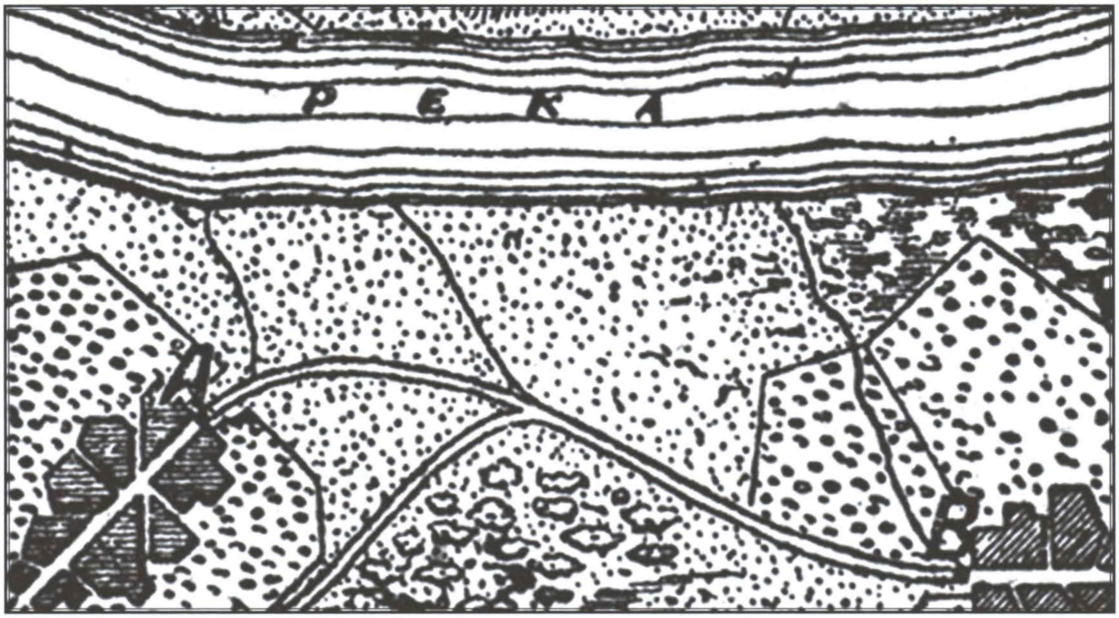
По той же причине «плавают» в воздухе облака. Давно отвергнут устарелый взгляд, будто облака состоят из водяных пузырьков, наполненных водяным паром. Облака — скопление огромного множества чрезвычайно мелких, но сплошных водяных капелек. Капельки эти хотя тяжелее воздуха, раз в 800, все же почти не падают; они опускаются с едва заметною скоростью. Сильно замедленное падение объясняется, как и для пылинок, огромной их поверхностью, по сравнению с весом.

Главная причина, обусловливающая все эти явления, — присутствие воздуха: в пустоте и пылинки и облака (если бы могли существовать) падали бы столь же стремительно, как и тяжелые камни.

Яков Исидорович Перельман (1882-1942) — русский и советский популяризатор научных знаний. Автор целой серии книг, популяризирующих науку. Его книги о занимательных арифметике, алгебре, геометрии, астрономии и тому подобных распространяли знания среди самых широких слоев населения СССР. Книги Перельмана, отличавшиеся простотой и ясностью изложения, завоевали заслуженную любовь, которая живет и поныне. Школьник, прочитавший книги Якова Исидоровича, усваивает школьную программу по основным точным наукам в разы качественнее. Задачи, помещенные в книгах, развивают воображение и смекалку, наталкивают на новые идеи и стимулируют читателя к самостоятельному творчеству.

Судьба ученого сложилась трагически. Он окончил Лесной институт. Затем работал во множестве организаций, которые пропагандировали и распространяли научные знания. Яков Перельман дружил и переписывался со многими выдающимися учеными своего времени.

Однако, во время блокады Ленинграда, сначала его жена, затем и он сам, умерли от голода в 1942 г. А перед этим, в 1941 г., он получил известие о гибели на фронте своего сына Михаила, выпускника ЛГУ.



297. КАК ПАХОМ ПОКУПАЛ ЗЕМЛЮ

Эту главу — необычное название которой станет понятно читателю из дальнейшего — начнем отрывком из общеизвестного рассказа Л. Н. Толстого «Много ли человеку земли нужно».

— А цена какая будет? – говорит Пахом.

— Цена у нас одна: 1000 руб. за день.

Не понял Пахом.

Какая же это мера — день? Сколько в ней десятин будет?

— Мы этого, — говорит, — не умеем считать. А мы за день продаем; сколько обойдешь в день, то и твое, а цена 1 000 руб.

Удивился Пахом.

— Да ведь это, — говорит, — в день обойти, земли много будет.

Засмеялся старшина.

— Вся твоя, — говорит. — Только один уговор: если назад не придешь в день к тому месту, с какого возьмешься, пропали твои деньги.

— А как же, — говорит Пахом, — отметить, где я пройду?

— А мы станем на место, где ты облюбуешь; мы стоять будем, а ты иди, делай круг, а с собой скребку возьми и, где надобно, замечай, на углах ямки рой, дернички клади; потом с ямки на ямку плугом пройдем. Какой хочешь круг забирай, только до захода солнца приходи к тому месту, с какого взялся. Что обойдешь, все твое.

Разошлись башкирцы. Обещались завтра на зорьке собраться, до солнца на место выехать.

Приехали в степь, заря занимается. Подошел старшина к Пахому, показал рукой.

— Вот, — говорит, — все наше, что глазом окинешь. Выбирай любую.

Снял старшина шапку лисью, поставил на землю.

— Вот, — говорит, — метка будет. Отсюда поди, сюда приходи. Что обойдешь, все твое будет.

Только брызнуло из-за края солнце, вскинул Пахом скребку на плечо и пошел в степь.

Отошел с версту, остановился, вырыл ямку, Пошел дальше. Отошел еще, вырыл еще другую ямку.

Верст 5 прошел. Взглянул на солнышко, — уже время об завтраке. «Одна упряжка прошла, — думает Пахом, — А их четыре во дню, рано еще заворачивать. Дай пройду еще верст пяток, тогда влево загибать начну». Пошел еще напрямик. «Ну, — думает, — в эту сторону довольно забрал; надо загибать». Остановился, вырыл ямку побольше и загнул круто влево.

Прошел еще и по этой стороне много; загнул второй угол. Оглянулся Пахом на шихан (бугорок): от тепла затуманился, а сквозь мару чуть виднеются люди на шихане. «Ну, — думает, — длинны стороны взял, надо эту покороче взять». Пошел третью сторону. Посмотрел на солнце, — уж оно к полднику подходит, а по третьей стороне всего версты две прошел. И до места все те же верст 15. «Нет, — думает, — хоть кривая дача будет, а надо прямиком поспевать».

Вырыл Пахом поскорее ямку и повернул прямиком к шихану.

Идет Пахом прямо на шихан, и тяжело уж ему стало. Отдохнуть хочется, а нельзя, — не поспеешь дойти до заката. А солнце уж недалеко от края.

Идет так Пахом; трудно ему, а все прибавляет да прибавляет шагу. Шел, шел, — все еще далеко; побежал рысью... Бежит Пахом, рубаха и портки от пота к телу липнут, во рту пересохло. В груди как меха кузнечные раздуваются, а сердце молотком бьет.

Бежит Пахом из последних сил, а солнце уж к краю подходит. Вот-вот закатываться станет.

Солнце близко, да и до места уж вовсе не далеко. Видит шапку лисью на земле и старшину, как он на земле сидит.

Взглянул Пахом на солнце, а оно до земли дошло уже краешком заходить стало. Наддал из последних сил Пахом, надулся, взбежал за шихан. Видит – шапка. Подкосились ноги, и упал он наперед руками, до шапки достал.

— Ай, молодец! — закричал старшина: — много земли завладел.

Подбежал работник, хотел поднять его, а у него изо рта кровь течет, и он мертвый лежит...»

298. ЗАДАЧА ЛЬВА ТОЛСТОГО (№ 62)

Отвлечемся от мрачной развязки этой истории и остановимся на ее геометрической стороне. Можно ли установить по данным, рассеянным в этом рассказе, сколько примерно десятин земли обошел Пахом? Задача – на первый взгляд как будто невыполнимая – решается, однако, довольно просто.

Решение

Внимательно перечитывая рассказ и извлекая из него все геометрические указания, не трудно убедиться, что полученных данных вполне достаточно для исчерпывающего ответа на поставленный вопрос. Можно даже начертить план обойденного Пахомом земельного участка.

Прежде всего из рассказа ясно, что Пахом бежал по сторонам четырехугольника. О первой стороне его читаем: «Верст пять прошел... Пройду еще верст пяток, тогда влево загибать...»

Значит, первая сторона четырехугольника имела в длину около 10 верст.

О второй стороне, составляющей прямой угол с первой, численных указаний в рассказе не сообщается.

Длина третьей стороны — очевидно, перпендикулярной ко второй — указана в рассказе прямо: «По третьей стороне всего версты две прошел».

Непосредственно дана и длина четвертой стороны: «До места все те же верст 15»...[1]

По этим данным мы и можем начертить план обойденного Пахомом участка (рис. 147). В полученном четыреугольнике ***ABCD*** сторона ***AB*** = 10 верстам; ***CD*** = 2 в.; ***AD*** = 15 в.; углы ***B*** и ***C*** — прямые. Длину ***x*** неизвестной стороны ***BC*** не трудно вычислить, если провести из ***D*** перпендикуляр ***DE*** на ***AB*** (рис. 148). Тогда в прямоугольном треугольние ***AED*** нам известны катет ***AE*** = 8 верст и гипотенуза ***AD*** = 15 верст. Неизвестный катет ***ED*** = $= \sqrt{15^2 - 8^2} = 13$ верст.

Итак, вторая сторона имела в длину около 13 верст. Как видим, Пахом (или Л. Н. Толстой) ошибся, считая вторую сторону короче первой.

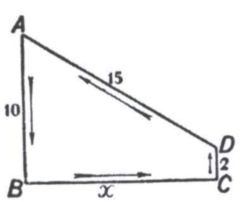


Рис. 147.

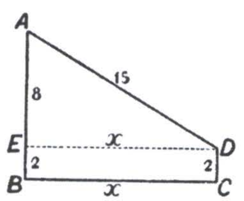


Рис. 148.

Теперь легко вычислить и площадь трапеции ***ABCD***, состоящей из прямоугольника ***EBCD*** и прямоугольного треугольника ***AED***. Она равна

$$2 \times 13 + \frac{1}{2} \times 8 \times 13 = 78 \text{ кв. верст.}$$

Вычисление по формуле трапеции дало бы, конечно, тот же результат:

$$\frac{AB + CD}{2} \times BC = \frac{10 + 2}{2} \times 13 = 78 \text{ кв. верст.}$$

Мы узнали, что Пахом обежал обширный участок площадью в 78 кв. верст, или около 8000 десятин. Десятина обошлась ему в 12½ копеек.

299. ТРАПЕЦИЯ ИЛИ ПРЯМОУГОЛЬНИК?

Задача № 63

В роковой для своей жизни день Пахом прошел 10 + + 13 + 2 + 15 = 40 верст, идя по сторонам трапеции. Его первоначальным намерением было идти по сторонам прямоугольника; трапеция же получилась случайно, в результате плохого расчета. Интересно определить: выгадал ли он, или прогадал от того, что участок его оказался не прямоугольником, а трапецией? В каком случае должен он был получить большую площадь земли?

Решение

Прямоугольников с обводом в 40 верст может быть очень много, и каждый имеет другую площадь. Вот ряд примеров:

14 × 6 = 84 кв. верст
13 × 7 = 91 « «
12 × 8 = 96 « «
11 × 9 = 99 « «

Мы видим, что у всех этих фигур, при одном и том же периметре в 40 верст, площадь больше, чем у нашей трапеции. Однако, возможны и такие прямоугольники с периметром в 40 верст, площадь которых меньше, чем у трапеции:

18 × 2 =36 кв. верст
19 × 1 =19 « «
19½ × ½ = 9¾ « «

Следовательно, на вопрос задачи нельзя дать определенного ответа. Есть прямоугольники с большею площадью, чем трапеция, но есть и с меньшею, при одном и том же обводе. Зато можно дать вполне определенный ответ на вопрос: какая из всех прямоугольных фигур с заданным периметром заключает самую большую площадь? Сравнивая наши прямоугольники, мы замечаем, что чем меньше разница в длине сторон, тем площадь прямоугольника больше. Естественно заключить, что, когда этой разницы не будет вовсе, т. е. когда прямоугольник превратится в квадрат, площадь фигуры достигнет наибольшей величины. Она будет равна тогда 10 × 10 = 100 кв. верст. Легко видеть, что этот квадрат действительно превосходит по площади любой прямоугольник одинакового с ним периметра. Пахому следовало идти по сторонам квадрата, чтобы получить участок наибольшей площади, – на 22 кв. версты больше, чем он успел охватить.

300. ЗАМЕЧАТЕЛЬНОЕ СВОЙСТВО КВАДРАТА

Замечательное свойство квадрата – заключать в своих границах наибольшую площадь по сравнению со всеми другими прямоугольниками того же периметра –

[1] Здесь непонятно, однако, как мог Пахом с такого расстояния различать людей на шихане.

многим неизвестно. Приведем поэтому строгое доказательство этого положения.

Обозначим периметр прямоугольной фигуры через P. Если взять квадрат с таким периметром, то каждая сторона его должна равняться $\frac{P}{4}$. Докажем, что, укорачивая одну его сторону на какую-нибудь величину b, при таком же удлинении смежной стороны, мы получим прямоугольник строго одинакового с ним периметра, но меньшей площади. Другими словами, докажем, что площадь $\left(\frac{P}{4}\right)^2$ квадрата больше площади $\left(\frac{P}{4}-b\right)\left(\frac{P}{4}+b\right)$ прямоугольника:

$$\left(\frac{P}{4}\right)^2 > \left(\frac{P}{4}-b\right)\left(\frac{P}{4}+b\right)$$

Так как правая сторона этого неравенства равна $\left(\frac{P}{4}-b\right)^2$, то все выражение принимает вид

$$0 > -b^2 \text{ или } b^2 > 0.$$

Но последнее неравенство очевидно: квадрат всякого количества, положительного или отрицательного, больше 0. Следовательно, справедливо и первоначальное неравенство, которое привело нас к этому.

Итак, квадрат имеет наибольшую площадь из всех прямоугольников с таким же периметром.

Отсюда следует, между прочим, и то, что из всех прямоугольных фигур с одинаковыми площадями квадрат имеет наименьший периметр. В этом можно убедиться следующим рассуждением. Допустим, что это неверно и что существует такой прямоугольник A, который, при равной с квадратом B площади, имеет периметр меньший, чем у него. Тогда, начертив квадрат C того же периметра, как у прямоугольника A, мы получим квадрат, имеющий большую площадь, чем у A, и, следовательно, большую, чем у квадрата B. Что же у нас вышло? Что квадрат C имеет периметр меньший, чем квадрат B, а площадь большую, чем он. Это, очевидно, невозможно: раз сторона квадрата меньше, то и площадь должна быть меньше. Значит, нельзя было допустить существования прямоугольника A, который при одинаковой площади имеет периметр меньший, чем у квадрата. Другими словами, из всех прямоугольников с одинаковой площадью наименьший периметр имеет квадрат.

Знание этих свойств квадрата помогло бы Пахому правильно рассчитать свои силы и получить прямоугольный участок наибольшей площади. Зная, что он может пройти в день без напряжения, скажем, 36 верст, он пошел бы по границе квадрата со стороною 9 верст и к вечеру был бы обладателем участка в 81 кв. версту, – на 3 кв. версты больше, чем он получил со смертельным напряжением сил. И, наоборот, если бы он наперед ограничился какою-нибудь определенною площадью прямоугольного участка, например, в 36 кв. верст, то мог бы достичь результата с наименьшей затратой сил, идя по границе квадрата, сторона которого – 6 верст.

301. УЧАСТКИ ДРУГОЙ ФОРМЫ

Но, может быть, Пахому еще выгоднее было бы выкроить себе участок вовсе не прямоугольной формы, а какой-нибудь другой – четырехугольной, треугольной, пятиугольной и т. д.?

Этот вопрос может быть рассмотрен строго математически; однако, из опасения утомить нашего добровольного читателя, мы не станем входить здесь в это рассмотрение и познакомим его только с результатами.

Можно доказать, во-первых, что из всех четырехугольников с одинаковым периметром наибольшую площадь имеет квадрат. Поэтому, желая иметь четырехугольный участок, Пахом никакими ухищрениями не мог бы овладеть более, чем 100 кв. верстами (считая, что максимальный дневной пробег его – 40 верст).

Во-вторых, можно доказать, что квадрат имеет большую площадь, чем всякий треугольник равного периметра. Равносторонний треугольник такого же периметра имеет, сторону $\frac{40}{3}$ = 13⅓ версты, а площадь (по формуле $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где S площадь, а a – сторона) —

$$\frac{1}{4}\left(\frac{40}{3}\right)^2\sqrt{3} = 77 \text{ кв. верст},$$

т. е. меньше даже, чем у той трапеции, которую Пахом обошел. Дальше (стр. 202) будет доказано, что из всех треугольников с равными периметрами равносторонний обладает наибольшею площадью. Значит, если даже этот наибольший треугольник имеет площадь, меньшую площади квадрата, то и все прочие треугольники того же периметра по площади меньше, чем квадрат.

Но если будем сравнивать площадь квадрата с площадью пятиугольника, шестиугольника и т. д. равного периметра, то здесь первенство его прекращается: правильный пятиугольник обладает большею площадью, правильный шестиугольник – еще большею, и т. д. Легко убедиться в этом на примере правильного шестиугольника. При периметре в 40 верст, его сторона $\left(\frac{40}{6}\right)$, площадь

$$\left(\text{по формуле } S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\right) \text{ равна —}$$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{40}{6}\right)^2\sqrt{3} = 115 \text{ кв. верст}.$$

Избери Пахом для своего участка форму правильного шестиугольника, он, при том же напряжении сил, овладел бы площадью на 115 — 78, т. е. на 37 кв. верст больше, чем в действительности, и на 15 кв. верст больше, чем дал бы ему квадратный участок (но для этого, конечно, пришлось бы ему пуститься в путь с угломерными инструментами).

Задача № 64

Из шести спичек сложить фигуру с наибольшей площадью.

Решение

Из шести спичек можно составить довольно разнообразные фигуры: разносторонний треугольник, прямоугольник, множество параллелограммов, целый ряд неправильных пятиугольников, ряд неправильных шестиугольников и, наконец, правильный шестиугольник. Геометр, не сравнивая между собою площадей этих фигур, заранее знает, какая фигура имеет наибольшую площадь: правильный шестиугольник.

302. ФИГУРА С НАИБОЛЬШЕЮ ПЛОЩАДЬЮ

Можно бы доказать строго геометрически, что чем больше сторон у правильного многоугольного участка, тем большую площадь заключает он в одних и тех же границах. А самую большую площадь при данном периметре охватывает окружность. Если бы Пахом бежал по кругу, то, пройдя те же 40 верст, он получил бы площадь в

$$\pi\left(\frac{40}{2\pi}\right)^2 = 127 \text{ кв. верст.}$$

Большею площадью, при данном периметре, не может обладать никакая другая фигура, безразлично – прямолинейная или криволинейная.

Мы позволим себе несколько остановиться на этом удивительном свойстве круга заключать в своих границах большую площадь, чем всякая другая фигура любой формы, имеющая тот же периметр. Может быть, некоторые читатели полюбопытствуют узнать, каким способом доказываются подобные положения. Приводим далее доказательство — правда, не вполне строгое — этого свойства круга, доказательство, предложенное знаменитым германским математиком Яковом Штейнером. Оно довольно длинно, но те, кому оно покажется утомительным, могут пропустить его без ущерба для понимания дальнейшего.

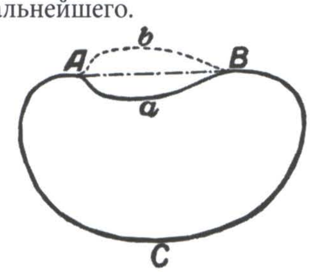


Рис. 149.

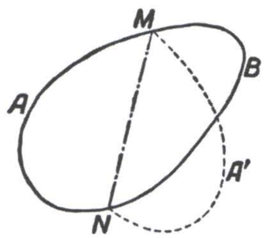


Рис. 150.

Надо доказать, что фигура, имеющая при данном периметре наибольшую площадь, есть круг. Прежде всего установим, что искомая фигура должна быть выпуклой. Это значит, что всякая ее хорда должна полностью располагаться внутри фигуры. Пусть у нас имеется фигура ***AaBC*** (рис. 149), имеющая внешнюю хорду ***AB***. Заменим дугу а дугою ***b***, симметричною с нею. От такой замены периметр фигуры ***ABC*** не изменится, площадь же явно увеличится. Значит, фигуры вроде ***AaBC*** не могут быть теми, которые при одинаковом периметре заключают наибольшую площадь.

Итак, искомая фигура есть фигура выпуклая. Далее, мы можем наперед установить еще и другое свойство этой фигуры: всякая хорда, которая делит пополам ее периметр, рассекает пополам и ее площадь. Пусть фигура ***AMBN*** (рис. 150) есть искомая, и пусть хорда ***MN*** делит ее периметр пополам. Докажем, что площадь ***AMN*** равна площади ***MBN***. В самом деле, если бы какая-либо из этих частей была по площади больше другой, – например ***AMN*** > ***MNB***, то, перегнув фигуру ***AMN*** по ***MN*** мы получили бы фигуру ***AMA′N***, площадь которой больше, чем у первоначальной фигуры ***AMBN***, периметр же одинаков с нею. Значит, фигура ***AMBN***, в которой хорда, рассекающая периметр пополам, делит площадь на неравные части, не может быть искомая (т. е. не может иметь наибольшую площадь при данном периметре).

Прежде чем идти далее, докажем еще следующую вспомогательную теорему: из всех треугольников с двумя данными сторонами наибольшую площадь имеет тот, у которого стороны эти заключают прямой угол. Чтобы доказать это, вспомним тригонометрическое выражение площади ***S*** треугольника со сторонами ***a*** и ***b*** и углом между ними ***C:***

$$S = \frac{1}{2}\, ab \sin C.$$

Выражение это будет, очевидно, наибольшим (при данных сторонах) тогда, когда sin ***C*** примет наибольшее значение, т. е. будет равен единице. Но угол, синус которого равен 1, есть прямой, — что и требовалось доказать.

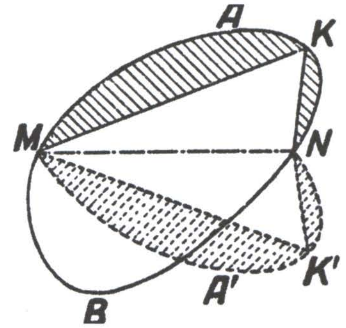


Рис. 151.

Теперь можем приступить к основной задаче — к доказательству того, что из всех фигур с периметром ***y*** наибольшую площадь ограничивает круг. Чтобы убедиться в этом, попробуем допустить существование некруговой выпуклой фигуры ***MANB*** (рис. 151), которая обладает этим свойством. Проведем в ней хорду делящую пополам ее периметр; она же — как мы уже знаем — разделит пополам и площадь фигуры. Перегнем половину ***MAN*** по линии ***MN*** так, чтобы она расположилась симметрично (***MA′N***).

Заметим, что фигура ***MANA′*** обладает тем же периметром и тою же площадью, что и первоначальная фигура ***MANB***. Так как дуга ***MAN*** не есть полуокружность (иначе нечего было бы и доказывать), то на ней должны находиться такие точки, из которых отрезок ***MN*** виден не под прямым углом. Пусть ***K*** такая точка, а ***K′*** — ей симметричная, т. е. углы ***K*** и ***K′*** — не прямые. Раздвигая (или сдвигая) стороны ***MK***, ***KN***, ***MK′***, ***NK′***, мы можем сделать заключенный между ними угол прямым и получим тогда равные прямоугольные треугольники. Эти треугольники приложим друг к другу гипотенузами, как на рис. 152, и присоединим к ним в соответствующих местах заштрихованные сегменты. Получим фигуру ***M′KK′N′***, обладающую тем же периметром, что и первоначальная, но, очевидно, большею площадью (потому что прямоугольные треугольники ***M′KN′*** и ***M′K′N′*** имеют большую площадь, чем непрямоугольные ***MKN*** и

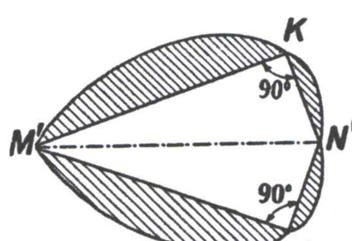


Рис. 152.

MK′N). Значит, никакая некруговая фигура не может обладать, при данном периметре, наибольшею площадью. И только в случае круга мы указанным способом не могли бы построить фигуры, имеющей при том же периметре еще большую площадь.

Вот каким рассуждением можно доказать, что круг есть фигура, обладающая при данном периметре наибольшею площадью.

Легко доказать справедливость и такого положения: из всех фигур равной площади круг имеет наименьший периметр. Для этого нужно применить к кругу те рассуждения, которые мы раньше приложили к квадрату (см. стр. 199-200).

303. ГВОЗДИ

Задача №65

Какой гвоздь должен крепче держаться — круглый, квадратный или треугольный, — если они забиты одинаково глубоко и имеют одинаковую площадь поперечного сечения?

Решение

Будем исходить из того, что крепче держится тот гвоздь, который соприкасается с окружающим материалом по большей поверхности. У какого же из наших гвоздей большая боковая поверхность? Мы уже знаем, что при равных площадях периметр квадрата меньше периметра треугольника, а окружность меньше периметра квадрата. Если сторону квадрата принять за единицу, то вычисление дает для этих трех величин значения: 4,53; 4; 3,55. Следовательно, крепче других должен держаться треугольный гвоздь.

Таких гвоздей, однако, не изготовляют, — по крайней мере, в продаже они не встречаются. Причина кроется, вероятно, в том, что подобные гвозди легче изгибаются и ломаются.

304. ТЕЛО НАИБОЛЬШЕГО ОБЪЕМА

Свойством, сходным со свойством круга, обладает и шаровая поверхность: она обхватывает наибольший объем при данной величине поверхности. И, наоборот, из всех тел одинакового объема наименьшую поверхность имеет шар. Эти свойства не лишены значения в практической жизни. Шарообразный самовар обладает меньшей поверхностью, чем цилиндрический или какой-либо иной формы, вмещающий столько же стаканов; а так как тело теряет теплоту только с поверхности, то шарообразный самовар остывает медленнее, чем всякий другой того же объема. Напротив, резервуар градусника быстрее нагревается и охлаждается (т. е. принимает температуру окружающих предметов), когда ему придают форму не шарика, а цилиндра.

По той же причине земной шар, — если он действительно состоит из твердой оболочки и жидкого ядра [1], — должен уменьшаться в объеме, т. е. сжиматься, уплотняться, от всех причин, изменяющих форму его поверхности: его внутреннему содержимому должно становиться тесно всякий раз, когда наружная его форма претерпевает какое-либо изменение, отклоняясь от шара. Возможно, что этот геометрический факт находится в связи с землетрясениями и вообще с тектоническими явлениями; но об этом должны иметь суждение геологи.

305. ПРОИЗВЕДЕНИЕ РАВНЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ

Задачи вроде тех, которыми мы сейчас занимались, рассматривают вопрос со стороны как бы экономической: при данной затрате сил (например, при прохождении 40-верстного пути) как достигнуть наивыгоднейшего результата (охватить наибольший участок)? Отсюда и заглавие настоящего отдела этой книги: «Геометрическая экономия». Но это — вольность популяризатора; в математике вопросы подобного рода носят другое название: задачи «на максимум и минимум». Они могут быть весьма разнообразны по сюжетам и по степени трудности. Многие разрешаются лишь приемами высшей математики; но не мало есть и таких, для решения которых достаточно самых элементарных сведений. В дальнейшем будет рассмотрен ряд подобных задач из области геометрии, которые мы будем решать, пользуясь одним любопытным свойством произведения равных множителей.

Для случая двух множителей свойство это уже знакомо нам. Мы знаем, что площадь квадрата больше, чем площадь всякого прямоугольника такого же периметра. Если перевести это геометрическое положение на язык арифметики, оно будет означать следующее: когда требуется разбить число на две такие части, чтобы произведение их было наибольшим, то следует делить пополам. Например, из всех произведений

13×17, 16×14, 12×18, 11×19, 10×20, 15×15 и т. д., сумма множителей которых равна 30, наибольшим будет 15×15 — даже если сравнивать и произведения дробных чисел ($14\frac{1}{2} \times 15\frac{1}{2}$ и т. п.).

То же справедливо и для произведений трех множителей, имеющих постоянную сумму: произведение их достигает наибольшей величины, когда множители равны между собою. Это прямо вытекает из предыдущего. Пусть три множителя x, y, z в сумме равны a

$$x + y + z = a.$$

Допустим, что x и y не равны между собою. Если заменим каждый из них полусуммой $\frac{x+y}{2}$, то сумма множителей не изменится:

$$\frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2} + z = x + y + z = a.$$

Но так как, согласно предыдущему,

$$\left(\frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{x+y}{2}\right) > xy,$$

то произведение трех множителей

$$\left(\frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{x+y}{2}\right) z,$$

больше произведения xyz:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{x+y}{2}\right) z > xyz.$$

[1] Вопрос еще спорный в науке.

Вообще, если среди множителей xyz есть хотя бы два неравных, то можно всегда подобрать числа, которые не изменяя общей суммы, дадут большее произведение, чем xyz. И только когда все три множителя равны, произвести такой замены нельзя. Следовательно, при $x + y + z = a$ произведение xyz будет наибольшим тогда, когда

$$x = y = z.$$

Воспользуемся теперь знанием этого свойства равных множителей, чтобы решить несколько интересных задач.

306. ТРЕУГОЛЬНИК С НАИБОЛЬШЕЙ ПЛОЩАДЬЮ

Задача № 66

Какую форму нужно придать треугольнику, чтобы при данной сумме его сторон он имел наибольшую площадь?

Мы уже заметили раньше (стр. 201), что этим свойством обладает треугольник равносторонний. Но как это доказать?

Решение

Площадь S треугольника со сторонами a, b, c и периметром $a + b + c = 2$ р выражается, как известно из курса геометрии, так:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

откуда:

$$\frac{S^2}{p} = (p-a)(p-b)(p-c).$$

Площадь S треугольника будет наибольшей тогда же, когда станет наибольшей величиной и ее квадрат S^2, или выражение $\frac{S^2}{p}$, где p, полупериметр, есть, согласно условию, величина неизменная. Но так как обе части равенства получают наибольшее значение одновременно, то вопрос сводится к тому, при каком условии произведение

$$(p-a)(p-b)(p-c)$$

становится наибольшим. Заметив, что сумма этих трех множителей есть величина постоянная,

$$p - a + p - b + p - c = 3p - (a + b + c) = 3p - 2p = p$$

мы заключаем, что произведение их достигнет наибольшей величины тогда, когда множители станут равны, т. е. когда осуществится равенство

$$p - a = p - b = p - c,$$

откуда

$$a = b = c$$

Итак, треугольник имеет, при данном периметре, наибольшую площадь тогда, когда стороны его равны между собою.

307. САМЫЙ ТЯЖЕЛЫЙ БРУС

Задача № 67

Из цилиндрического бревна нужно выпилить брус наибольшего веса. Как это сделать?

Решение

Задача, очевидно, сводится к тому, чтобы вписать в круг прямоугольник с наибольшей площадью. Хотя после всего сказанного читатель уже подготовлен к мысли, что таким прямоугольником будет квадрат, все же интересно строго доказать это положение.

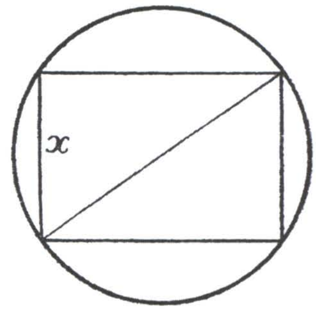


Рис. 153.

Обозначим одну сторону искомого прямоугольника через x, тогда другая выразится через

$$\sqrt{4R^2 - x^2},$$

где R – радиус кругового сечения бревна. Площадь прямоугольника $S = x\sqrt{4R^2 - x^2}$, откуда

$$S^2 = x^2(4R^2 - x^2).$$

Так как сумма множителей x^2 и $4R^2 - x^2$ есть величина постоянная ($x^2 + 4R^2 - x^2 = 4R^2$), то произведение их S^2 будет наибольшим при $x^2 = 4R^2 - x^2$, т. е. при $x = R\sqrt{2}$. Тогда же достигнет наибольшей величины и S, т, е. площадь искомого прямоугольника.

Итак, одна сторона прямоугольника с наибольшей площадью $= R\sqrt{2}$, т. е. стороне вписанного квадрата. Брус имеет наибольший объем, если сечение его есть квадрат, вписанный в сечение цилиндрического бревна.

308. ИЗ КАРТОННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Задача № 68.

Имеется кусок картона треугольной формы. Нужно вырезать из него параллельно данному основанию и высоте прямоугольник наибольшей площади.

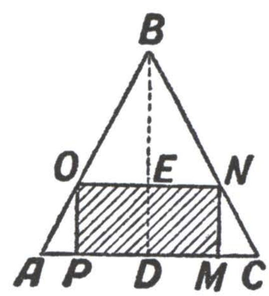


Рис. 154.

Решение

Пусть (рис. 154) ABC есть данный треугольник, а $MNOP$ — тот прямоугольник, который должен остаться после обрезки. Из подобия треугольников ABC и NBO имеем

$$\frac{BD}{BE} = \frac{AC}{NO}, \text{ откуда } NO = \frac{BE \times AC}{BD}.$$

Обозначив одну сторону NO искомого прямоугольника через y, ее расстояние BE от вершины треугольника через x, основание AC данного треугольника через a, а его высоту BD — через h, переписываем полученное ранее выражение в таком виде:

$$y = \frac{ax}{h}.$$

Площадь S искомого прямоугольника $MNOP$ равна

$$MN \times NO = (BD - BE)\,NO = (h - x)\,y = (h - x)\frac{ax}{h}.$$

Следовательно:

$$\frac{Sh}{a} = (h - x)\,x.$$

Площадь S будет наибольшей тогда же, когда и произведение $\frac{Sh}{a}$, а, следовательно, тогда, когда достигнет наибольшей величины произведение множителей $(h - x)$ и x. Но сумма $h - x + x = h$ = постоянной величине. Значит, произведение их максимальное, когда $h - x = x$, т. е.

$$x = \frac{h}{2}.$$

Мы узнали, что сторона NO искомого прямоугольника проходит через середину высоты треугольника и, следовательно, соединяет середины его сторон. Значит, эта сторона прямоугольника $\frac{a}{2}$, а другая $\frac{h}{2}$.

309. ЗАТРУДНЕНИЯ ЖЕСТЯНЩИКА

Задача № 69

Жестянщику заказали изготовить из квадратного куска жести в 60 см ширины четырехугольную коробку без крышки и поставили условием, чтобы коробка имела наибольшую вместимость. Жестянщик долго примерял, какой ширины нужно для этого отогнуть края, но не мог прийти к определенному решению. Не удастся ли читателю выручить его из затруднения?

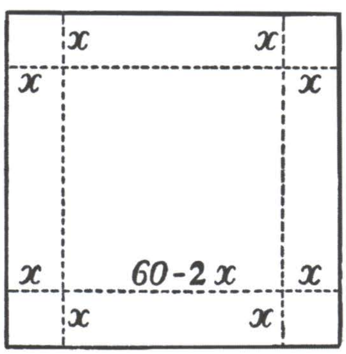


Рис. 155.

Решение

Пусть ширина отгибаемых полос x (рис. 155). Тогда ширина квадратного дна коробки будет равна $60 - 2x$; объем же V коробки выразится произведением

$$V = (60 - 2x)\,(60 - 2x)\,x.$$

При каком x это произведение имеет наибольшее значение?

Если бы сумма трех множителей была постоянна, произведение было бы наибольшим в случае их равенства. Но здесь сумма множителей

$$60 - 2x + 60 - 2x + x = 120 - 3x$$

не есть постоянная величина, так как изменяется с изменением x. Однако не трудно добиться того, чтобы сумма трех множителей была постоянной: для этого достаточно лишь умножить обе части равенства на 4. Получим

$$4V = (60 - 2x)(60 - 2x)\,4x.$$

Сумма этих множителей равна

$$60 - 2x + 60 - 2x + 4x = 120,$$

величине постоянной. Значит, произведение этих множителей достигает наибольшей величины при их равенстве, т. е. когда

$$60 - 2x = 4x,$$

откуда $x = 10$.

Тогда же и $4V$, а с ними и V достигнут своего максимума. Итак, коробка получится наибольшего объема, если у жестяного листа отогнуть 10 см.[1] Этот наибольший объем равен $40 \times 40 \times 10 = 16\,000$ куб. см. Отогнув на сантиметр меньше или больше, мы уменьшим объем коробки. Действительно:

$$9 \times 42 \times 42 = 15\,900 \text{ куб. см},$$
$$11 \times 38 \times 38 = 15\,900 \text{ куб. см}, \text{ —}$$

в обоих случаях меньше 16 000 куб. см.

310. ЗАТРУДНЕНИЕ ТОКАРЯ

Задача № 70

Токарю дан конус и поручено выточить из него цилиндр так, чтобы сточено было возможно меньше материала. Токарь стал размышлять о форме искомого цилиндра: сделать ли его высоким, хотя и узким (рис. 156), или, наоборот, широким, зато низким (рис. 157). Он никак не мог

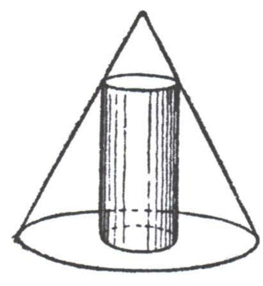


Рис. 156.

решить, при какой форме цилиндр получится наибольшего объема, т. е. будет сточено меньше материала. Как он

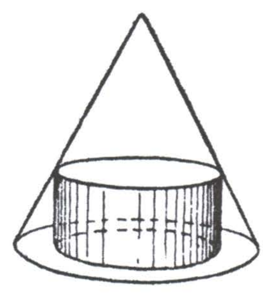


Рис. 157.

должен поступить?

Решение

Задача требует внимательного геометрического рассмотрения. Пусть ABC (рис. 158) — сечение конуса, BD — его высота, которую обозначим через h, радиус основания $AD = DC$ обозначим через B. Цилиндр, который можно из конуса выточить, имеет сечение $MNOP$. Найдем, на каком расстоянии $BE = x$ от вершины B должно находиться верхнее основание цилиндра, чтобы объем его был наибольший.

---

[1] Решая задачу в общем виде, найдем, что при ширине a квадратного листа следует, для получения коробки наибольшего объема, отогнуть полоски шириною $x = \frac{1}{6}a$, потому что произведение $(a - 2x)\,(a - 2x)\,x$, или $(a - 2x)\,(a - 2x)\,4x$, наибольшее при $a - 2x = 4x$.

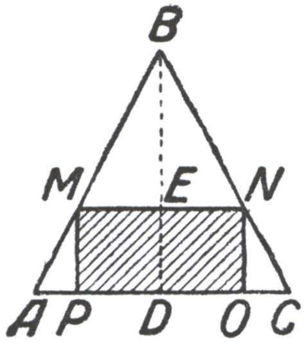


Рис. 158.

Радиус r основания цилиндра (PD или ME) легко найти из пропорции

$$\frac{ME}{AD} = \frac{BE}{BD}\text{, т. е. } \frac{r}{R} = \frac{x}{h},$$

Откуда

$$\frac{Vh}{\pi R^2} = x^2(h - x).$$

Высота ED цилиндра = h – x. Следовательно, объем его

$$V = \pi\left(\frac{Rx}{h}\right)^2(h - x) = \pi\ \frac{R^2x^2}{h}\ (h - x),$$

откуда

$$\frac{Vh}{\pi R^2} = x^2(h - x).$$

В выражении $\frac{Vh}{\pi R^2}$ величины h, π и R постоянные, и только V переменная. Мы желаем разыскать такое x, при котором V делается наибольшим. Но, очевидно, V станет наибольшим одновременно с $\frac{Vh}{\pi R^2}$ т. е. с $x^2(h - x)$. Когда же это последнее выражение становится наибольшим? Мы имеем здесь три переменных множителя x, x и $(h - x)$. Если бы их сумма была постоянной, произведение было бы наибольшим тогда, когда множители были бы равны. Этого постоянства суммы легко добиться, если обе части последнего равенства умножить на 2. Тогда получим:

$$\frac{Vh}{\pi R^2} = x^2(2h - 2x).$$

Теперь три множителя правой части имеют постоянную сумму

$$x + x + 2h - 2x = 2h$$

Следовательно, произведение их будет наибольшим, когда все множители равны, т. е.

$$x = 2h - 2x\text{, и } x = \frac{2h}{3}.$$

Тогда же станет наибольшим и выражение $\frac{Vh}{\pi R^2}$, а с ним вместе и объем V цилиндра.

Теперь мы знаем, как должен быть выточен искомый цилиндр: его верхнее основание должно отстоять от вершины на ⅔ его высоты.

311. КРАТЧАЙШИЙ ПУТЬ

В заключение рассмотрим задачу на «максимум и минимум», разрешаемую крайне простым геометрическим построением.

Задача № 71

У берега реки надо построить водонапорную башню, из которой вода доставлялась бы по трубам в селения A и B.

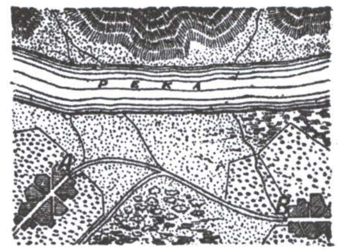


Рис. 159. Найти кратчайший путь А — река — Б.

В какой точке нужно ее соорудить, чтобы общая длина труб от башни до обоих селений была наименьшей?

Решение

Задача сводится к отысканию кратчайшего пути от A к берегу и затем к B.

Допустим, что искомый путь есть ACB (рис. 160). Перегнем чертеж около CN. Получим точку B'. Если

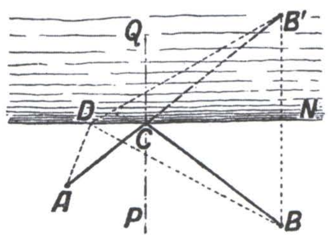


Рис. 160.

ACB' есть кратчайший путь, то, так как $CB' = CB$, путь ACB' должен быть короче всякого иного (напр., ADB'). Это будет лишь в том случае, когда точка C лежит на прямой AB': тогда всякий иной путь от A до B', как ломаный, будет длиннее. Значит, для нахождения кратчайшего пути нужно найти лишь точку C пересечения прямой AB' с линией берега. Тогда, соединив C и B, найдем обе части кратчайшего пути от A до B.

Проведя в точке C перпендикуляр к CN, легко видеть, что углы ACP и BCP, составляемые обеими частями кратчайшего пути с этим перпендикуляром, равны между собою (уг. ACP = уг. $B'CQ$) = уг. BCP).

Таков, как известно, закон следования светового луча, когда он отражается от зеркала: угол падения равен углу отражения. Отсюда следует, что световой луч при отражении избирает кратчайший путь, – вывод, который был известен еще древнему физику и геометру Герону Александрийскому две тысячи лет назад.

Другие примеры задач такого же рода, разрешаемых простым геометрическим построением, мы уже имели ранее в главе «Геометрия у реки». Читатель найдет также ряд задач подобного типа в нашей книге «Занимательная алгебра», в отделе квадратных уравнений.

Оглавление

Я. И. ПЕРЕЛЬМАН

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Редактор-составитель
В. Шабловский

Дизайн обложки,
подготовка к печати
В. Шабловский

Верстка,
обработка иллюстраций
М. Судакова

Сдано в печать 24.07.2018
Объем 26 печ. листов
Тираж 3000 экз.
Заказ № 4783/18

СЗКЭО
Санкт-Петербург

ООО «СЗКЭО»
Телефон в Санкт-Петербурге: +7 (812) 365-40-44
E-mail: knigi@szko.ru

ООО «Издательство «ОНИКС-ЛИТ»
119017, Москва, пер. Пыжевский, д. 5, стр. 1
Отдел реализации: тел.: (495) 649-85-07
Интернет-магазины: www.labirint.ru, www.my-shop.ru, www.ozon.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ООО «ИПК Парето-Принт»,
170546, Тверская область, Промышленная зона Боровлево-1, комплекс №3А,
www.pareto-print.ru

Когда в Гонолулу настанет полночь,
В Ленинграде наступает полдень.
В этот час в Ленинграде,
Фонтанка, 34,
Ежедневно открываются двери
Дома занимательной науки,
В котором вам расскажут
О времени, о Земле, о небе,
О числах, о цвете, о звуке
И о многом другом.

(Афиша при входе в музей)

«Дом занимательной науки», он же ДЗН (что созвучно со школьным звонком) — так назывался музей, открытый по инициативе Я. И. Перельмана 15 октября 1935 года в правом флигеле Фонтанного дома. В залах астрономии, физики, математики и географии посетителей всех возрастов ожидали настоящие чудеса: мебель без видимой причины меняла свой цвет, торговые весы безошибочно отгадывали любое число или фамилию, кипящий чай в буфете разливали из бутыли, стоящей на льду, а книга предложений сама открывалась на нужной странице, стоило перед ней сесть; все экспонаты требовалось трогать руками и даже пытаться сломать.

ДЗН действовал до 29 июня 1941 года и успел принять более полумиллиона человек. В нем работало множество кружков, проводились научные олимпиады, его сотрудники читали лекции на предприятиях, в школах и воинских частях, а также издавали серию научно-популярных книг по различным отраслям знаний, которая так и называлась —«Дом занимательной науки».

В настоящий сборник вошли книги «Занимательная арифметика», «Занимательная геометрия» и «Занимательная алгебра» замечательного популяризатора науки Якова Исидоровича Перельмана. Вашему вниманию предлагаются выдержки взятые из оригинальных авторских текстов:

«Занимательная геометрия на вольном воздухе и дома», 1933 г.,
«Занимательная арифметика», 1926 г.,
«Занимательная алгебра», 1937 г.

Наше издание не претендует на звание учебника, а только лишь пытается познакомить ребят с миром математики. Это увлекательная книга познакомит читателя с удивительным миром чисел, цифр и геометрических форм.

Я. И. ПЕРЕЛЬМАН ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

ISBN 978-5-9603-0447-4
9 785960 304474 >

ЕАС

6+